

В. Г. Журавлев

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ЯДЕРНЫЕ РАЗБИЕНИЯ

ВВЕДЕНИЕ

0.1. Основной результат. Множество $v = \{v_0, \dots, v_d\}$ векторов v_0, \dots, v_d вещественного пространства \mathbb{R}^d образуют *звезду*, если 1) любые $d - 1$ вектора из v линейно независимы и 2) определяемая ими гиперплоскость разделяет два оставшихся в v вектора. Назовем вектор $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_d)$ из пространства \mathbb{R}^{d+1} *весовым*, если он имеет положительные координаты, удовлетворяющие условию нормирования $\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_d = 1$.

В теореме 1.1 приведена конструкция, которая каждой паре (v, μ) , состоящей из произвольной звезды v и любого весового вектора μ , ставит в соответствие

$$\text{Kг} : (v, \mu) \longrightarrow \mathcal{T}^d(v, \mu) \quad (0.1)$$

полиэдральное *ядерное разбиение* $\mathcal{T}^d(v, \mu)$ пространства \mathbb{R}^d . Указанное разбиение состоит из параллелепипедов $(d + 1)$ -го вида T_0, T_1, \dots, T_d , вместе образующих *ядро*

$$\text{Kг} = T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_d \quad (0.2)$$

разбиения $\mathcal{T}^d(v, \mu)$, при этом ядро (0.2) однозначно определяется звездой v .

Ядро $\text{Kг} \subset \mathcal{T}^d(v, \mu)$ характеризуется следующими свойствами:

1) Kг является *параллелоэдром* – многогранником, разбивающий пространство

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{l \in \mathcal{L}} \text{Kг}[l] \quad (0.3)$$

с помощью параллельных переносов $\text{Kг}[l] = \text{Kг} + l$ на векторы l некоторой решетки \mathcal{L} ;

2) ядро допускает *перекладывание*

$$S' : \text{Kг} \longrightarrow \text{Kг} \quad (0.4)$$

областей T_k из (0.2), сохраняющим само ядро Kг как единое целое;

Ключевые слова: полиэдральные ядерные разбиения, ступенчатые поверхности (stepped surfaces), звездные графы.

3) существует биекция

$$\text{Kг} \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}_{L'}^d : x \mapsto x \bmod L'. \quad (0.5)$$

между ядром Kг и d -мерным тором $\mathbb{T}_{L'}^d = \mathbb{R}^d/L'$, при которой перекладыванию S' будет соответствовать сдвиг тора $\mathbb{T}_{L'}^d$.

В статье ядерным разбиениям $\mathcal{T}^d(v, \mu)$ из (0.1) дано название *универсальные* вследствие независимости выбора исходных звезды v и весового вектора μ .

0.2. Метод. При построении универсальных ядерных разбиений $\mathcal{T}^d(v, \mu)$ используются:

1) периодические ядерные разбиения $\mathcal{T}_L^d(v, \mu)$ с периодами из некоторой полной решетки $L \subset \mathbb{R}^d$ и

2) ориентированные звездные графы $\vec{G} = \vec{G}(v, \mu)$ в пространстве \mathbb{R}^d , определяемые звездой v и весовым вектором μ .

Общие ядерные разбиения $\mathcal{T}^d(v, \mu)$ получаются как предел

$$\mathcal{T}^d(v, \mu) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{T}_{L_i}^d(v_i, \mu_i) \quad (0.6)$$

аппроксимирующей последовательности периодических разбиений $\mathcal{T}_{L_i}^d(v_i, \mu_i)$, у которых решетки периодов L_i имеют фундаментальные области $F_i = \mathbb{R}^d/L_i$ с внутренними радиусами $r_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$.

0.3. История. Первым примером ядерных разбиений можно считать одномерные разбиения Фибоначчи [1]. Однако роль ядер была полностью осознана, лишь когда было открыто [2] и исследовано фрактальное разбиение Розы [3, 4]. В [5] и [6] для произвольной размерности d построены разбиения $\mathcal{T}_{\text{Тор}}^d(v, \mu)$ торов $\text{Тор} = \mathbb{R}^d/L$.

Другой подход, использующий ступенчатые поверхности (stepped surfaces) в трехмерном пространстве, изложен в [7–11].

§1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

1.1. Звезды. Обозначим через Σ совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{k_1, k_2\}$ из множества индексов $\{0, 1, \dots, d\}$. Пусть v_0, v_1, \dots, v_d – произвольные векторы из \mathbb{R}^d и $\sigma' = \{k'_1, \dots, k'_{d-1}\} = \{0, 1, \dots, d\} \setminus \sigma$ – дополнительное к σ сочетание. Между $\sigma \in \Sigma$ и дополнительными к ним сочетаниями $\sigma' \in \Sigma$ существует взаимно однозначное соответствие

$$\sigma \Leftrightarrow \sigma'. \quad (1.1)$$

Далее мы будем рассматривать неупорядоченные множества векторов $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$.

Определение 1.1. Пусть любые $d - 1$ вектора из $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ линейно независимы. Обозначим через

$$H_{\sigma'} = \{\lambda_{k'_1} v_{k'_1} + \dots + \lambda_{k'_{d-1}} v_{k'_{d-1}}; \lambda_{k'_1}, \dots, \lambda_{k'_{d-1}} \in \mathbb{R}\} \quad (1.2)$$

гиперплоскость, содержащую векторы $v_{k'_j}$ с индексами k'_j из σ' . Тогда такое множество векторов

$$v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\} \quad (1.3)$$

назовем звездой, если для всех дополнительных (1.1) к σ' сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\} \in \Sigma$ векторы v_{k_1}, v_{k_2} из $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ не принадлежат гиперплоскости (1.2) и лежат по отношению к ней в разных полупространствах $H_{\sigma'}^+$ и $H_{\sigma'}^-$.

Непосредственно из определения звезды следует, что любые d вектора из $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ будут линейно независимы. Объяснением названия звезды может служить следующий критерий.

Критерий 1.1. Обозначим через

$$\Delta(v) = \{\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_d v_d; \lambda_0 + \dots + \lambda_d \leq 1, \lambda_0, \dots, \lambda_d \geq 0\}, \quad (1.4)$$

где коэффициенты $\lambda_0, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, натянутый на векторы звезды v симплекс, и пусть $\Delta^{\text{int}}(v)$ – внутренняя часть симплекса (1.4). Тогда условие на множество векторов v быть звездой равносильно условию

$$0 \in \Delta^{\text{int}}(v). \quad (1.5)$$

1.2. Взвешенные звезды. Каждому вектору v_k звезды v из (1.3) поставим в соответствие его вес μ_k – вещественное число, а всей звезде v – весовой вектор

$$\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_d) \quad (1.6)$$

с нормирующим условием

$$\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_d = 1, \quad (1.7)$$

где

$$\mu_k > 0 \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \dots, d. \quad (1.8)$$

Звезда $v = v_\mu$, снабженная весовым вектором (1.6)–(1.8), называется взвешенной звездой.

1.3. Перекладывающиеся параллелоэдры. Определим для $m = 0, 1, \dots, d$ замкнутые d -мерные *параллелепипеды*

$$T_k = \{\lambda_{k_1} v_{k_1} + \dots + \lambda_{k_d} v_{k_d}; 0 \leq \lambda_{k_i} \leq 1\}, \quad (1.9)$$

где k_1, \dots, k_d – дополнительные к k индексы в $\{0, 1, \dots, d\}$. Множество лучей v_{k_1}, \dots, v_{k_d} назовем *скелетом* параллелепипеда T_k из (1.9). Если множество векторов $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ является звездой (1.3), то объединение

$$T = T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_d \quad (1.10)$$

параллелепипедов (1.9) образует *параллелоэдр* [12, 13] – многогранник, разбивающий пространство

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{l \in L} T[l] \quad (1.11)$$

с помощью параллельных переносов $T[l] = T + l$ на векторы l решетки L . Причем различные многогранники $T[l]$ из (1.11) не имеют общих внутренних точек. Здесь

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_d] \quad (1.12)$$

– *полная решетка* в пространстве \mathbb{R}^d с базисом l_1, \dots, l_d , т.е. векторы l_1, \dots, l_d линейно независимы на поле вещественных чисел \mathbb{R} , при этом векторы l_k определяются

$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для } k = 1, \dots, d \quad (1.13)$$

через лучи v_0, v_1, \dots, v_d звезды v из (1.3).

Для $d = 2$ параллелоэдр T из (1.10) является выпуклым шестиугольником с попарно равными и параллельными сторонами, для $d = 3$ – ромбододекаэдром Федорова [14], а для $d = 4$ – параллелоэдром Вороного [15].

Из разбиения (1.11) следует, что параллелоэдр T является *разверткой тора* $\mathbb{T}_L^d = \mathbb{R}^d/L$, т.е. параллелоэдр T можно отождествить с самим тором \mathbb{T}_L^d через каноническое отображение

$$T \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}_L^d : x \mapsto x \bmod L, \quad (1.14)$$

при этом, с точностью до множества граничных точек $\partial T = T \setminus T^{\text{int}}$, отображение (1.14) есть биекция. В [12] доказано, что для развертки T существует *перекладывание*

$$T \xrightarrow{S'} T : S'(x) = x + v_{\text{col}(x)} \quad (1.15)$$

на векторы v_0, v_1, \dots, v_d звезды v , связанные с базисом (1.12) решетки L равенствами (1.13). В формуле (1.15) использовано обозначение $\text{col}(x) = k$ для *цвета* точек x , принадлежащих подмножеству T_k из разбиения (1.10), где $k = 0, 1, \dots, d$. Развертки T , обладающие свойством (1.15), называются *перекладывающимися*.

Заметим, что при переходе (1.13) от векторов перекладывания v_0, v_1, \dots, v_d к базису l_1, \dots, l_d решетки L нарушается симметрия, когда выделяется вектор v_0 . Удобно ввести для него дополнительное обозначение

$$v_0 = \alpha'. \quad (1.16)$$

В частности, из равенств (1.13) и (1.16) вытекают сравнения

$$v_k \equiv \alpha' \pmod{L}$$

для всех $k = 0, 1, \dots, d$. Поэтому перекладывание (1.15) эквивалентно сдвигу $S' = S'_{\alpha'}$:

$$T \xrightarrow{S'} T : S'(x) \equiv x + \alpha' \pmod{L} \quad (1.17)$$

тора $T = \mathbb{T}_L^d$ на вектор $\alpha' \pmod{L}$.

1.4. Звездный граф. Дополнительно к (1.3) введем *симметризованную звезду*

$$w = \{w_0, w_1, \dots, w_d\}, \quad (1.18)$$

состоящую из лучей $w_k = \pm v_k$, где v_k принадлежат звезде v , и имеющих соответственно *веса*

$$\mu w_k = \text{sign}(w_k) \mu_k \quad (1.19)$$

где *знаки* $\text{sign}(w_k)$ звезд w_k определены условиями $\text{sign}(w_k) = +1$ или -1 для $w_k = +v_k$ или $w_k = -v_k$.

Рассмотрим *ориентированный граф* \vec{G} с *вершинами*

$$\vec{G}^{\text{ver}} = \{x = x(a); a \in \mathbb{Z}^{d+1}, \mu x \in \mathfrak{I}\}, \quad (1.20)$$

при этом

$$x = x(a) = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \dots + a_d v_d \quad (1.21)$$

– точка из пространства \mathbb{R}^d с *индексом* $a = (a_0, a_1, \dots, a_d)$ из решетки \mathbb{Z}^{d+1} ; *вес* μx точки $x = x(a)$ определен равенством

$$\mu x = a_0 \mu v_0 + a_1 \mu v_1 + \dots + a_d \mu v_d = \mu a, \quad (1.22)$$

где справа

$$\mu a = a_0 \mu_0 + a_1 \mu_1 + \dots + a_d \mu_d \quad (1.23)$$

– вес индекса a , определяемый по весовому вектору $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_d)$ из (1.6); \mathcal{I} обозначает *единичный полуинтервал* $[0, 1)$.

Вершины $x, x' \in \vec{G}^{\text{ver}}$ соединим дугой w_k – ориентированным ребром с номером $k = 0, 1, \dots, d$, если

$$x' - x = w_k \in w. \quad (1.24)$$

Здесь справа указана симметризованная звезда (1.18). Если же вершины $x = x(a)$, $x' = x'(a')$ записать в терминах индексов (1.21), то (1.24) будет эквивалентно условию

$$a' - a = \varepsilon_k^\pm \in \varepsilon^\pm, \quad (1.25)$$

при этом

$$\varepsilon^\pm = \{\varepsilon_0^\pm, \varepsilon_1^\pm, \dots, \varepsilon_d^\pm\}, \quad (1.26)$$

где $\varepsilon_k^\pm = \pm \varepsilon_k$, – *симметризованная единичная звезда*, получающаяся симметризацией *единичного базиса*

$$\varepsilon_0 = (0, \dots, 0, 1), \quad \varepsilon_1 = (1, \dots, 0, 0), \quad \varepsilon_d = (0, \dots, 1, 0) \quad (1.27)$$

пространства \mathbb{R}^{d+1} . Если единичным векторам ε_k придать веса

$$\mu \varepsilon_k = \mu_k \quad (1.28)$$

для $k = 0, 1, \dots, d$, то вес (1.23) индекса a запишется

$$\mu a = a_0 \mu \varepsilon_0 + a_1 \mu \varepsilon_1 + \dots + a_d \mu \varepsilon_d \quad (1.29)$$

аналогично весу (1.22) вершины $x = x(a)$.

Определенный в (1.20) и (1.24) граф \vec{G} назовем *звездным графом*.

Лемма 1.1. *Если $x \in \vec{G}^{\text{ver}}$ и точка $x' = x + w_k$ для некоторого луча $w_k \in w$ симметризованной звезды (1.18), то имеет место 1) импликация:*

$$\mu x' = \mu x + \mu w_k \in \mathcal{I} \quad \Rightarrow \quad x' \in \vec{G}^{\text{ver}} \quad (1.30)$$

т.е. точка x' также является вершиной звездного графа \vec{G} ; 2) при этом вершины x, x' соединены дугой w_k .

Доказательство. Точка $x' = x'(a')$ имеет индекс $a' = a + \varepsilon_k^\pm$, где a – индекс вершины $x = x(a)$ и знак у $\varepsilon_k^\pm = \pm \varepsilon_k$ тот же, что и у луча $w_k = \pm v_k$. Следовательно, $a' \in \mathbb{Z}^{d+1}$. Отсюда, включения $\mu x' \in \mathcal{I}$ и определения (1.20) вершин графа \vec{G} вытекает первое утверждение. Второе утверждение верно по определению дуги (1.24). \square

Замечание 1.1. Укажем на важность импликации (1.30) для получения алгоритмов построения ориентированных графов \vec{G} .

1.5. Вершины базисных параллелепипедов. Напомним, что параллелепипед T_k в (1.9) порождается векторами $v_i \in v$ с номерами i из множества

$$\mathcal{D}_k = \mathcal{D} \setminus \{k\}, \quad (1.31)$$

где $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, d\}$. Множество векторов

$$\text{Sk}_k = \{v_i; \quad i \in \mathcal{D}_k\} \quad (1.32)$$

назовем *остовом* (skeleton) параллелепипеда T_k . Остов Sk_k порождает параллелепипед T_k и содержит наименьшее число векторов с указанным свойством.

Согласно определению (1.9) параллелепипед T_k имеет следующие *вершины*

$$T_k^{\text{ver}} = \{v_{\mathbf{i}}; \quad \mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k\}. \quad (1.33)$$

Здесь $\mathbf{i} = \{i_1, \dots, i_\iota\}$ – *мультииндекс*, являющийся произвольным подмножеством индексов из множества (1.31), и

$$v_{\mathbf{i}} = v_{i_1} + \dots + v_{i_\iota}. \quad (1.34)$$

При этом в (1.33) допускается пустое подмножество $\mathbf{i} = \emptyset$, когда $\iota = 0$. В данном случае полагаем

$$v_{\emptyset} = 0. \quad (1.35)$$

Таким образом, по определению $\iota = 0, 1, \dots, d$. Поэтому каждый параллелепипед T_k в (1.9) имеет число вершин

$$\#T_k^{\text{ver}} = 2^d. \quad (1.36)$$

Далее нам потребуется понятие *отмеченного параллелепипеда* $T_{k,\mathbf{i}}$ – это параллелепипед T_k с некоторой выделенной фиксированной его вершиной $v_{\mathbf{i}} \in T_k^{\text{ver}}$.

1.6. Графы базисных параллелепипедов. Граф $\vec{G}(T_k)$ параллелепипеда T_k – это ориентированный граф, имеющий вершины

$$\vec{G}^{\text{ver}}(T_k) = T_k^{\text{ver}}. \quad (1.37)$$

По аналогии с (1.24) вершины $v_{\mathbf{i}}, v_{\mathbf{i}'}$ $\in T_k^{\text{ver}}$ считаются соединенными дугой w_k , если

$$v_{\mathbf{i}'} - v_{\mathbf{i}} = w_k \quad \in \quad w. \quad (1.38)$$

Отмеченному параллелепипеду $T_{k,i}$ отвечает граф $\vec{G}(T_{k,i})$, в котором выделена та же самая вершина $v_i \in \vec{G}^{\text{ver}}(T_k)$, что и у параллелепипеда $T_{k,i}$.

1.7. Вложения графов. Заметим, согласно определениям (1.9) и (1.20), (1.24) имеют место включения

$$T_{k,i} \subset \mathbf{R}^d, \quad \vec{G} \subset \mathbf{R}^d. \quad (1.39)$$

Учитывая (1.39), будем говорить, что граф $\vec{G}(T_{k,i})$ отмеченного параллелепипеда $T_{k,i}$ *вкладывается*

$$x : \vec{G}(T_{k,i}) \hookrightarrow \vec{G} \quad (1.40)$$

в граф \vec{G} в его вершине $x \in \vec{G}^{\text{ver}}$, если выполняется включение графов

$$\vec{G}(T_{k,i}) + (x - v_i) \subset \vec{G}. \quad (1.41)$$

Последнее означает, что $\vec{G}(T_{k,i})$ является подграфом графа \vec{G} при условии, если выделенную вершину v_i графа $\vec{G}(T_{k,i})$ параллельным сдвигом совместить с вершиной x графа \vec{G} . Обозначим через $X_{k,i}$ подмножество тех вершин x графа \vec{G} , в которых имеет место включение (1.40).

1.8. Разбиение пространства \mathbf{R}^d . Основная теорема.

Основная теорема 1.1. Пусть

$$xT_{k,i} = T_{k,i} + (x - v_i) \subset \mathbf{R}^d \quad (1.42)$$

обозначает параллелепипед, получающийся сдвигом $T_{k,i}$ на вектор $x - v_i$, где x принадлежит множеству вершин $X_{k,i} \subset \vec{G}^{\text{ver}}$ и $v_i \in T_k^{\text{ver}}$ – вершина базисного параллелепипеда T_k с мультииндексом $\mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k$.

Тогда имеет место разбиение

$$\mathbf{R}^d = \bigcup_{0 \leq k \leq d} \bigcup_{\mathbf{i} \subseteq \mathcal{D}_k} \bigcup_{x \in X_{k,i}} xT_{k,i} \quad (1.43)$$

пространства \mathbf{R}^d любой размерности d . В объединении (1.43) любые два параллелепипеда $xT_{k,i}$ и $x'T_{k',i'}$ совпадают

$$xT_{k,i} = x'T_{k',i'} \quad (1.44)$$

или не имеют общих внутренних точек.

Оставшаяся часть статьи будет посвящена доказательству того факта, что при любом выборе звезды v и весового параметра μ , определенных в (1.3) и (1.6), объединение

$$\mathcal{T}(v, \mu) = \bigcup_{0 \leq k \leq d} \bigcup_{i \subseteq \mathcal{D}_k} \bigcup_{x \in X_{k,i}} xT_{k,i} \quad (1.45)$$

представляет собою разбиение пространства \mathbf{R}^d .

§2. ЕДИНИЧНЫЙ ГРАФ

2.1. Ориентированный граф $\vec{\mathcal{G}}$. В пространстве \mathbb{R}^{d+1} выделим $(d+1)$ -мерный *слой*

$$\mathbb{R}_\mu^{d+1} = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^{d+1}; \mu \cdot \hat{x} \in \mathcal{J}\}, \quad (2.1)$$

где $\mu \cdot \hat{x}$ – скалярное произведение весового вектора $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_d)$ из (1.6) и \hat{x} ; $\mathcal{J} = [0, 1)$ – единичный полуинтервал. В свою очередь, в \mathbb{R}_μ^{d+1} выделим *решетку*

$$\mathbb{Z}_\mu^{d+1} = \mathbb{R}_\mu^{d+1} \cap \mathbb{Z}^{d+1} = \{a \in \mathbb{Z}^{d+1}; \mu a \in \mathcal{J}\} \quad (2.2)$$

точек $a = (a_0, a_1, \dots, a_d)$ с целыми координатами a_k . Здесь μa обозначает *вес* точки a , определяемый формулой (1.23), и согласно которой можем записать $\mu a = \mu \cdot a$. Поэтому $\mu x = \mu \cdot x$ также будем называть *весом* и для произвольной вещественной точки $x \in \mathbb{R}^{d+1}$.

Используя решетку (2.2), можем определить *ориентированный граф $\vec{\mathcal{G}}$ с вершинами*

$$\vec{\mathcal{G}}^{\text{ver}} = \mathbb{Z}_\mu^{d+1}. \quad (2.3)$$

Его вершины $a, a' \in \vec{\mathcal{G}}^{\text{ver}}$ соединим *дугой* ε_k^\pm , если выполнено условие

$$a' - a = \varepsilon_k^\pm, \quad (2.4)$$

где $\varepsilon_k^\pm, k = 0, 1, \dots, d$, принадлежит симметризованной единичной звезде ε^\pm из (1.26). Определенный в (2.3) и (2.4) граф $\vec{\mathcal{G}}$ назовем *единичным графом*, поскольку его ребрами являются векторы единичного базиса (1.27).

2.2. Симплекс. Рассмотрим замкнутый d -мерный *симплекс* $\Delta_\varepsilon = \Delta_\varepsilon^d$, вершины которого есть концы векторов единичного базиса $\varepsilon = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d\}$ из (1.27). Вершины $\Delta_\varepsilon^{\text{ver}}$ симплекса Δ_ε будем обозначать так же, как и самими векторы ε_k . Различать их будем по указательным терминам “вершина” или “вектор”. *Внутренность* $\Delta_\varepsilon^{\text{int}}$ симплекса Δ_ε образуют точки $\hat{x} = (\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_d)$ вида

$$\hat{x} = \hat{x}_0\varepsilon_0 + \hat{x}_1\varepsilon_1 + \dots + \hat{x}_d\varepsilon_d, \quad (2.5)$$

где координаты ограничены условиями

$$\hat{x}_0 + \hat{x}_1 + \dots + \hat{x}_d = 1, \quad \hat{x}_k > 0. \quad (2.6)$$

Заметим, что $\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_d$ в равенстве (2.5) можно интерпретировать и как *барицентрические координаты* внутренней точки \hat{x} симплекса Δ_ε относительно его вершин $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d \in \Delta_\varepsilon^{\text{ver}}$.

2.3. Проекция. Выберем произвольную точку π из внутренности симплекса $\Delta_\varepsilon^{\text{int}}$ и зададим *проекцию*

$$\text{pr}_\pi : \mathbb{R}_\mu^{d+1} \longrightarrow \mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1} \quad (2.7)$$

вдоль соответствующего вектора π , отображающую слой (2.1) на его нижнюю граничную *гиперплоскость*

$$\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1} = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^{d+1}; \mu \cdot \hat{x} = 0\}. \quad (2.8)$$

Лемма 2.1. *Отображение*

$$\text{pr}_\pi : \mathbb{Z}_\mu^{d+1} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\mu,0}^{d+1} \quad (2.9)$$

есть биекция решетки (2.2) и ее образа

$$\mathbb{Z}_{\mu,0}^{d+1} = \text{pr}_\pi \mathbb{Z}_\mu^{d+1} \quad (2.10)$$

на гиперплоскости (2.8).

Доказательство. Пусть найдутся две различные целые точки a, a' решетки \mathbb{Z}_μ^{d+1} такие, что проекция pr'_π вдоль вектора π переводит одну точку в другую:

$$\text{pr}'_\pi a' = a. \quad (2.11)$$

По условию π принадлежит внутренности симплекса $\Delta_\varepsilon^{\text{int}}$, поэтому целый вектор $p = a' - a$ содержится внутри

$$\angle^{\text{int}} \varepsilon = \{\lambda_0\varepsilon_0 + \lambda_1\varepsilon_1 + \dots + \lambda_d\varepsilon_d; \lambda_k > 0\} \quad (2.12)$$

конуса $\angle \varepsilon$ с образующими из векторов единичного базиса (1.27).

Следовательно, $p = (p_0, p_1, \dots, p_d)$ имеет целые координаты $p_k \geq 1$. Но тогда для точки a' , ее вес

$$\mu a' = \mu a + \mu p \notin \mathfrak{J}, \quad (2.13)$$

поскольку $\mu a \geq 0$ и

$$\begin{aligned} \mu p &= p_0 \mu \varepsilon_0 + p_1 \mu \varepsilon_1 + \dots + p_d \mu \varepsilon_d \\ &= p_0 \mu_0 + p_1 \mu_1 + \dots + p_d \mu_d \\ &\geq \mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_d = 1, \end{aligned} \quad (2.14)$$

в силу определений (1.28) и (1.29). Вспоминая определение (2.2), приходим к противоречию между (2.13) и условием принадлежности точки a' решетке \mathbb{Z}_μ^{d+1} . \square

2.4. Изоморфизм графов. Чтобы не усложнять обозначения, условимся отождествлять

$$\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1} = \mathbb{R}^d \quad (2.15)$$

гиперплоскость (2.8) с обычным d -мерным пространством \mathbb{R}^d ; и пусть вложение $\mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ будет согласовано с (2.15).

Предложение 2.1. *Проекция*

$$v = \text{pr}_\pi \varepsilon \quad (2.16)$$

единичного базиса $\varepsilon = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d\}$ из (1.27) на гиперплоскость $\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1} = \mathbb{R}^d$ образует звезду v (см. определение 1.1).

Доказательство. Рассмотрим множество

$$\widehat{v} = \{\widehat{v}_0, \widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_d\} \subset \Delta_\varepsilon, \quad (2.17)$$

составленное из векторов

$$\widehat{v}_k = \varepsilon_k - \pi_k. \quad (2.18)$$

Здесь ε_k обозначают вершины симплекса Δ_ε и π_k – координаты точки $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d)$ из внутренности симплекса $\Delta_\varepsilon^{\text{int}}$. По критерию 1.1, множество векторов \widehat{v} образует звезду.

Далее, из (2.7) и (2.18) следует равенство проекций

$$\text{pr}_\pi \varepsilon = \text{pr}_\pi \widehat{v}, \quad (2.19)$$

откуда получаем еще одно определение

$$v = \text{pr}_\pi \widehat{v} \quad (2.20)$$

множества векторов (2.16). Проекция rg_π плоскости симплекса Δ_ε на гиперплоскость $\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1}$ – это невырожденное аффинное преобразование. Поскольку при таких преобразованиях сохраняется свойство быть звездой, то из (2.17) и представления (2.20) заключаем, что множество векторов v из (2.16) будет звездой. \square

Теорема 2.1. Пусть \vec{G} – звездный граф (1.20), (1.24) и \vec{G} – единичный граф (2.3), (2.4). Если звезда v имеет вид (2.16), где в качестве π выбрана произвольная внутренняя точка симплекса Δ_ε , то проекция rg_π из (2.7), перенесенная на указанные графы

$$\text{rg}_\pi : \vec{G} \xrightarrow{\sim} \vec{G}, \quad (2.21)$$

задает изоморфизм этих графов.

Доказательство. Изоморфизм графов (2.21) означает выполнение требований: 1) проекция rg_π из (2.7) взаимно однозначно переводит вершины одного графа в вершины другого; 2) при этом сохраняется связность дугами соответствующих вершин.

Для доказательства 1) нам потребуется

Лемма 2.2. С учетом соглашения (2.15) для вершин (1.20) звездного графа \vec{G} имеем место представление

$$\vec{G}^{\text{ver}} = \mathbb{Z}_{\mu,0}^{d+1}, \quad (2.22)$$

где множество $\mathbb{Z}_{\mu,0}^{d+1}$ было определено в (2.10).

Доказательство. Пусть точка a принадлежит решетке \mathbb{Z}_μ^{d+1} . Тогда по (2.2), (1.23) она имеет целые координаты $a = (a_0, a_1, \dots, a_d)$ и вес $\mu a \in \mathcal{J}$. По определению (2.10) ее проекция

$$\text{rg}_\pi a = x(a) = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \dots + a_d v_d \quad (2.23)$$

принадлежит решетке $\mathbb{Z}_{\mu,0}^{d+1}$ и согласно формуле (1.22) имеет вес

$$\mu x = \mu a. \quad (2.24)$$

Учитывая соглашение (2.15), из (2.23), (2.24) и определения (1.20) приходим к включению

$$x = x(a) \in \vec{G}^{\text{ver}}. \quad (2.25)$$

Проводя рассуждения в обратную сторону, из (2.25) по тем же соображениям выводим принадлежность точки $x = x(a)$ решетке $\mathbb{Z}_{\mu,0}^{d+1}$. \square

Продолжим доказательство теоремы 2.1. Согласно (2.3) для графа $\vec{\mathcal{G}} : \vec{\mathcal{G}}^{\text{ver}} = \mathbb{Z}_\mu^{d+1}$, поэтому требование 1) будет выполняться по леммам 2.1 и 2.2. Что касается требования 2), то оно выполняется в силу равенства (1.25) и определения (2.4). \square

§3. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРАФЫ И ФАКТОР-ГРАФЫ

3.1. Периодический единичный граф. Такие графы получаются, если в качестве μ из (1.6) выбрать рациональный весовой вектор

$$\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_d) = \left(\frac{m_0}{m}, \frac{m_1}{m}, \dots, \frac{m_d}{m} \right), \quad (3.1)$$

где m_k, m – натуральные числа, имеющие наибольший общий делитель

$$\text{g.c.d.}(m_0, m_1, \dots, m_d, m) = 1 \quad (3.2)$$

и удовлетворяющие нормирующему условию (1.7), которое в данном случае принимает вид

$$m_0 + m_1 + \dots + m_d = m. \quad (3.3)$$

Множество точек $a = (a_0, a_1, \dots, a_d)$ из решетки \mathbb{Z}^{d+1} с условием

$$\mu a = \mu \cdot a = 0 \quad (3.4)$$

образует подрешетку

$$L = L_\mu \subset \mathbb{Z}^{d+1}, \quad (3.5)$$

являющуюся, как и сама \mathbb{Z}^{d+1} , \mathbb{Z} -решеткой, т.е. модулем над кольцом целых чисел \mathbb{Z} . Из (3.1) и (3.4) следует, что L – полная \mathbb{Z} -решетка размерности d , состоящая из целых решений уравнения

$$a_0 m_0 + a_1 m_1 + \dots + a_d m_d = 0. \quad (3.6)$$

Указанная решетка имеет *базис*

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_d] \quad (3.7)$$

из векторов $l_k = (a_{k0}, a_{k1}, \dots, a_{kd}) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ с весами

$$\mu l_k = 0 \quad \text{для всех } k = 0, 1, \dots, d. \quad (3.8)$$

Лемма 3.1. *Имеет место разбиение*

$$\mathbb{Z}_\mu^{d+1} = \prod_{0 \leq i < m} L[i] \quad (3.9)$$

решетки решетки \mathbb{Z}_μ^{d+1} из (2.2) на непересекающиеся i -слои

$$L[i] = \{a \in \mathbb{Z}_\mu^{d+1}; \mu a = i\} = L + a[i], \quad (3.10)$$

где $a[i]$ – любая точки решетки \mathbb{Z}_μ^{d+1} веса $\mu a[i] = \frac{i}{m}$.

Доказательство. Поскольку согласно (3.8) любая точка l из \mathbb{Z} -решетки L имеет вес $\mu l = 0$, то из определения (2.2) решетки \mathbb{Z}_μ^{d+1} следует включение

$$L \subset \mathbb{Z}_\mu^{d+1} \quad (3.11)$$

Весовая функция $x \mapsto \mu x$ аддитивная, поэтому все точки a из множества $L + a[i]$ будут целыми точками веса $\mu a[i] = \frac{i}{m}$ и, значит, выполняются включения

$$L + a[i] \subset \mathbb{Z}_\mu^{d+1} \quad (3.12)$$

для всех $0 \leq i < m$. Заметим, что любая точка a решетки \mathbb{Z}_μ^{d+1} обязательно имеет вес вида $\mu a = \frac{i}{m}$ для некоторого $0 \leq i < m$. Тогда в силу включений (3.11) и (3.12) для доказательства разбиения (3.9) осталось проверить существование в решетке \mathbb{Z}_μ^{d+1} точек a всех весов вида $\mu a = \frac{i}{m}$. Действительно, данная решетка обладает указанным свойством, так как выполняется равенство

$$\text{g.c.d.}(m_0, m_1, \dots, m_d) = 1, \quad (3.13)$$

вытекающее из наложенного на наибольший общий делитель $\text{g.c.d.}(m_0, m_1, \dots, m_d, m)$ ограничения (3.2) вместе с условием нормирования (3.3). □

В случае рационального весового вектора (3.1) определенный в (2.3), (2.4) ориентированный единичный граф \vec{G} будет периодичным.

3.2. Периодический звездный граф. Согласно (3.4), (3.5) имеем $L \subset \mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1}$, где $\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1}$ – гиперплоскость (2.8); откуда и (3.11) получаем

$$L \subset \mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1} \cap \mathbb{Z}_\mu^{d+1}. \quad (3.14)$$

Поэтому, вспоминая определение (2.10) решетки $\mathbb{Z}_{\mu,0}^{d+1}$ и применяя лемму 2.2, получаем еще одно включение

$$L \subset \vec{G}^{\text{ver}} \quad (3.15)$$

\mathbb{Z} -решетки L во множество вершин звездного графа \vec{G} .

Лемма 3.2. Пусть \vec{G} – звездный граф, определенный в (1.20), (1.24), и μ – рациональный весовой вектор (3.1), удовлетворяющий условиям (3.2), (3.3). Тогда \vec{G} будет периодическим графом по модулю \mathbb{Z} -решетки L .

Доказательство. Если $a \in \vec{G}^{\text{ver}}$, то ввиду (2.7) выполнено включение

$$\text{pr}_\pi a = x(a) \in \vec{G}^{\text{ver}}, \quad (3.16)$$

где точка $x(a)$ определена в (1.21). Поскольку $a + l \in \vec{G}^{\text{ver}}$ для любого вектора $l \in L$ и

$$\text{pr}_\pi(a + l) = x(a) + x(l) = x(a) + l, \quad (3.17)$$

то из (3.16), (3.17) и теоремы 2.1 следует включение

$$x(a) + l \in \vec{G}^{\text{ver}}, \quad (3.18)$$

из которого заключаем, что множество вершин \vec{G}^{ver} графа \vec{G} периодически по модулю \mathbb{Z} -решетки L .

По определению (1.24) вершины $x, x' \in \vec{G}^{\text{ver}}$ соединены дугой w_k , тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$x' - x = w_k \in w. \quad (3.19)$$

Тогда $x + l$ и $x' + l$ – снова вершины графа \vec{G} и по (3.19) они также соединены дугой w_k . Включение (3.18) и равенство (3.19) означают, что сдвиг графа \vec{G} на любой вектор $l \in L$ переводит вершины в вершины, сохраняя при этом их связность. \square

Включение \mathbb{Z} -решетки L в гиперплоскость $L \subset \mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1}$ из (2.8) позволяет определить d -мерный тор

$$\mathbb{T}_\mu^d = \mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1} / L, \quad (3.20)$$

а лемма 3.2 в случае рационального весового вектора μ – определить для звездного графа \vec{G} соответственно фактор-граф $\vec{G}_L = \vec{G} / L$, вложенный

$$\vec{G}_L \subset \mathbb{T}_\mu^d \quad (3.21)$$

в тор (3.20), т.е. \vec{G}_L – это граф на торе \mathbb{T}_μ^d .

3.3. Орбита вершин фактор-графа. Ведем в рассмотрение сдвиг

$$\mathbb{T}_\mu^d \xrightarrow{S} \mathbb{T}_\mu^d : S(x) \equiv x + \alpha \pmod{L} \quad (3.22)$$

тора (3.20) на вектор

$$\alpha = x[1] = x(a[1]) \in \mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1}, \quad (3.23)$$

где $a[1]$ – любая точки решетки \mathbb{Z}_μ^{d+1} веса $\mu a[1] = \frac{1}{m}$ из (3.10) и $x(a[1])$ – определенная в (1.21) точка из гиперплоскости $\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1}$ с индексом $a[1]$.

Фактор-граф \vec{G}_L имеет вершины

$$\vec{G}_L^{\text{ver}} = \vec{G}^{\text{ver}}/L. \quad (3.24)$$

По лемме 3.1 они образуют

$$\vec{G}_L^{\text{ver}} = \text{Orb}(0) \quad (3.25)$$

одну *орбиту*

$$\text{Orb}(0) = \{S^i(0) \equiv x[i] \pmod{L}; \quad i = 0, 1, \dots, m-1\} \quad (3.26)$$

начальной вершины $x[0] = 0$ относительно сдвига тора (3.22).

3.4. Орбиты базисных параллелепипедов. Из *орбит*

$$\text{Orb}(T_k) = \{S^i(T_k); \quad i = 0, 1, \dots, m_k - 1\} \quad (3.27)$$

базисных параллелепипедов (1.9) составим множество

$$\mathcal{T}_{\text{Тор}}(v, \mu) = \text{Orb}(T_0) \cup \text{Orb}(T_1) \cup \dots \cup \text{Orb}(T_d), \quad (3.28)$$

которое одновременно будем рассматривать и как объединение отдельных параллелепипедов, полученных сдвигами базисных параллелепипедов T_k . Здесь предполагается, что весовой вектор является рациональным $\mu = (\frac{m_0}{m}, \frac{m_1}{m}, \dots, \frac{m_d}{m})$.

Основное свойство множества $\mathcal{T}_{\text{Тор}}(v, \mu)$ – это его *инвариантность*

$$S \mathcal{T}_{\text{Тор}}(v, \mu) = \mathcal{T}_{\text{Тор}}(v, \mu) \quad (3.29)$$

относительно сдвига тора (3.22). Для доказательства (3.29) заметим, что из определения (3.27) орбиты $\text{Orb}(T_k)$ следует представление

$$S \text{Orb}(T_k) = (\text{Orb}(T_k) \setminus T_k) \cup S^{m_k}(T_k), \quad (3.30)$$

при этом

$$S^{m_0}(T_0) \cup S^{m_1}(T_1) \cup \dots \cup S^{m_d}(T_d) \equiv T \pmod{L}, \quad (3.31)$$

где $T = T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_d$ – параллеледр (1.10) и согласно (1.9), (1.15) левая часть равенства (3.31) есть ничто иное, как переложенные базисные параллелепипеды T_0, T_1, \dots, T_d на векторы

$$v_k \equiv x[m_k] \pmod{L} \quad (3.32)$$

звезды v , так как по предположению они имеют веса

$$\mu v_k = \mu_k = \frac{m_k}{m} \quad (3.33)$$

для $k = 0, 1, \dots, d$.

3.5. Индуцированное отображение. Инвариантность (3.29) позволяет определить *индуцированное отображение* или иначе – отображение первого возвращения, отображение Пуанкаре –

$$S|_T = S', \quad (3.34)$$

эквивалентное в силу (3.35) сдвигу $S' = S'_{\alpha'}$:

$$T \xrightarrow{S'} T: \quad S'(x) \equiv x + \alpha' \pmod{L'} \quad (3.35)$$

параллеледр T , представляемого теперь как d -мерный *тор*

$$\mathbb{T}_{\mu, \pi}^d = \mathbb{R}_{\mu, 0}^{d+1} / L' \quad (3.36)$$

относительно решетки

$$L' = \mathbb{Z}[l'_1, \dots, l'_d] \quad (3.37)$$

с базисом

$$l'_k = v_k - v_0 \quad \text{для } k = 1, \dots, d, \quad (3.38)$$

где $v = (v_0, v_1, \dots, v_d)$ – проекция $v = \text{pr}_{\pi} \varepsilon$ из (2.16) единичного базиса $\varepsilon = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d\}$ на гиперплоскость $\mathbb{R}_{\mu, 0}^{d+1} = \mathbb{R}^d$. В качестве вектора сдвига α' в (3.35) можно взять вектор

$$\alpha' = v_0, \quad (3.39)$$

удовлетворяющий сравнениям

$$v_k \equiv \alpha' \pmod{L'}$$

для всех $k = 0, 1, \dots, d$.

Замечание 3.1. Итак, у нас имеются два тора \mathbb{T}_{μ}^d и $\mathbb{T}_{\mu, \pi}^d$. Согласно определениям (3.20) и (3.36) мы можем рассматривать второй малый тор вложенным

$$\mathbb{T}_{\mu, \pi}^d \subset \mathbb{T}_{\mu}^d \quad (3.40)$$

в основной большой тор \mathbb{T}_μ^d , зависящий только от выбора весового вектора μ из (3.1). Малый же тор $\mathbb{T}_{\mu,\pi}^d$ зависит дополнительно и от проекции rg_π , точнее – от выбора точки π из симплекса Δ_ε .

3.6. Точки общего положения. Пусть π – точка из симплекса Δ_ε с барицентрическими координатами $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d)$ из (2.5), (2.6) относительно вершин симплекса $\varepsilon = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d\}$. Назовем π *точкой общего положения*, если выполняются условия:

$$\pi \in \Delta_\varepsilon^{\text{int}} \quad (3.41)$$

и

$$\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d \text{ линейно независимы над кольцом } \mathbb{Z}. \quad (3.42)$$

Укажем, что в определении (3.42) кольцо целых рациональных чисел \mathbb{Z} можно заменить полем рациональных чисел \mathbb{Q} .

Сейчас нам нужно связать свойства точки π с векторов сдвига α' из (3.35). Если π – точка общего положения, то по предложению 2.1 проекция $v = \text{rg}_\pi \varepsilon$ образует звезду; и тогда по определению 1.1 решетка L' из (3.37) будет полной и, следовательно, любой вектор α' разложим по ее базису. Пусть $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_d)$ имеет координаты α'_k в некотором базисе полной решетки L' . Скажем, что вектор сдвига α' является *иррациональным*, если его координаты α'_k удовлетворяют условию:

$$\text{числа } 1, \alpha'_1, \dots, \alpha'_d \text{ линейно независимы над кольцом } \mathbb{Z}. \quad (3.43)$$

Лемма 3.3. *Если $\pi \in \Delta_\varepsilon$ – точка общего положения (3.41), (3.42), то вектор сдвига α' в (3.35) будет иррациональным.*

Доказательство. При проектировании (2.7):

$$\text{rg}_\pi : \mathbb{R}_\mu^{d+1} \in x \longrightarrow \hat{x} \ni \mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1} \quad (3.44)$$

сохраняются барицентрические координаты у точек x и \hat{x} соответственно относительно вершин $\varepsilon = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d\}$ симплекса Δ_ε и вершин $v = (v_0, v_1, \dots, v_d)$ звезды $v = \text{rg}_\pi \varepsilon$. Поскольку $\hat{\pi} = \text{rg}_\pi \pi = 0$, то

$$\pi_0 v_0 + \pi_1 v_1 + \dots + \pi_d v_d = 0. \quad (3.45)$$

Отсюда, условия нормирования $\pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_d = 1$ и определения (3.38) базисных векторов $l'_k = v_k - v_0$ выводим

$$v_0 = -\pi_1 l'_1 - \dots - \pi_d l'_d. \quad (3.46)$$

Так как $\alpha' = v_0$ по (1.16), то из равенства (3.46) следует $\alpha'_k = -\pi_k$ и поэтому получаем разложение

$$\alpha' = \alpha'_1 l'_1 + \dots + \alpha'_d l'_d \quad (3.47)$$

вектора сдвига α' по базису решетки L' . Если теперь предположить, что числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ линейно зависимы над кольцом \mathbb{Z} , и использовать разложение (3.47), то придем к противоречию с предполагаемым условием (3.42), что π является точкой общего положения. \square

§4. РАЗБИЕНИЯ ТОРА

4.1. Покрытие тора.

Лемма 4.1. *В случае рационального весового вектора*

$$\mu = \left(\frac{m_0}{m}, \frac{m_1}{m}, \dots, \frac{m_d}{m} \right)$$

вида (3.1) с условиями (3.2), (3.3) объединение (3.28) покрывает

$$\mathcal{T}_{\text{Тор}}(v, \mu) = \mathbb{T}_{\mu}^d \quad (4.1)$$

весь тор (3.20).

Доказательство. Доказательство равенства (4.1) разобьем на два случая.

1. *Случай, когда $\pi \in \Delta_{\varepsilon}$ – точка общего положения* (3.41), (3.42). Тогда по лемме 3.3 сдвиг (3.35)

$$S' = S'_{\alpha'} : T \longrightarrow T \quad (4.2)$$

тора $T = \mathbb{T}_{\mu, \pi}^d$ из (3.36) будет иррациональным. Последнее свойство равносильно тому, что орбита

$$\text{Orb}'(x_0) = \{x_i = S'^i(x_0); i = 0, 1, \dots, \infty\} \quad (4.3)$$

любой точки $x_0 \in T$, например $x_0 = 0$, всюду плотна на торе T ; и поэтому орбита имеет замыкание

$$\text{Orb}'^c(x_0) = T. \quad (4.4)$$

Согласно (3.34) сдвиг S' является индуцированным отображением $S' = S|_T$ для сдвига S большого тора \mathbb{T}_{μ}^d из (3.20). Из инвариантности (3.29) множества $\mathcal{T}_{\text{Тор}}(v, \mu)$ относительно сдвига S и замкнутости (4.4) орбиты $\text{Orb}'(x_0)$ следует, что сдвиг S тора \mathbb{T}_{μ}^d также будет иррациональным. Отсюда и замкнутости множества $\mathcal{T}_{\text{Тор}}(v, \mu)$ вытекает покрытие (4.1).

2. *Случай точки π не общего положения.* Согласно определению (2.7) в данном случае точка π все равно должна выбираться из внутренней симплекса $\Delta_\varepsilon^{\text{int}}$, хотя условие линейной независимости (3.42) уже может не выполняться.

Точку π можно аппроксимировать

$$|\pi - \pi^*|_1 = |\pi_0 - \pi_0^*| + |\pi_1 - \pi_1^*| + \dots + |\pi_d - \pi_d^*| \leq \epsilon \quad (4.5)$$

точками общего положения $\pi^* = (\pi_0^*, \pi_1^*, \dots, \pi_d^*)$ из $\Delta_\varepsilon^{\text{int}}$ с точностью до любого наперед заданного $\varepsilon > 0$. Рассмотрим проекции

$$v = \text{pr}_\pi \varepsilon, \quad v^* = \text{pr}_{\pi^*} \varepsilon \quad (4.6)$$

единичного базиса ε на гиперплоскость $\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1}$. По предложению 2.1 данные проекции образуют звезды $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ и $v^* = \{v_0^*, v_1^*, \dots, v_d^*\}$. Используя 1-метрику из (4.5), определим *расстояние*

$$\varrho(v, v^*) = \max_{0 \leq k \leq d} |v_k - v_k^*|_1 \quad (4.7)$$

между звездами v и v^* . Из определения (2.7) проекций pr_π , pr_{π^*} и условия (4.5) получаем оценки для расстояния

$$\varrho(v, v^*) \leq \epsilon' \quad (4.8)$$

и разности

$$|\alpha - \alpha^*| \leq \epsilon' \quad (4.9)$$

для векторов (см. (3.23), (1.21))

$$\begin{aligned} \alpha &= x(a[1]) = a_0[1]v_0 + a_1[1]v_1 + \dots + a_d[1]v_d, \\ \alpha^* &= x^*(a[1]) = a_0[1]v_0^* + a_1[1]v_1^* + \dots + a_d[1]v_d^* \end{aligned} \quad (4.10)$$

сдвигов S, S^* тора \mathbb{T}_μ^d из (3.22), где $\epsilon' \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$. Последняя оценка вытекает из (4.8) и (4.10).

Определим расстояние $\varrho(\mathcal{T}_{\text{Tor}}^{\text{ver}}(v, \mu), \mathcal{T}_{\text{Tor}}^{\text{ver}}(v^*, \mu))$ между множествами вершин параллелепипедов из объединений $\mathcal{T}_{\text{Tor}}^{\text{ver}}(v, \mu)$ и $\mathcal{T}_{\text{Tor}}^{\text{ver}}(v^*, \mu)$ аналогично расстоянию (4.7) между звездами v и v^* . Тогда из (4.8) и (4.9) для этого расстояния будет вытекать оценка

$$\varrho(\mathcal{T}_{\text{Tor}}^{\text{ver}}(v, \mu), \mathcal{T}_{\text{Tor}}^{\text{ver}}(v^*, \mu)) \leq \epsilon'', \quad (4.11)$$

в которой также $\epsilon'' \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$. Так как множества орбит $\mathcal{T}_{\text{Tor}}^{\text{ver}}(v, \mu)$ и $\mathcal{T}_{\text{Tor}}^{\text{ver}}(v^*, \mu)$ содержатся в торе \mathbb{T}_μ^d , то имеет место включение

$$\mathbb{T}_\mu^d \setminus \mathcal{T}_{\text{Tor}}(v, \mu) \subseteq (\mathbb{T}_\mu^d \setminus \mathcal{T}_{\text{Tor}}(v^*, \mu)) \cup (\mathcal{T}_{\text{Tor}}(v, \mu) \setminus \mathcal{T}_{\text{Tor}}(v^*, \mu)), \quad (4.12)$$

из которого и доказанного равенства (4.1) для множества $\mathcal{T}_{\text{Tor}}(v^*, \mu)$ выводим

$$\mathbb{T}_\mu^d \setminus \mathcal{T}_{\text{Tor}}(v, \mu) \subseteq \mathcal{T}_{\text{Tor}}(v, \mu) \setminus \mathcal{T}_{\text{Tor}}(v^*, \mu). \quad (4.13)$$

Объединяя оценку (4.11) с включением (4.13) приходим к оценке объема разности

$$\text{vol}(\mathbb{T}_\mu^d \setminus \mathcal{T}_{\text{Tor}}(v, \mu)) \leq \epsilon''', \quad (4.14)$$

где снова $\epsilon''' \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$. По условию $\epsilon > 0$ произвольно, поэтому из (4.14) вытекает $\text{vol}(\mathbb{T}_\mu^d \setminus \mathcal{T}_{\text{Tor}}(v, \mu)) = 0$; а поскольку множество орбит $\mathcal{T}_{\text{Tor}}^{\text{ver}}(v, \mu)$ замкнуто, то, следовательно, $\mathbb{T}_\mu^d \setminus \mathcal{T}_{\text{Tor}}(v, \mu) = \emptyset$, что доказывает равенство (4.1) для случая произвольной точки π . \square

4.2. Минимальность параллелоэдра T . Чтобы доказать указанное свойство параллелоэдра T , нам потребуется следующий общий факт.

Лемма 4.2. Пусть $T_k^* = S^i(T_k)$, где $i > 0$, – некоторый параллелепипед, принадлежащий орбите $\text{Orb}(T_k)$ из (3.27); и пусть он пересекается

$$T^{\text{int}} \cap T_k^* \neq \emptyset \quad (4.15)$$

по внутренним точкам с параллелоэдром T из (1.10). Тогда у параллелепипеда T_k^* найдется вершина $x^{\text{ver}} \in T_k^{\text{ver}}$, являющаяся внутренней точкой

$$x^{\text{ver}} \in T^{\text{int}} \quad (4.16)$$

параллелоэдра T .

Доказательство. Не уменьшая общности будем считать $T_k = T_0$.

Из определения (1.10) следует, что параллелоэдр T можно представить как *вытягивание*

$$T = \bigcup_{t \in [0,1]} (T_0 + tv_0) \quad (4.17)$$

параллелепипеда T_0 вдоль вектора v_0 ; или более формально – как *сумму Минковского*

$$T = T_0 + [v_0] \quad (4.18)$$

параллелепипеда T_0 и отрезка $[v_0] = \bigcup_{t \in [0,1]} tv_0$.

В силу (4.15) найдется точка

$$x \in T^{\text{int}} \cap T_0^{\text{int}} \quad (4.19)$$

– общая внутренняя точка для параллелоэдра T и параллелепипеда T_0^* . Используя представление (4.17), для данной точки x будем иметь также включение

$$x \in (T_0 + t_x v_0)^{\text{int}} \quad (4.20)$$

для некоторого значения параметра $t_x \in [0, 1]$. Из (4.19) и (4.20) выводим

$$T_0^{*\text{int}} \cap (T_0 + t_x v_0)^{\text{int}} \neq \emptyset. \quad (4.21)$$

Параллелепипеды T_0^* и $T_0 + t_x v_0$ получаются параллельными переносами одного и того же параллелепипеда T_0 , т.е. с точностью до параллельного переноса они равны и, кроме того, являются центрально симметричными многогранниками. Отсюда и (4.21) следует, что у параллелепипеда T_0^* найдется вершина $x^{\text{ver}} \in T_0^{*\text{ver}}$, являющаяся внутренней точкой

$$x^{\text{ver}} \in (T_0 + t_x v_0)^{\text{int}} \quad (4.22)$$

параллелепипеда $T_0 + t_x v_0$. Более того, из (4.17) и (4.22) вытекает, что вершина x^{ver} параллелепипеда T_0^* будет еще и внутренней точкой (4.16) параллелоэдра T . □

Теперь применяя лемму 4.2 сможем доказать следующее утверждение.

Лемма 4.3. Пусть выполнены условия леммы 4.1 и $\mathcal{T}_{\text{Тор}}(v, \mu)$ – множество (3.28), состоящее из орбит $S^i(T_k)$, $i = 0, 1, \dots, m_k - 1$, базисных параллелепипедов T_k , $k = 0, 1, \dots, d$. Тогда имеет место свойство

$$S^i(T_k)^{\text{int}} \cap S^{i'}(T_{k'})^{\text{int}} \neq \emptyset \Leftrightarrow i = i' \text{ и } k = k', \quad (4.23)$$

где индекс int обозначает внутренность множеств.

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Предположим, что

$$S^i(T_k)^{\text{int}} \cap S^{i'}(T_{k'})^{\text{int}} \neq \emptyset \quad (4.24)$$

для некоторых $i \neq i'$ и произвольных k, k' . Можем считать $i < i'$. Производя сдвиг S^{-i} тора \mathbb{T}_{μ}^d , из (4.24) получаем

$$T_k^{\text{int}} \cap S^j(T_{k'})^{\text{int}} \neq \emptyset, \quad (4.25)$$

где $j = i' - i > 0$; и, тем более, то же самое будет

$$T^{\text{int}} \cap S^j(T_{k'})^{\text{int}} \neq \emptyset \quad (4.26)$$

для всего параллелоэдра $T = T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_d$. Тогда из леммы 4.2 будет следовать существование у параллелепипеда $S^j(T_{k'})$ вершины $x^{\text{ver}} \in S^j(T_{k'})^{\text{ver}}$, являющейся внутренней точкой

$$x^{\text{ver}} \in T^{\text{int}} \quad (4.27)$$

параллелоэдра T . Согласно определению орбит (3.27) вершины $S^j(T_{k'})^{\text{ver}}$ параллелепипеда $S^j(T_{k'})$ содержатся

$$S^j(T_{k'})^{\text{ver}} \subset \vec{G}_L^{\text{ver}} \quad (4.28)$$

среди вершин (3.25) фактор-графа \vec{G}_L . Поэтому из (4.28) и определения (1.20) вершин графа \vec{G} вытекает, что вершина x^{ver} может быть записана

$$x^{\text{ver}} = x(a) = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \dots + a_d v_d \quad (4.29)$$

через целые индексы $a = (a_0, a_1, \dots, a_d)$ веса $\mu a = a_0 \mu_0 + a_1 \mu_1 + \dots + a_d \mu_d$, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < \mu a \leq m - 1. \quad (4.30)$$

Вершины T^{ver} параллелоэдра T имеют вид

$$v_{\mathbf{i}} = x(a_{\mathbf{i}}) \quad (4.31)$$

с мультииндексами $\mathbf{i} \neq \emptyset$ и $\mathbf{i} \subset \mathcal{D}$. Здесь $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, d\}$, знак " \subset " обозначает строгое включение и индекс

$$a_{\mathbf{i}} = (a_{\mathbf{i},0}, a_{\mathbf{i},1}, \dots, a_{\mathbf{i},d}) \quad (4.32)$$

имеет координаты

$$a_{\mathbf{i},k} = 0 \quad \text{или} \quad 1, \quad (4.33)$$

при этом, согласно неравенствам (4.30), выполнены ограничения

$$a_{\mathbf{i}} \neq (0, 0, \dots, 0), \quad a_{\mathbf{i}} \neq (1, 1, \dots, 1).$$

Координаты весового вектора μ не ранжированы. Поэтому используя данную симметрию и ограничения (4.30), (4.33) можем считать, что внутренняя точка $x^{\text{ver}} = x(a) \in T^{\text{int}}$ из (4.16), (4.29) имеет индекс одного из двух следующих видов:

$$a^{\geq 2} = (a_0^{\geq 2}, a_1^{\leq 0}, a_2, \dots, a_d) \quad (4.34)$$

с координатами $a_0^{\geq 2} \geq 2, a_1^{\leq 0} \leq 0$; или

$$a^{\leq -1} = (a_0^{\leq -1}, a_1^{> 0}, a_2, \dots, a_d) \quad (4.35)$$

с координатами $a_0^{\leq -1} \leq -1$, $a_1^{>0} > 0$, а остальные координаты a_2, \dots, a_d в (4.34), (4.35) как-то подстраиваются под первые, удовлетворяя неравенствам (4.30). Напомним, что в (4.34), (4.35) все координаты – целые числа.

Далее случаи (4.34) и (4.35) будем разбирать по отдельности.

Случай индекса $a \geq 2$. В пространстве \mathbb{R}^d рассмотрим гиперплоскость

$$p_{2,\dots,d} = p_{2,\dots,d}^0 + v_0, \quad (4.36)$$

получающуюся из гиперплоскости

$$p_{2,\dots,d}^0 = \{\lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_d v_d; \lambda_2, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}\}, \quad (4.37)$$

сдвигом на вектор v_0 . Согласно определению 1.1 звезды v ее лучи v_0 и v_1 находятся по разные стороны от гиперплоскости $p_{2,\dots,d}^0$. Введем обозначения для соответствующих полупространств $p_{2,\dots,d}^{\pm 0}$, полагая

$$v_0 \in p_{2,\dots,d}^{-0}, \quad v_1 \in p_{2,\dots,d}^{+0}, \quad p_{2,\dots,d}^{-0} \cap p_{2,\dots,d}^{+0} = p_{2,\dots,d}^0. \quad (4.38)$$

Из соглашения (4.38) и определения (1.10) следует, что параллелепипед T полностью содержится

$$T \subset p_{2,\dots,d}^+ \quad (4.39)$$

в полупространстве $p_{2,\dots,d}^+ = p_{2,\dots,d}^{+0} + v_0$.

Представим точку

$$x^{\text{ver}} = x(a \geq 2) = a_0^{\geq 2} v_0 + a_1^{\leq 0} v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_d v_d \quad (4.40)$$

с индексом (4.34) в виде

$$x^{\text{ver}} = x(a \geq 2) = [(a_2 v_2 + \dots + a_d v_d) + v_0] + [(a_0^{\geq 2} - 1)v_0] + a_1^{\leq 0} v_1. \quad (4.41)$$

Используя (4.36) и (4.37) получаем включение

$$(a_2 v_2 + \dots + a_d v_d) + v_0 \in p_{2,\dots,d}, \quad (4.42)$$

затем согласно первому включению из (4.38) и неравенству $a_0^{\geq 2} - 1 \geq 1$ имеем включение

$$[(a_2 v_2 + \dots + a_d v_d) + v_0] + [(a_0^{\geq 2} - 1)v_0] \in p_{2,\dots,d}^- \setminus p_{2,\dots,d}^0$$

и, наконец, в силу второго включения из (4.38) и неравенства $a_1^{\leq 0} \leq 0$ приходим к включению

$$\{[(a_2 v_2 + \dots + a_d v_d) + v_0] + [(a_0^{\geq 2} - 1)v_0]\} + a_1^{\leq 0} v_1 \in p_{2,\dots,d}^- \setminus p_{2,\dots,d}^0. \quad (4.43)$$

По (4.39) параллеледр T содержится в полупространстве $p_{2,\dots,d}^+ = p_{2,\dots,d}^{+0} + v_0$, что вместе с включением (4.43) означает

$$x^{\text{ver}} = x(a^{\geq 2}) \notin T. \quad (4.44)$$

Итак, мы получили противоречие с включением (4.16) и, тем самым, доказали лемму 4.3 для случая индекса (4.34).

Случай индекса $a^{\leq -1}$. Теперь вместо (4.36) будем рассматривать гиперплоскость

$$p_{2,\dots,d} = p_{2,\dots,d}^0 + v_1. \quad (4.45)$$

Сохраняя соглашения (4.38) получаем, что параллеледр T содержится

$$T \subset p_{2,\dots,d}^- \quad (4.46)$$

в полупространстве $p_{2,\dots,d}^- = p_{2,\dots,d}^{-0} + v_1$. Аналогично (4.40), (4.42) представим точку

$$x^{\text{ver}} = x(a^{\leq -1}) = a_0^{\leq -1} v_0 + a_1^{> 0} v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_d v_d \quad (4.47)$$

с индексом (4.35) в виде

$$x^{\text{ver}} = x(a^{\leq -1}) = [(a_2 v_2 + \dots + a_d v_d) + v_1] + [(a_0^{> 0} - 1)v_1] + a_0^{\leq -1} v_0. \quad (4.48)$$

Вспоминая (4.45) получаем включение

$$(a_2 v_2 + \dots + a_d v_d) + v_1 \in p_{2,\dots,d},$$

затем по второму включению из (4.38) и неравенству $a_0^{> 0} - 1 \geq 0$ имеем включение

$$[(a_2 v_2 + \dots + a_d v_d) + v_1] + [(a_0^{> 0} - 1)v_1] \in p_{2,\dots,d}^+$$

и, наконец, в силу первого включения из (4.38) и неравенства $a_0^{\leq -1} \leq -1$ приходим к включению

$$\{[(a_2 v_2 + \dots + a_d v_d) + v_1] + [(a_0^{> 0} - 1)v_1]\} + a_0^{\leq -1} v_0 \in p_{2,\dots,d}^+ \setminus p_{2,\dots,d}. \quad (4.49)$$

Согласно (4.46) параллеледр T содержится в полупространстве $p_{2,\dots,d}^- = p_{2,\dots,d}^{-0} + v_1$, что вместе с включением (4.49) означает

$$x^{\text{ver}} = x(a^{\leq -1}) \notin T. \quad (4.50)$$

Мы снова получили противоречие с включением (4.16) и, тем самым, доказали лемму 4.3 и для оставшегося случая индекса (4.35). \square

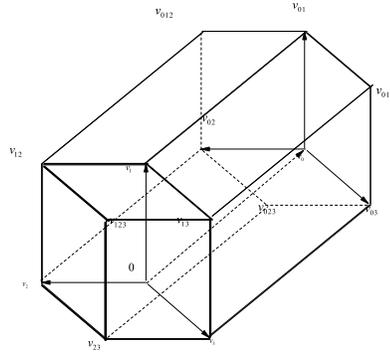


Рис. 4.1. Параллелоэдр $T = T_0 \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3$ размерности $d = 3$.

На рис. 4.1, 4.2 и 4.3 показана схема доказательства леммы 4.3 для разбиений размерности $d = 3$.

На рис. 4.1 изображен трехмерный параллелоэдр $T = T_0 \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3$ со звездой $v = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ и вершинами v_k , $v_{kl} = v_k + v_l$, $v_{klm} = v_k + v_l + v_m$, имеющими индексы $0 \leq k, l, m \leq 3$.

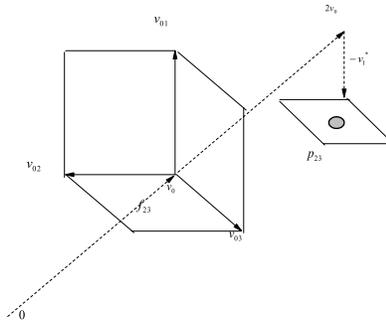


Рис. 4.2. Случай индекса $a \geq 2$.

Случай индекса $a \geq 2$ представлен на рис. 4.2, где через f_{23} обозначена грань параллелепедра T , проходящая через вершины v_0, v_{02}, v_{03} , $-v_1^* = a_1^{\leq 0} v_1$ – вектор с коэффициентом $a_1^{\leq 0}$ из (4.34), p_{23} – гиперплоскость (4.36) и жирным кружком "о" – точка $x^{\text{ver}} = x(a \geq 2)$ из (4.40).

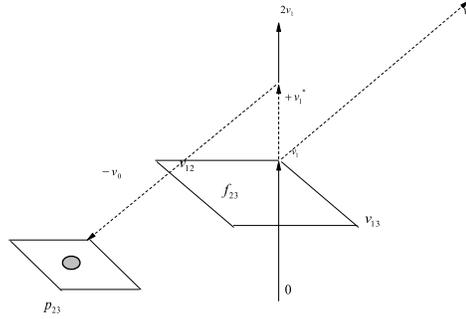


Рис. 4.3. Случай индекса $a \leq -1$.

Аналогично для случая индекса $a \leq -1$ через f_{23} обозначена грань параллелепедра T , проходящая через вершины v_1, v_{12}, v_{13} , $+v_1^* = a_1^{> 0} v_1$ – вектор с коэффициентом $a_1^{> 0}$ из (4.47), p_{23} – гиперплоскость (4.45) и жирным кружком "о" – точка $x^{\text{ver}} = x(a \leq -1)$ из (4.47).

§5. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РАЗБИЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА

5.1. Разбиение тора.

Определение 5.1. Скажем, что некоторое множество X разбивается на многогранники P_i для $i \in \mathcal{I}$, где \mathcal{I} – конечное или бесконечное множество индексов, если: 1) множество X покрывается $X = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} P_i$ многогранниками P_i ; 2) любые два многогранника P_i и $P_{i'}$ или совпадают $P_i = P_{i'}$, или не пересекаются во внутренних точках $P_i^{\text{int}} \cap P_{i'}^{\text{int}} = \emptyset$.

Предложение 5.1. В случае рационального весового вектора μ вида (3.1) с условиями (3.2), (3.3) объединение многогранников $\mathcal{T}_{\text{Тор}}(v, \mu)$, определенное в (3.28), представляет собою разбиение

$$\mathcal{T}_{\text{Тор}}(v, \mu) = \mathbb{T}_{\mu}^d \quad (5.1)$$

d -мерного тора $\mathbb{T}_\mu^d = \mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1}/L$ из (3.20).

Доказательство. Вытекает непосредственно из лемм 4.1 и 4.3. \square

5.2. Разбиение пространства. Заменяем упомянутый выше тор $\mathbb{T}_\mu^d = \mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1}/L$ его *разверткой* \mathbf{T}_μ^d . При такой замене, согласно определению (1.14), будет иметь место биекция

$$\mathbf{T}_\mu^d \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}_\mu^d : x \mapsto x \bmod L. \quad (5.2)$$

Используя данную биекцию, можем разбиение тора $\mathcal{T}_{\text{Тор}}(v, \mu)$ из (5.1) перенести на *разбиение*

$$\mathcal{T}_{\mathbf{T}}(v, \mu) = \mathbf{T}_\mu^d \quad (5.3)$$

развертки \mathbf{T}_μ^d . Хотя при таком переходе некоторые многогранники из разбиения $\mathcal{T}_{\text{Тор}}(v, \mu)$ могут оказаться разрезанными, но при отождествлении по $\bmod L$ они будут обратно склеиваться.

Из этого замечания и предложения 5.1 вытекает

Предложение 5.2. *В условиях предложения 5.1 объединение многогранников*

$$\mathcal{T}_L(v, \mu) = \bigcup_{l \in L} \mathcal{T}_{\mathbf{T}}(v, \mu)[l], \quad (5.4)$$

где $\mathcal{T}_{\mathbf{T}}(v, \mu)[l] = \mathcal{T}_{\mathbf{T}}(v, \mu) + l$ и L — полная \mathbb{Z} -решетка размерности d , определенная в (3.5), является периодическим по $\bmod L$ разбиением пространства \mathbb{R}^d , отождествленного $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1}$ с гиперплоскостью $\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1}$ из (2.8). \square

Определим *вершины* $\mathcal{T}_L(v, \mu)^{\text{ver}}$ разбиения $\mathcal{T}_L(v, \mu)$ как вершины всех составляющих его многогранников. Из доказательства предложения 5.2, вытекает равенство множеств вершин

$$\mathcal{T}_L(v, \mu)^{\text{ver}} = \vec{G}^{\text{ver}} \quad (5.5)$$

данного разбиения и графа \vec{G} . Скажем, что отмеченный параллелепипед $T_{k,i}$ *вкладывается*

$$x : T_{k,i} \hookrightarrow \mathcal{T}_L(v, \mu) \quad (5.6)$$

(ср. с определением вложения графов (1.40) в разбиение (5.4) в его вершине $x \in \mathcal{T}_L(v, \mu)^{\text{ver}}$, если выполняется включение

$$T_{k,i} + (x - v_i) \subset \mathcal{T}_L(v, \mu), \quad (5.7)$$

означающее, что в вершине x присутствует параллелепипед P разбиения $\mathcal{T}_L(v, \mu)$, получающийся параллельным сдвигом параллелепипеда $T_{k,i}$, переводящим его выделенную вершину $v_i \in T_{k,i}^{\text{ver}}$ в вершину x разбиения $\mathcal{T}_L(v, \mu)$.

Лемма 5.1. *В условиях предложения 5.1 имеет место равносильность вложений*

$$x : \vec{G}(T_{k,i}) \hookrightarrow \vec{G} \quad \Leftrightarrow \quad x : T_{k,i} \hookrightarrow \mathcal{T}_L(v, \mu) \quad (5.8)$$

графов многогранников (1.40) и самих многогранников (5.6).

Доказательство. Импликация “ \Rightarrow ” следует из доказательства предложения 5.2, а “ \Leftarrow ” – непосредственно из определений вложений (1.40) и (5.6). \square

Из предложения 5.2 и леммы 5.1 вытекает

Теорема 5.1. *В случае рационального весового вектора μ вида (3.1) с условиями (3.2), (3.3) и звезды v из (2.16) основная Теорема 1.1 справедлива.*

\square

§6. НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ РАЗБИЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА

6.1. Весовой вектор общего положения. Скажем, что весовой вектор $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_d)$ из (1.6) является *вектором общего положения*, если

$$\text{координаты } \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_d \text{ линейно независимы над кольцом } \mathbb{Z} \quad (6.1)$$

(ср. с определением (3.41), (3.42)). В случае вектора общего положения μ множество точек $a = (a_0, a_1, \dots, a_d)$ из решетки \mathbb{Z}^{d+1} с условием

$$\mu a = \mu \cdot a = a_0 m_0 + a_1 m_1 + \dots + a_d m_d = 0 \quad (6.2)$$

будет состоять из единственной точки $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$, а

$$\mu a = \mu \cdot a = a_0 m_0 + a_1 m_1 + \dots + a_d m_d = 1 \quad (6.3)$$

в силу нормирующего условия (1.7) – из единственной точки $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$. Поэтому имеем

$$\vec{\mathcal{G}}^{\text{ver}} \cap \mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1} = \{\mathbf{0}\}, \quad \vec{\mathcal{G}}^{\text{ver}} \cap (\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1} + \mathbf{1}) = \{\mathbf{1}\}, \quad (6.4)$$

где $\vec{\mathcal{G}}^{\text{ver}} = \mathbb{Z}_{\mu}^{d+1}$ – вершины единичного графа (2.3) и $\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1}$ – гиперплоскость (2.8). Отсюда следует, что для любого $\epsilon > 0$ найдется радиус $R = R_{\epsilon}$ такой, что будут выполняться равенства

$$\vec{\mathcal{G}}_R^{\text{ver}} \cap (\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1})_{\epsilon} = \{\mathbf{0}\}, \quad \vec{\mathcal{G}}_R^{\text{ver}} \cap (\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1} + \mathbf{1})_{\epsilon} = \{\mathbf{1}\}. \quad (6.5)$$

Здесь через

$$\vec{\mathcal{G}}_R^{\text{ver}} = \vec{\mathcal{G}}^{\text{ver}} \cap O_R \quad (6.6)$$

обозначили множество вершин $a = (a_0, a_1, \dots, a_d)$ графа $\vec{\mathcal{G}}$, содержащиеся в шаре O_R радиуса R , измеряемого в 1-метрике

$$|a|_1 = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_d| \leq R; \quad (6.7)$$

а через $(\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1})_{\epsilon}$ и $(\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1} + \mathbf{1})_{\epsilon}$ обозначили ϵ -окрестности гиперплоскостей $\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1}$ и $\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1} + \mathbf{1}$, задаваемых соответственно неравенствами

$$-\epsilon \leq \mu a \leq \epsilon, \quad -\epsilon \leq \mu(a + \mathbf{1}) \leq \epsilon. \quad (6.8)$$

Условимся, что радиус $R = R_{\epsilon}$ выбирается максимально возможным с сохранением свойств (6.5). Тогда из (6.2) и (6.3) вытекает

$$R = R_{\epsilon} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (6.9)$$

Далее мы собираемся аппроксимировать $\vec{\mathcal{G}} = \vec{\mathcal{G}}_{\mu}$ периодическим единичным графом $\vec{\mathcal{G}}' = \vec{\mathcal{G}}_{\mu'}$ с рациональным весовым вектором μ' , близким к вектору общего положения μ в 1-метрике (6.7):

$$|\mu' - \mu|_1 \leq \theta_{\epsilon}. \quad (6.10)$$

Из равенств (6.5) и (6.8) следует, что при достаточно малом $\theta_{\epsilon} > 0$, где

$$\theta_{\epsilon} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (6.11)$$

будет иметь место совпадение

$$\vec{\mathcal{G}}'_R = \vec{\mathcal{G}}_R \quad (6.12)$$

R -окрестностей (6.6) единичных графов $\vec{\mathcal{G}}$ и $\vec{\mathcal{G}}'$.

Применяя предложение 2.1 и теорему 2.1, от единичных графов $\vec{\mathcal{G}}$ и $\vec{\mathcal{G}}'$ перейдем к их проекциям – звездным графам $\vec{G} = \vec{G}_{v,\mu}$ и $\vec{G}' = \vec{G}_{v',\mu'}$, построенных соответственно на звездах

$$v = \text{pr}_{\pi}\varepsilon, \quad v' = \text{pr}'_{\pi}\varepsilon. \quad (6.13)$$

Здесь pr_π и pr'_π обозначают проекции (2.16) единичного базиса $\varepsilon = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d\}$ на гиперплоскости $\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1}$ и $\mathbb{R}_{\mu',0}^{d+1}$ с одной и той же произвольной точкой π из внутренности симплекса $\Delta_\varepsilon^{\text{int}}$ (см. определение (2.7)). Из (6.11) для звезд (6.13) вытекает неравенство

$$|v' - v|_1 = \max_{0 \leq k \leq d} |v'_k - v_k|_1 \leq \zeta_\epsilon \quad (6.14)$$

для некоторого $\zeta_\epsilon > 0$, также удовлетворяющего свойству

$$\zeta_\epsilon \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \epsilon \longrightarrow 0. \quad (6.15)$$

В предложении 5.2 было определено периодическое разбиение $\mathcal{T}(v', \mu') = \mathcal{T}_L(v', \mu')$ гиперплоскости $\mathbb{R}_{\mu',0}^{d+1}$, согласованное с графом $\vec{G}' \subset \mathbb{R}_{\mu',0}^{d+1}$. Последнее означает выполнение условий:

- 1) разбиение $\mathcal{T}(v', \mu')$ и граф \vec{G}' имеют одни и те же вершины и ребра;
- 2) все многогранники P' , образующие разбиение $\mathcal{T}(v', \mu')$, вкладываются (1.40) в граф \vec{G}' .

Каждый из многогранников P' получается параллельным сдвигом одного из параллелепипедов T'_k для $k = 0, 1, \dots, d$, построенных по звезде v' из (6.13).

Рассмотрим R -окрестности $\vec{G}_R = \vec{G} \cap O_R$, $\vec{G}'_R = \vec{G}' \cap O_R$ звездных графов \vec{G} , \vec{G}' и соответствующую часть $\mathcal{T}(v', \mu')_R$ разбиения $\mathcal{T}(v', \mu')$. В силу (6.12), неравенства (6.14) и свойства (6.15) графы \vec{G}_R и \vec{G}'_R будут r_ϵ -согласованы: между их вершинами существует такая биекция

$$\iota: \vec{G}'_R^{\text{ver}} \ni x' \mapsto \iota(x') = x \in \vec{G}_R^{\text{ver}}, \quad (6.16)$$

что

$$|x' - x|_1 \leq r_\epsilon, \quad (6.17)$$

смежные вершины графа \vec{G}'_R отображаются в смежные вершины графа \vec{G}_R и обратно; при этом

$$r_\epsilon \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \epsilon \longrightarrow 0. \quad (6.18)$$

Пусть многогранник P' из разбиения $\mathcal{T}(v', \mu')_R$ вкладывается

$$x': P' \hookrightarrow \vec{G}'_R \quad (6.19)$$

в граф \vec{G}'_R в вершине $x' \in \vec{G}'_{R^{\text{ver}}}$. Тогда из (6.16)–(6.18) следует, что при достаточно малом $\epsilon > 0$ с условием (6.5) будет вкладываться

$$x : P \hookrightarrow \vec{G}_R \quad (6.20)$$

и соответствующий многогранник $P = \iota(P')$ в граф \vec{G}_R в вершине $x = \iota(x') \in \vec{G}_R^{\text{ver}}$. Здесь многогранник $P = \iota(P')$ имеет тот же скелет, что и P' с заменой звезды v' на звезду v . Причем получающиеся таким образом многогранники P , когда P' пробегает все многогранники из разбиения $\mathcal{T}(v', \mu')_R$, будут образовывать разбиение $\mathcal{T}(v, \mu)_R$ с графом \vec{G}_R .

6.2. Свойства инвариантности разбиений. Далее мы докажем свойства инвариантности разбиений $\mathcal{T}(v, \mu)_R$.

Лемма 6.1. *При достаточно малом $\epsilon > 0$ разбиение $\mathcal{T}(v, \mu)_R$ не зависит от выбора периодического единичного графа $\vec{G}' = \vec{G}'_{\mu'}$ с рациональным весовым вектором μ' из (6.10).*

Доказательство. Пусть $\vec{G}'' = \vec{G}''_{\mu''}$ будет другим единичным графом с рациональным весовым вектором μ'' , удовлетворяющим условию (6.10). Из (6.16), (6.17) следует, что звездные периодические графы \vec{G}'_R и \vec{G}''_R будут $2r_\epsilon$ -согласованными. В лемме 5.1 доказано, что звездные периодические графы однозначно определяют вложенные в них разбиения. Отсюда и (6.18) вытекает утверждение леммы 6.1. \square

Лемма 6.2. *Пусть $\epsilon > \epsilon^* > 0$ – достаточно малые значения, которым отвечают соответственно радиусы $R < R^*$, где $R^* = R_\epsilon$ и $R^* = R_{\epsilon^*}$. Тогда ограничение $(\mathcal{T}(v, \mu)_{R^*})_R$ разбиения $\mathcal{T}(v, \mu)_{R^*}$ радиусом R_ϵ совпадает*

$$(\mathcal{T}(v, \mu)_{R^*})_R = \mathcal{T}(v, \mu)_R \quad (6.21)$$

с разбиением $\mathcal{T}(v, \mu)_R$.

Доказательство. Повторяем схему доказательства леммы 6.1, используем лемму 5.1. \square

Лемма 6.3. *В случае весового вектора μ общего положения (6.1) существует бесконечное разбиение*

$$\mathcal{T}_{\text{irr}}(v, \mu) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{T}(v, \mu)_{R_\epsilon} \quad (6.22)$$

пространства \mathbb{R}^{d+1} , не зависящее от выбора периодических единичных графов $\vec{\mathcal{G}}' = \vec{\mathcal{G}}_{\mu'}$ с рациональными весовыми векторами μ' с условиями (6.7).

Доказательство. Вытекает из лемм 6.1 и 6.2. \square

Лемма 6.4. В условиях леммы 6.3 имеет место равносильность вложений

$$x : \vec{G}(T_{k,i}) \hookrightarrow \vec{G} \iff x : T_{k,i} \hookrightarrow \mathcal{T}_{\text{irr}}(v, \mu) \quad (6.23)$$

графов многогранников (1.40) и самих многогранников (5.6).

Доказательство. Вытекает из лемм 5.1 и 6.3. \square

Из предложения 5.1 и лемм 6.3, 6.4 вытекает

Теорема 6.1. В случае весового вектора μ общего положения (6.1) и звезды v из (2.16) основная теорема 1.1 справедлива. \square

§7. РАЗБИЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА СМЕШАННОГО ТИПА

7.1. Весовой вектор смешанного типа. Определим ранг $\text{rank } \mu$ весового вектора $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_d)$ как максимальное число $r = \text{rank } \mu$ линейно независимых его координат

$$\mu_{\max} = \{\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_r}\} \subseteq \{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_d\} \quad (7.1)$$

над кольцом целых чисел \mathbb{Z} или, что равносильно – над полем рациональных чисел \mathbb{Q} . Из (7.1) и определения (1.6)–(1.8) весового вектора μ для ранга $\text{rank } \mu$ следуют неравенства

$$1 \leq \text{rank } \mu \leq d + 1. \quad (7.2)$$

В случае рационального (3.1)–(3.3) весового вектора μ выполняется равенство $\text{rank } \mu = 1$, а в случае вектора общего положения (6.1) – равенство $\text{rank } \mu = d + 1$.

Скажем, что весовой вектор μ является *вектором смешанного типа*, если его ранг удовлетворяет неравенствам

$$1 < \text{rank } \mu < d + 1. \quad (7.3)$$

Лемма 7.1. Если весовой вектор μ имеет ранг $r = \text{rank } \mu$, то множество точек $a = (a_0, a_1, \dots, a_d)$ из решетки \mathbb{Z}^{d+1} с условием

$$\mu a = \mu \cdot a = a_0 \mu_0 + a_1 \mu_1 + \dots + a_d \mu_d = 0 \quad (7.4)$$

образует \mathbb{Z} -подрешетку

$$L_{\text{mix}} = L_\mu = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_\rho] \subset \mathbb{Z}^{d+1} \quad (7.5)$$

размерности $\rho = \dim L_{\text{mix}}$, где

$$\dim L_{\text{mix}} = d + 1 - r \quad (7.6)$$

и векторы $\{l_1, \dots, l_\rho\} \subset \mathbb{Z}^{d+1}$ образуют базис решетки L_{mix} .

Доказательство. С помощью унимодулярных элементарных преобразований – сложений, вычитаний и перестановок координат – весовой вектор μ можно преобразовать к приведенному виду

$$\mu^* = \underbrace{(0, \dots, 0, \mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_r})}_{d+1}. \quad (7.7)$$

В этом случае все утверждения леммы становятся очевидными. \square

7.2. Разбиения смешанного типа. Используя лемму 7.1, аналогично (6.4) имеем

$$\vec{\mathcal{G}}^{\text{ver}} \cap \mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1} = L_{\text{mix}}, \quad \vec{\mathcal{G}}^{\text{ver}} \cap (\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1} + \mathbf{1}) = L_{\text{mix}} + \mathbf{1}. \quad (7.8)$$

Здесь $\vec{\mathcal{G}}^{\text{ver}} = \mathbb{Z}_\mu^{d+1}$ – вершины единичного графа (2.3) и $\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1}$ – гиперплоскость (2.8). Из определения (7.5) решетки L_{mix} следует, что для любого $\epsilon > 0$ найдется радиус $R = R_\epsilon$ такой, что будут выполняться равенства

$$\vec{\mathcal{G}}_R^{\text{ver}} \cap (\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1})_\epsilon = L_{\text{mix}}, \quad \vec{\mathcal{G}}_R^{\text{ver}} \cap (\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1} + \mathbf{1})_\epsilon = L_{\text{mix}} + \mathbf{1}, \quad (7.9)$$

где $\vec{\mathcal{G}}_R^{\text{ver}} = \vec{\mathcal{G}}^{\text{ver}} \cap O_R$ и $(\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1})_\epsilon, (\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1} + \mathbf{1})_\epsilon$ – ϵ -окрестности гиперплоскостей $\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1}$ и $\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1} + \mathbf{1}$, задаваемые соответственно неравенствами (6.8). Снова условимся выбирать радиус $R = R_\epsilon$ максимально возможным с сохранением свойств (7.9).

В случае весового вектора μ смешанного типа (7.3) единичный граф $\vec{\mathcal{G}} = \vec{\mathcal{G}}_\mu$ будем аппроксимировать периодическим единичным графом $\vec{\mathcal{G}}'_{\text{mix}} = \vec{\mathcal{G}}_{\text{mix},\mu'}$ с рациональным весовым вектором μ' , близким

$$|\mu' - \mu|_1 \leq \theta_\epsilon \quad (7.10)$$

к вектору μ в 1-метрике (6.7) и ортогональным

$$\mu' \perp L_{\text{mix}} \quad (7.11)$$

решетке L_{mix} . Согласно построению (7.5) данная решетка вложена

$$L_{\text{mix}} \subset_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1} \quad (7.12)$$

в гиперплоскость $\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1}$ рациональным образом, т.е. над полем \mathbb{Q} , поэтому требования (7.10) и (7.11) совместимы. Из равенств (7.9) и (6.8) следует, что при достаточно малом $\theta_\epsilon > 0$ будет иметь место совпадение

$$\vec{\mathcal{G}}'_{\text{mix},R} = \vec{\mathcal{G}}_R \quad (7.13)$$

R -окрестностей единичных графов $\vec{\mathcal{G}}$ и $\vec{\mathcal{G}}'_{\text{mix}}$.

Далее продолжая рассуждение по схеме, представленной в п. 6, получаем аналоги лемм 6.3 и 6.4.

Лемма 7.2. *В случае весового вектора μ смешанного типа (7.3) существует бесконечное разбиение*

$$\mathcal{T}_{\text{mix}}(v, \mu) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{T}(v, \mu)_{R_\epsilon} \quad (7.14)$$

пространства \mathbb{R}^{d+1} , не зависящее от выбора периодических единичных графов $\vec{\mathcal{G}}'_{\text{mix}} = \vec{\mathcal{G}}_{\text{mix},\mu'}$ с рациональными весовыми векторами μ' с условиями (7.10) и (7.11).

□

Лемма 7.3. *В условиях леммы 7.2 имеет место равносильность вложений*

$$x : \vec{\mathcal{G}}(T_{k,i}) \hookrightarrow \vec{\mathcal{G}} \Leftrightarrow x : T_{k,i} \hookrightarrow \mathcal{T}_{\text{mix}}(v, \mu) \quad (7.15)$$

графов многогранников (1.40) и самих многогранников (5.6)).

□

Из предложения 5.2 и лемм 7.2, 7.3 вытекает

Теорема 7.1. *В случае весового вектора μ смешанного типа (7.3) и звезды v из (2.16) основная теорема 1.1 справедлива.*

□

§8. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗВЕЗД

8.1. Бариецентрические координаты. Пусть Δ_ε – замкнутый d -мерный симплекс, вершины которого есть концы векторов единичного базиса $\varepsilon = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d\}$ из (1.27), и пусть Δ_v – аналогичный замкнутый d -мерный *звездный симплекс*, построенный на концах векторов звезды $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$, получающейся проекцией $v = \text{pr}_\pi \varepsilon$ из (2.16), где π – произвольная точка из внутренней симплекса $\Delta_\varepsilon^{\text{int}}$. Вследствие предложения 2.1 определенное таким способом множество векторов v действительно образует звезду (см. определение 1.1).

Если $\mathbb{R}_{\Delta_\varepsilon}^{d+1}$ – гиперплоскость, содержащая симплекс Δ_ε , и $\mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1}$ – гиперплоскость (2.8), то проекция

$$\text{pr}_\pi : \mathbb{R}_{\Delta_\varepsilon}^{d+1} \longrightarrow \mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1} \quad (8.1)$$

будет невырожденным аффинным преобразованием. Рассмотрим ее ограничение

$$\text{pr}_\pi : \mathbb{R}^{d+1} \supset \Delta_\varepsilon \longrightarrow \Delta_v \subset \mathbb{R}_{\mu,0}^{d+1} \quad (8.2)$$

на симплексы. Итак, по определению имеем

$$\pi = \pi_0 \varepsilon_0 + \pi_1 \varepsilon_1 + \dots + \pi_d \varepsilon_d, \quad (8.3)$$

где

$$\pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_d = 1, \quad \pi_k > 0. \quad (8.4)$$

Поэтому точку π можем записать через ее *бариецентрические координаты*

$$\pi_\varepsilon = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d). \quad (8.5)$$

Поскольку $\text{pr}_\pi \pi = \mathbf{0}$, то из (8.3) получаем представление

$$\mathbf{0} = \pi_0 v_0 + \pi_1 v_1 + \dots + \pi_d v_d \quad (8.6)$$

для точки $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ – центра звезды v и, значит, она имеет те же бариецентрические координаты

$$\mathbf{0}_v = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d), \quad (8.7)$$

что и точка π , но уже относительно звезды v или, точнее, – относительно симплекса Δ_v . Бариецентрические координаты $\mathbf{0}_v$ центра звезды v назовем *типом* звезды.

Сделаем некоторые выводы:

1) из (8.6) и условий (8.4) следует включение $\mathbf{0} \in \Delta_v$, которое в силу критерия 1.1 подтверждает, что проекция $v = \text{pr}_\pi \varepsilon$ есть звезда;

2) кроме того, из разложений (8.5) и (8.7) вытекает сохранение барицентрических координат при проектировании (8.2).

8.2. Типы звезд и их эквивалентность. Будем говорить, что две звезды v и v' *аффинно эквивалентны* или, просто, – *эквивалентны* и обозначать через $v \sim v'$, если $v' = Av$ для некоторого преобразования A из вещественной группы аффинных преобразования $\text{GL}_d(\mathbb{R})$ размерности d .

Лемма 8.1. *Имеет место следующая равносильность*

$$v \sim v' \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{0}_v = \mathbf{0}_{v'}. \quad (8.8)$$

Доказательство. Импликация “ \Rightarrow ” доказывается аналогично (8.3)–(8.7).

Обратно, пусть звезды v и v' имеют один и тот же тип $\mathbf{0}_v = \mathbf{0}_{v'} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d)$. Отсюда и (8.7) вытекают разложения

$$v_0 = -\frac{\pi_1}{\pi_0}v_1 - \dots - \frac{\pi_d}{\pi_0}v_d, \quad v'_0 = -\frac{\pi_1}{\pi_0}v'_1 - \dots - \frac{\pi_d}{\pi_0}v'_d \quad (8.9)$$

с одними и теми же координатами относительно множеств линейно независимых векторов v_1, \dots, v_d и v'_1, \dots, v'_d из пространства \mathbb{R}^d . Известно существование единственного аффинного преобразования A из группы $\text{GL}_d(\mathbb{R})$ с условием $v'_k = Av_k$ для всех $k = 1, \dots, d$. Оно в силу разложений (8.9) будет обладать также свойством $v'_0 = Av_0$, что доказывает импликацию “ \Leftarrow ”. \square

В нашем распоряжении следующее множество

$$V_{\text{pr}} = \bigcup_{\mu \in \Delta_\varepsilon^{\text{int}}} \bigcup_{\pi \in \Delta_\varepsilon^{\text{int}}} v_{\mu, \pi} \quad (8.10)$$

звезд

$$v = v_{\mu, \pi} = \text{pr}_\pi \varepsilon. \quad (8.11)$$

Здесь весовой вектор μ из (1.6)–(1.8) отождествляется с определяемой по его барицентрических координатам точкой из того же симплекса Δ_ε , что и направление π проекции pr_π на гиперплоскость $\mathbb{R}_{\mu, 0}^{d+1}$, определенной в (2.8). Поэтому звезда $v = v_{\mu, \pi}$ из (8.11) действительно зависит от двух указанных параметров μ и π .

Лемма 8.2. *Совокупность всех d -мерных звезд v (см. определение 1.1) образует множество*

$$V = \text{GL}_d(\mathbb{R}) V_{\text{pr}}. \quad (8.12)$$

Доказательство. Если v' принадлежит множеству V_{pr} из (8.10), то по предложению 2.1 v' будет звездой. Но тогда, по критерию 1.1, звездой будет и ее образ $v = Av'$ относительно любого аффинного преобразования A из группы $\text{GL}_d(\mathbb{R})$. Поэтому если $v \in V$, то v – звезда.

Обратно, пусть v – произвольная d -мерная звезда. Она имеет некоторый тип $\mathbf{0}_v = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d)$. Выберем точку $\pi \in \Delta_\varepsilon^{\text{int}}$ с теми же барицентрическими координатами (8.5) и рассмотрим проекцию $v' = \text{pr}_\pi \varepsilon$. По предложению 2.1 она является d -мерной звездой, имеющей тип $\mathbf{0}_{v'} = \mathbf{0}_v$ и принадлежащей множеству V_{pr} из (8.10). Тогда по лемме 8.1 будем иметь $v \sim v'$, т.е. $v = Av'$ для некоторого преобразования A из группы $\text{GL}_d(\mathbb{R})$. Следовательно, звезда v принадлежит множеству V . \square

8.3. Доказательство основной теоремы 1.1. Пусть $\mathcal{T}(v, \mu)$ – разбиение из основной теоремы 1.1. Из теорем 5.1, 6.1 и 7.1 следует ее справедливость

$$\mathcal{T}(v_{\text{pr}}, \mu) = \mathcal{T}_*(v_{\text{pr}}, \mu) \quad (8.13)$$

для произвольных весовых векторов μ и звезд v_{pr} , принадлежащих множеству V_{pr} , определенному в (8.10). Справа в равенстве (8.13) стоит одно из разбиений $\mathcal{T}_L(v, \mu)$, $\mathcal{T}_{\text{irr}}(v, \mu)$ или $\mathcal{T}_{\text{mix}}(v, \mu)$ соответственно из (5.4), (6.22) или (7.14) в зависимости от выбора типа весового вектора μ .

Возьмем любое аффинное преобразование A из группы $\text{GL}_d(\mathbb{R})$. Тогда согласно определению (1.45) выполняется равенство

$$A\mathcal{T}(v_{\text{pr}}, \mu) = \mathcal{T}(Av_{\text{pr}}, \mu). \quad (8.14)$$

Здесь под $A\mathcal{T}(v_{\text{pr}}, \mu)$ понимается разбиение, получающееся из разбиения $\mathcal{T}(v_{\text{pr}}, \mu)$ посредством аффинного отображения $x \mapsto Ax$ пространства \mathbb{R}^d . Теперь сопоставляя равенства (8.13) и (8.15), можем записать представление

$$\mathcal{T}(v, \mu) = A\mathcal{T}_*(v_{\text{pr}}, \mu) \quad (8.15)$$

разбиения $\mathcal{T}(v, \mu)$ из основной теоремы 1.1 для случая звезд вида $v = Av_{\text{pr}}$ через специальные разбиения (5.4), (6.22) и (7.14). Перебрав все аффинные преобразования $A \in \text{GL}_d(\mathbb{R})$ и звезды $v_{\text{pr}} \in V_{\text{pr}}$, в согласии с леммой 8.2 можно получить произвольную звезду $v \in V$. Отсюда и представления (8.15) вытекает утверждение основной теоремы 1.1. \square

Замечание 8.1. Разбиения $\mathcal{T}(v, \mu)$ пространства \mathbb{R}^d , определенные в основной теореме 1.1, называются **универсальными ядерными разбиениями**.

Как указано во введении, все эти разбиения содержат $\text{Kг} \subset \mathcal{T}(v, \mu)$ ядро $\text{Kг} = T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_d$, состоящее из всех видов параллелепипедов T_0, T_1, \dots, T_d , из которых образуются разбиения $\mathcal{T}(v, \mu)$. Само ядро Kг однозначно определяется $\text{Kг} = \text{Kг}_v$ звездой v и характеризуется тремя свойствами (0.3)–(0.5).

Термин **универсальные разбиения** означает, что параметры разбиений v – звезда (1.3) и μ – весовой вектор (1.6) выбираются 1) произвольно и 2) независимо друг от друга.

§9. КАНОНИЧЕСКИЕ ЗВЕЗДЫ И ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ РАЗБИЕНИЙ

В п. 10 будут приведены примеры конкретных ядерных разбиений $\mathcal{T}(v, \mu)$. Чтобы классифицировать такие разбиения до эквивалентности относительно преобразований из аффинной группы $\text{GL}_d(\mathbb{R})$, мы введем для разбиений $\mathcal{T}(v, \mu)$ удобную параметризацию.

9.1. Канонические звезды. Ядерные разбиения $\mathcal{T}(v, \mu)$ и $\mathcal{T}(v', \mu')$ назовем *эквивалентными* и обозначим через $\mathcal{T}(v, \mu) \sim \mathcal{T}(v', \mu')$, если $\mathcal{T}(v', \mu') = A\mathcal{T}(v, \mu)$ для некоторого преобразования $A \in \text{GL}_d(\mathbb{R})$. Из представления (8.15) следует, что это возможно только в случае, когда имеют место равенства $v' = Av$ и $\mu' = \mu$. Поэтому при изучении ядерных разбиений $\mathcal{T}(v, \mu)$ можно ограничиться звездами v из фактор-множества

$$V_{\text{can}} = \text{GL}_d(\mathbb{R}) \setminus V. \quad (9.1)$$

Поскольку любые два базиса пространства \mathbb{R}^d эквивалентны относительно группы преобразований $\text{GL}_d(\mathbb{R})$, то в качестве фактор-множества (9.1) можно выбрать множество, состоящее из *канонических звезд*

$$v_{\text{can}} = (v_0, v_1, \dots, v_d) = (x, -e_1, \dots, -e_d), \quad (9.2)$$

где

$$e_1 = (1, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_d = (0, \dots, 1) \quad (9.3)$$

единичный базис пространства \mathbb{R}^d (ср. с базисом (1.27)) и $x = (x_1, \dots, x_d)$ содержится в d -мерном симплексе

$$\Delta_1 = \Delta_1^d = \{x \in \mathbb{R}^d; \quad 0 < x_d \leq \dots \leq x_1 \leq 1\}. \quad (9.4)$$

9.2. Каноническая параметризация. В силу (1.6)–(1.8) весовой вектор $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_d)$ содержится в симплексе

$$\Delta_2 = \Delta_2^{d+1} = \{\mu \in \mathbb{R}^{d+1}; \mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_d = 1, \mu_k > 0\}. \quad (9.5)$$

Определим *почти прямое произведение*

$$\Delta_1 \times \Delta_2 = \bigcup_{x \in \Delta_1} x \times \Delta_2/x \quad (9.6)$$

симплексов (9.4) и (9.5) следующим образом. Если $x = (x_1, \dots, x_d)$ из Δ_1 имеет координаты $x_{k_1} = \dots = x_{k_s}$, то μ , входящая в фактормножество Δ_2/x , должно иметь соответственно координаты $\mu_{k_1} \leq \dots \leq \mu_{k_s}$. Включение

$$\Delta_1^{\text{int}} \times \Delta_2 \subset \Delta_1 \times \Delta_2 \quad (9.7)$$

объясняет название произведения (9.6).

Используя данное произведение, введем для разбиений $\mathcal{T}(v, \mu)$ из (1.45) *каноническую параметризацию*

$$\mathcal{T}(x, \mu) = \mathcal{T}(v_x, \mu) \quad (9.8)$$

с параметрами $(x, \mu) \in \Delta_1 \times \Delta_2$, где $v_x = v_{\text{can}}$ – каноническая звезда (9.2). Можно показать, что параметризация (9.8) обладает свойством:

$$\mathcal{T}(x, \mu) \sim \mathcal{T}(x', \mu') \Leftrightarrow (x, \mu) = (x', \mu'). \quad (9.9)$$

§10. ПРИМЕРЫ ДВУМЕРНЫХ ЯДЕРНЫХ РАЗБИЕНИЙ

10.1. Периодическое ядерное разбиение. Периодическое разбиение $\mathcal{T}_L(v, \mu)$ размерности $d = 2$, определенное в (5.4), будем строить на основе рационального весового вектора

$$\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2) = \left(\frac{m_0}{m}, \frac{m_1}{m}, \frac{m_2}{m} \right) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6} \right), \quad (10.1)$$

удовлетворяющего условиям (3.2) и (3.3), и канонической звезды

$$v = v_{\text{can}} = (v_0, v_1, v_2) = (x, -e_1, -e_2), \quad (10.2)$$

где $x = (x_1, x_2) = (0.5, 0.2)$ содержится в двумерном симплексе $\Delta_1 = \Delta_1^2$ из (9.4). Решая в целых числах уравнение

$$a_0 m_0 + a_1 m_1 + a_2 m_2 = 1 a_0 + 2 a_1 + 3 a_2 = 0 \quad (10.3)$$

(см. (3.6) и (3.7)) находим для разбиения $\mathcal{T}_L(v, \mu)$ его решетку периодов

$$L = \mathbb{Z}[l_1, l_2] \subset \mathbb{Z}^3 \quad (10.4)$$

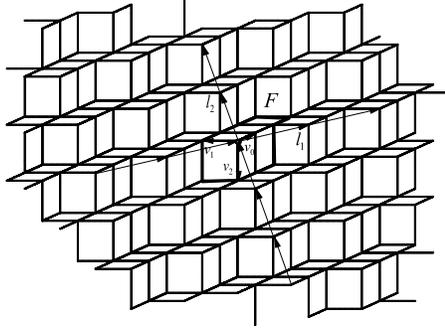


Рис. 10.1. Периодическое ядерное разбиение $\mathcal{T}_L(v, \mu)$.

с базисом $l_1 = (2, -1, 0)$, $l_2 = (1, 1, -1)$. Решетка L содержится в гиперплоскости $\mathbb{R}_{\mu,0}^3$ из (2.8), поэтому данный базис можно также записать

$$l_1 = 2v_0 - v_1, \quad l_2 = v_0 + v_1 - v_2 \quad (10.5)$$

в индексной форме (1.21) через лучи звезды (10.2).

Используя весовой вектор μ и звезду v из (10.1) и (10.2), строится по алгоритму (1.45) периодическое ядерное разбиение $\mathcal{T}_L(v, \mu)$, изображенное на рис. 10.1, на котором указаны базисные векторы l_1, l_2 из (10.5). Ядро

$$\text{Kp} = \text{Kp}(\mathcal{T}_L(v, \mu)) = T_0 \cup T_1 \cup T_2 \quad (10.6)$$

разбиения $\mathcal{T}_L(v, \mu)$ состоит из параллелограммов (1.9) без общих внутренних точек. Фундаментальная область $F = \mathbb{R}^2/L$ решетки L выделена жирной чертой. В эту область параллелограммы T_0, T_1 и T_2 входят $m_0 = 1$, $m_1 = 2$ и $m_2 = 3$ раз в соответствии весовым вектором (10.1). Отсюда будет следовать, что *частоты*

$$\nu_0 = \frac{1}{6}, \quad \nu_1 = \frac{2}{6}, \quad \nu_2 = \frac{3}{6} \quad (10.7)$$

появления данных параллелограммов в периодическом разбиении $\mathcal{T}_L(v, \mu)$ равны координатам весового вектора μ из (10.1).

10.2. Ядерное разбиение смешанного типа.

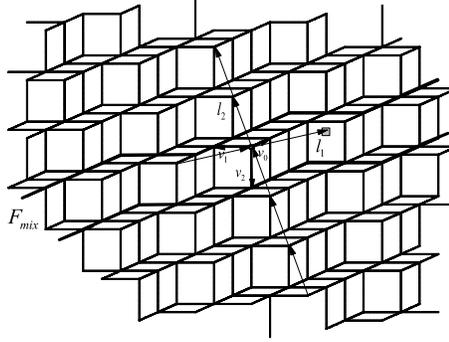


Рис. 10.2. Ядерное разбиение смешанного типа $\mathcal{T}_{\text{mix}}(v, \mu_{\text{mix}})$.

Определенное в (7.14) разбиение смешанного типа $\mathcal{T}_{\text{mix}}(v, \mu_{\text{mix}})$ будем строить с помощью прежней звезды v из (10.2) и нового весового вектора

$$\mu_{\text{mix}} = (\mu_{\text{mix},0}, \mu_{\text{mix},1}, \mu_{\text{mix},2}), \quad (10.8)$$

получаемого из рационального вектора (10.1) малым возмущением

$$\mu_{\text{mix},0} = \frac{\mu_0}{1+2\xi}, \quad \mu_{\text{mix},1} = \frac{\mu_1 + \xi}{1+2\xi}, \quad \mu_{\text{mix},2} = \frac{\mu_2 + \xi}{1+2\xi}.$$

Если в качестве малого параметра выбрать $\xi = \pi/100 \approx 0,0314$, то μ_{mix} будет вектором смешанного типа, поскольку при таком выборе его ранг $\text{rang } \mu_{\text{mix}} = 2$ удовлетворяет неравенствам (7.3). По лемме 7.1 уравнение (10.3) заменится на

$$a_0\mu_{\text{mix},0} + a_1\mu_{\text{mix},1} + a_2\mu_{\text{mix},2} = 0, \quad (10.9)$$

поэтому для разбиения $\mathcal{T}_{\text{mix}}(v, \mu_{\text{mix}})$ решеткой периодов будет одномерная решетка

$$L_{\text{mix}} = \mathbb{Z}[l_{\text{mix},1}] \subset L \subset \mathbb{Z}^3, \quad (10.10)$$

у которой сохраняется базисный вектор $l_{\text{mix},1} = l_2 = v_0 + v_1 - v_2$ решетки L из (10.4).

На рис. 10.2 изображено разбиение смешанного типа $\mathcal{T}_{\text{mix}}(v, \mu_{\text{mix}})$, построенное по алгоритму (1.45). На нем серым квадратиком указано

нарушение трансляционной симметрии относительно вектора $l_1 \in L$ и сохранение относительно общего вектора $l_{\text{mix},1} = l_2$ решеток L_{mix} и L . Поэтому для разбиения $\mathcal{T}_{\text{mix}}(v, \mu_{\text{mix}})$ изменится фундаментальная область $F_{\text{mix}} = \mathbb{R}^2/L_{\text{mix}}$: теперь она становится бесконечной ступенчатой полосой.

Каковы частоты появления параллелограммов T_0 , T_1 и T_2 в бесконечной фундаментальной области F_{mix} ? В силу периодичности они совпадают с частотами появления параллелограммов во всем разбиении $\mathcal{T}_{\text{mix}}(v, \mu_{\text{mix}})$. Из лемм 7.2 и 7.3 следует, что частоты также совпадают

$$\nu_{\text{mix},0} = \mu_{\text{mix},0}, \quad \nu_{\text{mix},1} = \mu_{\text{mix},1}, \quad \nu_{\text{mix},2} = \mu_{\text{mix},2} \quad (10.11)$$

с координатам весового вектора μ_{mix} из (10.8); и поэтому силу малости параметра $\xi \approx 0,03$ они примерно такие же, как у периодического разбиения (10.7).

10.3. Непериодическое ядерное разбиение.

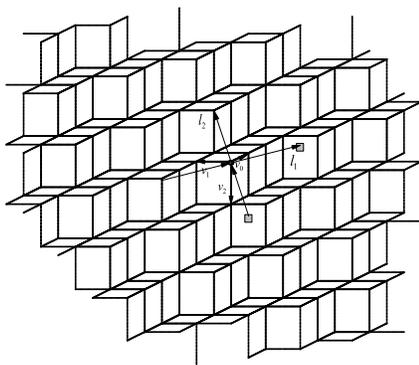


Рис. 10.3. Непериодическое ядерное разбиение $\mathcal{T}_{\text{irr}}(v, \mu_{\text{irr}})$.

Такие разбиения $\mathcal{T}_{\text{irr}}(v, \mu_{\text{irr}})$ были определены в (6.22). Сохраняя звезду v из (10.2), будем строить весовой вектор

$$\mu_{\text{irr}} = (\mu_{\text{irr},0}, \mu_{\text{irr},1}, \mu_{\text{irr},2}), \quad (10.12)$$

исходя рационального вектора (10.1) его малым возмущением вида

$$\mu_{\text{irr},0} = \frac{\mu_0}{1 + \xi + \xi^2}, \quad \mu_{\text{irr},1} = \frac{\mu_1 + \xi}{1 + \xi + \xi^2}, \quad \mu_{\text{irr},2} = \frac{\mu_2 + \xi^2}{1 + \xi + \xi^2}.$$

Весовой вектор (10.12) имеет ранг $\text{rank } \mu_{\text{irr}} = 3$ и, значит, μ_{irr} является вектором общего положения (6.1). Для него решетка периодов $L_{\text{irr}} = \{0\}$. Действительно, изображенное на рис. 10.3 разбиение $\mathcal{T}_{\text{irr}}(v, \mu_{\text{irr}})$ не имеет периодов.

И снова, но уже применяя леммы 6.3 и 6.4, видим, что частоты появления параллелограммов T_0, T_1 и T_2 в непериодическом разбиении $\mathcal{T}_{\text{irr}}(v, \mu_{\text{irr}})$ совпадают

$$\nu_{\text{irr},0} = \mu_{\text{irr},0}, \quad \nu_{\text{irr},1} = \mu_{\text{irr},1}, \quad \nu_{\text{irr},2} = \mu_{\text{irr},2} \quad (10.13)$$

с координатам соответствующего весового вектора общего положения μ_{irr} из (10.12); и поэтому мало отличаются от частот периодического разбиения (10.7).

Из сказанного вытекает важное

Замечание 10.1. Из равенств (10.7), (10.11) и (10.13) следует, что тип ядерного разбиения $\mathcal{T}_L(v, \mu)$, $\mathcal{T}_{\text{mix}}(v, \mu_{\text{mix}})$ или $\mathcal{T}_{\text{irr}}(v, \mu_{\text{irr}})$ определяется типом соответствующего частотного вектора $\nu = (\nu_0, \nu_1, \nu_2)$, $\nu_{\text{mix}} = (\nu_{\text{mix},0}, \nu_{\text{mix},1}, \nu_{\text{mix},2})$ или $\nu_{\text{irr}} = (\nu_{\text{irr},0}, \nu_{\text{irr},1}, \nu_{\text{irr},2})$; и данное свойство имеет место для разбиений любой размерности d .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. Г. Журавлев, *Одномерные разбиения Фибоначчи*. — Изв. РАН, сер. матем. **71**, No. 2 (2007), 89–122.
2. G. Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions*. — Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 147–178.
3. В. Г. Журавлев, *Разбиения Розы и множества ограниченного остатка на торе*. — Записки научных семинаров ПОМИ **322** (2005), 83–106.
4. В. Г. Журавлев, А. В. Малеев, *Послойный рост квазипериодического разбиения Розы*. — Кристаллография **52**, No. 2 (2007), 204–210.
5. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел*. — Зап. науч. семин. ПОМИ **445** (2016), 33–92.
6. В. Г. Журавлев, *Локальный алгоритм построения производных разбиений двумерного тора*. — Зап. науч. семин. ПОМИ **479** (2019), 85–120.
7. P. Arnoux, V. Berthé, S. Ito, *Discrete planes, \mathbb{Z}^2 -actions, Jacobi-Perron algorithm and substitutions*. — Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52**, No. 2 (2002), 305–349.
8. V. Berthé, L. Vuillon, *Tilings and rotations on the torus: a two-dimensional generalization of Sturmian sequences*. — Discrete Math. **223** (2000), 27–53.

9. V. Berthé, A. Siegel, J. Thuswaldner, *Substitutions, Rauzy fractals and tilings*. — Combinatorics, Automata and Number Theory. Encyclopedia Math. Appl., vol. **135**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010, pp. 248–323.
10. S. Ito, M. Ohtsuki, *Modified Jacobi-Perron algorithm and generating Markov partitions for special hyperbolic toral automorphisms*. — Tokyo J. Math. **16**, No. 2 (1993), 441–472.
11. S. Ito, M. Ohtsuki, *Parallelogram tilings and Jacobi-Perron algorithm*. — Tokyo J. Math. **17**, No. 1 (1994), 33–58.
12. В. Г. Журавлев, *Переключивающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка*. — Зап. науч. семин. ПОМИ **392** (2011), 95–145.
13. В. Г. Журавлев, *Многогранники ограниченного остатка*. — Математика и информатика, 1, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Совр. пробл. матем., МИАН, М., **16** (2012), 82–102.
14. Е. С. Федоров, *Начала учения о фигурах*, М., 1953.
15. Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений*, том 2. Киев, 1952.

Zhuravlev V. G. Universal karyon tilings.

Universal karyon tilings $\mathcal{T}^d(v, \mu)$ of the real d -dimensional space \mathbb{R}^d are constructed. These tilings depend on two free parameters: the star $v = \{v_0, \dots, v_d\}$ formed by $d+1$ vectors $v_0, \dots, v_d \in \mathbb{R}^d$, and the weight vector $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ with $\mu_k > 0$ satisfying $\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_d = 1$. The tiling $\mathcal{T}^d(v, \mu)$ contains the karyon $\text{Kr} = T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_d \subset \mathcal{T}^d(v, \mu)$ consisting of all types of parallelepipeds T_0, T_1, \dots, T_d from which the tiling $\mathcal{T}^d(v, \mu)$ is formed. The karyon Kr is a convex parallelohedron uniquely determined by the star v . Coordinates μ_k of the weight vector μ set the frequency of occurrence of parallelepipeds $T_k \in \text{Kr}$ in the karyon tiling $\mathcal{T}^d(v, \mu)$.

E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 24 марта 2020 г.

Владимирский государственный университет
600024, Владимир, Строителей, 11, Россия