Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 490, 2020 г.

В. Г. Журавлев

ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

Введение

0.1. Основной результат. Пусть числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_d, 1$ образуют базис вещественного алгебраического поля

$$\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_d, 1) \subset \mathbb{R}$$

степени $d+1 = r+2c$, где $r \geqslant 1$ и $2c$ обозначают число вещественных и комплексных сопряжений $\alpha^{(i)}$ соответственно. В работе показано, что $(d+1)$-мерный вектор

$$\widehat{\alpha}^{\perp} = \frac{1}{(-2i)^c}\ \det\begin{pmatrix} \alpha_1^{(2)} & \ldots & \alpha_1^{(d+1)} & e_1 \\ & \ldots & & \\ \alpha_d^{(2)} & \ldots & \alpha_d^{(d+1)} & e_d \\ 1 & \ldots & 1 & e_{d+1} \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

равный линейной комбинации векторов единичного базиса $\{e_1,\ldots,e_{d+1}\}$ пространства $\mathbb{R}^{d+1}$, имеет вещественные координаты.

Определим вещественную линейную форму

$$F(x) = \alpha_1^{\perp}x_1 + \ldots + \alpha_{d+1}^{\perp}x_{d+1}$$

с коэффициентами $\alpha_i^{\perp}$, равными координатам вектора $\widehat{\alpha}^{\perp}$. Скажем, что линейная форма $F(x)$ иррациональна, если ее коэффициенты $\alpha_1^{\perp}$, $\ldots, \alpha_{d+1}^{\perp}$ линейно независимы над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

В теореме 7.1 доказано, что существует бесконечная последовательность целочисленных точек $p_a^{\min} = (p_{a,1}, \ldots, p_{a,d+1})$ для $a = 0, 1, 2, \ldots,$ определяемых некоторым рекуррентным соотношением и удовлетворяющих неравенству

$$|F(p_a^{\min})| = |\alpha_1^{\perp}p_{a,1} + \ldots + \alpha_{d+1}^{\perp}p_{a,d+1}| \leqslant \frac{c}{|p_a^{\min}|_s^{d-\eta}} \tag{0.2}$$

с показателем $\eta > 0$, который может быть выбран сколь угодно малым, и константой c, не зависящей от номера итерации a; при этом величина

Ключевые слова: наилучшие диофантовы приближения линейных форм, обратный симплекс-модульный алгоритм.

$|p_a^{\min}|_s = |p_{a,1}| + \ldots + |p_{a,d+1}|$ имеет экспоненциальный рост при $a \to +\infty$.

Более того, так определенные целые точки $p_a^{\min}$ дают наилучшие диофантовы приближения (0.2) линейной формы $F(x)$ относительно полиэдральных норм $N_{\eta,a}(x)$ из (6.23), представляющих собою лучевые функции или функционалы Минковского.

0.2. Комментарии. Вектор $\widehat{\alpha}^{\perp}$ из (0.1) относится к классу плохо аппроксимируемых [1], поэтому при любом выборе целочисленных точек $p_a^{\min}$ показатель $\eta > 0$ в неравенстве (0.2) нельзя заменить на сколь угодно малый $\eta < 0$.

В прикладных задачах присутствие данного показателя не является ограничительным, т.к. тогда изначально известна верхняя граница для $|p_a^{\min}|_s$, поэтому за счет малости $\eta > 0$ можно контролировать величину $|p_a^{\min}|_s^{\eta}$ в заранее определенных границах.

При доказательстве неравенств (0.2) использован *обратный симплекс-модульный алгоритм.* Ранее прямой вариант этого алгоритма был использован для разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби [2, 3].

Среди многочисленных исследований по диофантовым приближениям линейных форм выделим работы [4, 5], где для тернарных форм были построены наилучшие приближения.

§1. Единицы алгебраических полей

1.1. Основные единицы. Рассмотрим вещественное алгебраическое поле

$$\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\theta) \subset \mathbb{R} \tag{1.1}$$

– алгебраическое расширение степени $d+1 = r+2c$ поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, где $r \geqslant 1$ и $2c$ обозначают число вещественных и комплексных сопряжений соответственно (подробности см., например, [6]). Выберем в $\mathbb{F}$ некоторую *фундаментальную систему основных единиц* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$, где $t = r+c-1$. Они являются свободными образующими порождаемой ими *группы единиц* $\mathcal{E}$, имеющей максимально возможный *ранг* t.

Замечание 1.1. От выбранных единиц $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ в дальнейшем нам потребуется только, чтобы они имели максимально возможный ранг t. Предположение фундаментальности системы единиц $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ обеспечивает выполнение данного свойства.

Зададим отображение

$$\varepsilon \mapsto x(\varepsilon) = (\ln|\varepsilon^{(1)}|, \dots, \ln|\varepsilon^{(r)}|, 2\ln|\varepsilon^{(r+1)}|), \dots, 2\ln|\varepsilon^{(r+c)}|) \qquad (1.2)$$

множества единиц $\mathcal{E}$ в пространство $\mathbb{R}^{t+1}$, где $\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(r)}$ – вещественные сопряженные значения для ε и $\varepsilon^{(r+1)}, \dots, \varepsilon^{(r+c)}$ – комплексные, при этом полагаем $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon$. Отображение (1.2) будет вложением $x : \mathcal{E} \hookrightarrow \mathbb{R}^{t+1}$ группы $\mathcal{E}$ в векторное пространство $\mathbb{R}^{t+1}$ с сохранением в них операций

$$x(\varepsilon \cdot \varepsilon') = x(\varepsilon) + x(\varepsilon'). \qquad (1.3)$$

1.2. Единицы Пизо. Единицу $\zeta \in \mathcal{E}$ назовем *единицей Пизо*, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\zeta = \zeta^{(1)} > 1 \quad \text{и} \quad |\zeta^{(i)}| < 1 \quad \text{для остальных сопряжений} \quad i > 1. \qquad (1.4)$$

Обозначим через $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ подмножество всех единиц Пизо ζ из группы $\mathcal{E}$. Из определения (1.4) следует замкнутость множества $\mathcal{P}$ относительно умножения $\zeta \cdot \zeta' \in \mathcal{P}$ для любых $\zeta, \zeta' \in \mathcal{P}$. Поэтому множество $\mathcal{P}$ образует полугруппу без единицы, поскольку 1 не является единицей Пизо (1.4).

Предложение 1.1. 1. *Если ранг $t \geqslant 1$, то группа единиц $\mathcal{E}$ содержит единицу Пизо* (1.4) *и, значит, $\mathcal{P} \neq \emptyset$.*

2. *Любая единица Пизо $\zeta \in \mathcal{P}$ имеет степень*

$$\deg(\zeta) = d + 1, \qquad (1.5)$$

где степень $\deg(\zeta)$ числа ζ определяется равенством $\deg(\zeta) = \deg \mathbb{Q}(\zeta)$, где справа указана степень $\deg \mathbb{Q}(\zeta) = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$ расширения $\mathbb{Q}(\zeta)$ над полем $\mathbb{Q}$.

Доказательство. см. [2, 3]. □

1.3. Локализованные единицы Пизо. Из [7], п. 2.3 (более подробно см. [3]) можно вывести следующее

Следствие 1.1. *Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t\}$ – некоторая фундаментальная система единиц вещественного алгебраического поля $\mathbb{F}$ из* (1.1) *степени $d + 1$,*

$$\zeta = \varepsilon_1^{p_1} \cdots \varepsilon_t^{p_t} \qquad (1.6)$$

– произвольная единица; и пусть $\zeta^{(i)}$ – сопряженные единицы ζ. Тогда для любого фиксированного $\theta > 0$ найдутся такие целыми показателями $p_1, \dots, p_t$ в (1.6)*, что будут выполняться следующие свойства:*

1) *число* ζ *является единицей Пизо* (1.4)*;*

2) *модули всех ее сопряженных* $\zeta^{(i)}$ *содержатся в некоторой окрестности*

$$\zeta^{-1/d-\theta} \leqslant |\zeta^{(i)}| \leqslant \zeta^{-1/d+\theta} \tag{1.7}$$

для $2 \leqslant i \leqslant t+1$.

3) *если поле* $\mathbb{F}$ *является вещественным квадратичным или комплексным кубическим, т.е. имеющим комплексное сопряжение, то в неравнствах* (1.7) *можно положить* $\theta = 0$.

Единицы $\zeta > 1$, удовлетворяющие условию (1.7), будем называть *локализованными единицами Пизо.*

§2. Модульные матрицы Пизо

2.1. Модули. Пусть $\zeta \in \mathcal{P}$ – единица Пизо (1.4). По предложению 1.1 ее степени $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Поэтому алгебраическое поле $\mathbb{Q}(\zeta)$ совпадает

$$\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{F} \tag{2.1}$$

с полем (1.1) и *модуль*

$$\mathcal{M}_\zeta = \mathbb{Z}[1, \zeta, \ldots, \zeta^d] \tag{2.2}$$

над кольцом $\mathbb{Z}$ будет *полным*, т.е. числа $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$ образуют базис поля $\mathbb{F}$ над $\mathbb{Q}$.

Рассмотрим линейное отображение

$$\mathcal{M}_\zeta \xrightarrow{\zeta} \mathcal{M}_\zeta : \ x \mapsto \zeta \cdot x. \tag{2.3}$$

Из определения (2.2) вытекает, что отображение (2.3) задает автоморфизм модуля $\mathcal{M}_\zeta$. Поскольку $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$ – базис модуля $\mathcal{M}_\zeta$, то найдется унимодулярная матрица U_ζ размера $d+1$, т.е. матрица с целыми коэффициентами определителя ± 1, удовлетворяющая условию

$$U_\zeta \widehat{\zeta} = \zeta \cdot \widehat{\zeta}, \tag{2.4}$$

где слева записано произведение матрицы U_ζ и столбца

$$\widehat{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta^d \\ \vdots \\ \zeta \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

высоты $d+1$. Матрица U_ζ называется *матрицей предствления* элемента ζ в базисе $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$.

2.2. Матрица перехода T. Пусть

$$\mathcal{M}_\alpha = \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d] \tag{2.6}$$

– произвольный полный модуль над кольцом $\mathbb{Z}$ в поле $\mathbb{F}$. Точку $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ и соответствующий набор чисел $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$, обладающие свойством (2.6), будем называть *полными*. Для полной точки α характерно выполнение соотношения

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha) \tag{2.7}$$

между $\mathbb{Q}[\alpha]$ – модулем (2.6) и $\mathbb{Q}(\alpha)$ – расширением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ добавлением к нему чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$.

Точку (вектор) α назовем *иррациональной* (*иррациональным*), если выполняется условие:

$$\textit{числа} \quad 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d \quad \textit{линейно независимы над кольцом} \quad \mathbb{Z}. \tag{2.8}$$

Из (2.1) и (2.6), в частности, следует иррациональность (2.8) точки $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, а из (2.7) – равенство $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{F}$. Определим для точки α ее *степень*

$$\deg \alpha = \deg \mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q} = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \tag{2.9}$$

над полем $\mathbb{Q}$. Если α – полная точка, то из (2.1) и (2.6) следует $\deg \alpha = d+1$.

Далее, пусть T – *матрица перехода*

$$\widehat{\alpha} = T\widehat{\zeta} \tag{2.10}$$

от базиса полного модуля $\mathcal{M}_\zeta$ к базису модуля $\mathcal{M}_\alpha$. Здесь столбец $\widehat{\alpha}$ определяется по модулю $\mathcal{M}_\alpha$ добавлением единицы

$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Матрица перехода T имеет рациональные коэффициенты. Кроме того, поскольку модуль $\mathcal{M}_\alpha$ также полный, то матрица T обратима и, значит, $T \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q})$.

2.3. Модульные матрицы. Воспользуемся (2.10) и подставим $\widehat{\zeta} = T^{-1}\widehat{\alpha}$ в равенство (2.4). Имеем

$$U_\zeta T^{-1}\widehat{\alpha} = \zeta \cdot T^{-1},$$

откуда для столбца $\widehat{\alpha}$ выводим равенство

$$M_\alpha \widehat{\alpha} = \zeta \cdot \widehat{\alpha} \tag{2.12}$$

с рациональной матрицей

$$M_\alpha = TU_\zeta T^{-1}, \tag{2.13}$$

сопряженной унимодулярной матрице U_ζ. Для модуля $\mathcal{M}_\alpha$ из (2.6) матрицу, обладающую свойством (2.12), назовем *модульной матрицей.*

2.4. Унимодулярные модульные матрицы. *Уровень*

$$l(T) = t \tag{2.14}$$

невырожденной рациональной матрицы T определяется как наименьшее натуральное число t с условием, что $T^* = t \cdot T^{-1}$ – целочисленная матрица.

Нам потребуется еще *показатель* $\nu_a(U_\zeta) = \nu$ унимодулярной матрицы U_ζ по модулю t – это такое наименьшее натуральное число ν, для которого выполняется сравнение

$$U_\zeta^\nu \equiv E \bmod t, \tag{2.15}$$

где $E = E_{d+1}$ – единичная матрица размера $d+1$. Указанное число ν существует и не превышает порядка конечной группы $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})$ матриц над кольцом вычетов $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ с определителем $\det \equiv \pm 1 \bmod t$.

В [2, 3] доказано следующее утверждение.

Предложение 2.1. 1. *Пусть t – уровень* (2.14) *матрицы T и ν – показатель унимодулярной матрицы U_ζ по модулю t. Тогда матрица*

$$\mathrm{P}_\alpha = M_\alpha^\nu \tag{2.16}$$

является унимодулярной.

2. *Пусть $\mathcal{M}_\alpha$ – произвольный полный модуль* (2.6) *из поля $\mathbb{F}$. Тогда имеет место равенство*

$$\mathrm{P}_\alpha \widehat{\alpha} = \lambda \cdot \widehat{\alpha}, \tag{2.17}$$

где $\widehat{\alpha}$ – столбец (2.11) *и*

$$\lambda = \zeta^\nu > 1 \tag{2.18}$$

– *единица Пизо* (1.4).

Матрицу P_α из (2.16) назовем *модульной матрицей Пизо* или кратко – *матрицей Пизо*. Если ζ является локализованной единицей Пизо (1.6), то P_α будем также называть *локализованной матрицей Пизо*.

§3. Оценка линейной формы

3.1. Разложение модульной матрицы Пизо. Для столбцов $\widehat{\alpha}$ из (2.11) и $\widehat{\zeta}$ из (2.5) определим квадратные матрицы

$$A = (\widehat{\alpha}^{(1)} \dots \widehat{\alpha}^{(d+1)}), \quad Z = (\widehat{\zeta}^{(1)} \dots \widehat{\zeta}^{(d+1)}) \tag{3.1}$$

– порядка $d+1$. Матрица Z невырождена и в силу равенства (2.10) можем записать

$$A = TZ. \tag{3.2}$$

Поэтому матрица A также невырождена и, следовательно, ее столбцы образуют базис (A-базис) в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$.

Пусть P_α – модульная матрица Пизо (1.6). Из (2.16) получаем

$$\mathrm{P}_\alpha A = (\lambda^{(1)}\widehat{\alpha}^{(1)} \dots \lambda^{(d+1)}\widehat{\alpha}^{(d+1)}) = A\Lambda,$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \lambda^{(d+1)} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Отсюда для матрицы P_α выводим разложение

$$\mathrm{P}_\alpha = A\Lambda A^{-1}. \tag{3.4}$$

3.2. Итерации целочисленных векторов. Определим векторы p_a для $a = 0, 1, 2, \dots$, записанные в виде столбцов

$$p_a = \begin{pmatrix} p_{a,1} \\ \vdots \\ p_{a,d+1} \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

через итерации

$$p_a = \mathrm{P}_\alpha^{-1} p_{a-1}, \tag{3.6}$$

p_0 – произвольный ненулевой целочисленный вектор. Повторяя (3.6) несколько раз, получаем

$$p_a = \mathrm{P}_\alpha^{-a} p_0. \tag{3.7}$$

Из (3.3), (3.4) и (3.7) следует явное представление

$$p_a = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)^{-a}} a_{1,1} + \ldots + \lambda^{(d+1)^{-a}} a_{1,d+1} \\ \vdots \\ \lambda^{(1)^{-a}} a_{d+1,1} + \ldots + \lambda^{(d+1)^{-a}} a_{d+1,d+1} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

с некоторыми коэффициентами $a_{i,j}$, не зависящими от a. Отсюда выводим неравенства

$$|p_{a,i}| \leqslant |\lambda^{(1)}|^{-a} |a_{i,1}| + \ldots + |\lambda^{(d+1)}|^{-a} |a_{i,d+1}| \tag{3.9}$$

для $i = 1, \ldots, d+1$.

Лемма 3.1. *Пусть векторы p_a определены формулой* (3.7). *Тогда для них имеет место неравенство*

$$|p_a|_s \leqslant c_{p_0,A} |\lambda^{(2)}_{\min}|^{-a} \tag{3.10}$$

для всех $a = 0, 1, 2, \ldots$ Здесь обозначили

$$|p_a|_s = |p_{a,1}| + \ldots + |p_{a,d+1}| \tag{3.11}$$

– s-метрику в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$,

$$|\lambda^{(2)}_{\min}| = \min_{2 \leqslant i \leqslant d+1} |\lambda^{(i)}| \tag{3.12}$$

и $c_{p_0,A}$ – константу, не зависящую от номера итерации a.

Доказательство. Непосредственно вытекает из неравенств (3.9). □

3.3. Линейная форма. Как уже отмечалось, столбцы матрицы A из (3.1) образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$. Поэтому целую точку p_0 можно представить в виде

$$p_0 = a_1 \widehat{\alpha}^{(1)} + \ldots + a_{d+1} \widehat{\alpha}^{(d+1)}. \tag{3.13}$$

По (3.7) и (3.13) имеем

$$p_a = \mathrm{P}_\alpha^{-a} p_0 = a_1 \lambda^{(1)^{-a}} \widehat{\alpha}^{(1)} + \ldots + a_{d+1} \lambda^{(d+1)^{-a}} \widehat{\alpha}^{(d+1)}. \tag{3.14}$$

Далее нам потребуется вектор

$$\widehat{\alpha}_c^{\perp} = \det(\widehat{\alpha}^{(2)} \ldots \widehat{\alpha}^{(d+1)} \mathbf{e}). \tag{3.15}$$

Здесь

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \\ e_{d+1} \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

– столбец из единичных векторов в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$ и векторы $\widehat{\alpha}^{(i)}$ записаны в виде $(d+1)$-мерных столбцов (2.11) из своих в общем случае комплексных координат в базисе $\mathbf{e}$. Поясним определение вектора $\widehat{\alpha}_c^{\perp}$. У матрицы в определителе (3.15) первые d столбцов числовые (они состоят из координат векторов $\widehat{\alpha}^{(i)}$), а последний столбец векторный – это столбец 3.16. Разлагая данный определитель по последнему столбцу, видим, что он равен линейной комбинации векторов $e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}$. Из определения следует, что вектор $\widehat{\alpha}_c^{\perp}$ ортогонален

$$\widehat{\alpha}_c^{\perp} \cdot \widehat{\alpha}^{(i)} = 0 \tag{3.17}$$

всем векторам $\widehat{\alpha}^{(2)}, \ldots, \widehat{\alpha}^{(d+1)}$ относительно обычного (покоординатного) скалярного произведения. Отсюда будет следовать равенство

$$p_a \cdot \widehat{\alpha}_c^{\perp} = a_1 \lambda^{-a}\, \widehat{\alpha} \cdot \widehat{\alpha}_c^{\perp}, \tag{3.18}$$

где использовали сокращения $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}^{(1)}$ и $\lambda = \lambda^{(1)}$.

Лемма 3.2. *Пусть*

$$F_{\mathbb{C}}(x) = \alpha_{c,1}^{\perp} x_1 + \ldots + \alpha_{c,d+1}^{\perp} x_{d+1} \tag{3.19}$$

– линейная форма с коэффициентами $\alpha_{c,i}^{\perp}$, равными координатам вектора $\widehat{\alpha}_c^{\perp}$ из (3.15)*. Тогда модуль формы $F_c(p_a)$ вычисляется по формуле*

$$|F_{\mathbb{C}}(p_a)| = \frac{c_\alpha}{\lambda^a}, \tag{3.20}$$

где константа $c_\alpha = |a_1 \widehat{\alpha} \cdot \widehat{\alpha}_c^{\perp}|$ не зависит от номера a и $\lambda > 1$ – собственное значение (2.18)*.*

Доказательство. Вытекает из равенства (3.18). □

3.4. Оценка линейной формы. Воспользуемся нормой

$$\mathrm{Norma}(\lambda) = \lambda^{(1)} \lambda^{(2)} \cdots \lambda^{(d+1)} = \pm 1. \tag{3.21}$$

Объединяя (1.7) и (2.18) можем записать

$$|\lambda^{(i)}| = \frac{1}{\lambda^{1/d+\theta_i}} \tag{3.22}$$

для $i = 2, \ldots, d+1$ с показателями $|\theta_i| \leqslant \theta$. Из (3.12), (3.21) и (3.22) следует равенство

$$|\lambda_{\min}^{(2)}| = \frac{1}{\lambda^{1/d+\theta_{\max}}}, \tag{3.23}$$

где

$$\theta_{\max} = \max_{2 \leqslant i \leqslant d+1} \theta_i, \tag{3.24}$$

при этом $0 < \theta_{\max} \leqslant \theta$. Перепишем равенство (3.23) в виде

$$\frac{1}{\lambda^a} = (|\lambda_{\min}^{(2)}|^a)^{d/(1+d\theta_{\max})}. \tag{3.25}$$

Здесь степень $|\lambda_{\min}^{(2)}|^a$, согласно (3.10), удовлетворяет неравенству

$$|\lambda_{\min}^{(2)}|^a \leqslant \frac{c_{p_0,A}}{|p_a|_s}.$$

Подставляя данное неравенство в (3.25) получаем

$$\frac{1}{\lambda^a} \leqslant \frac{c_{\alpha,\theta}}{|p_a|_s^{d/(1+d\theta_{\max})}}, \tag{3.26}$$

где $c_{\alpha,\theta} = c_{p_0,A}^{d/(1+d\theta_{\max})}$. Как уже отмечалось выше $0 < \theta_{\max} \leqslant \theta$, поэтому неравенство (3.26) можно заменить на более слабое

$$\frac{1}{\lambda^a} \leqslant \frac{c_{\alpha,\theta}}{|p_a|_s^{d/(1+d\theta)}}. \tag{3.27}$$

Теперь используя очевидное неравенство

$$\frac{1}{1+d\theta} \geqslant 1 - d\theta,$$

еще раз перепишем неравенство (3.27) в виде

$$\frac{1}{\lambda^a} \leqslant \frac{c_{\alpha,\theta}}{|p_a|_s^{d-\eta}}, \tag{3.28}$$

где обозначили $\eta = d^2\theta$.

Теорема 3.1. *Пусть $F(p_a)$ – линейная форма (3.19) и целочисленные векторы p_a определяются формулой (3.7). Тогда выполняется неравенство*

$$|F_{\mathbb{C}}(p_a)| \leqslant \frac{C_{\alpha,\theta,p_0}}{|p_a|_s^{d-\eta}} \tag{3.29}$$

для всех $a = 0, 1, 2, \dots$ Здесь показатель $\eta = d^2\theta > 0$ может быть сколь угодно малым и константа $C_{\alpha,\theta,p_0} = c_\alpha c_{\alpha,\theta}$ с множителями c_α и $c_{\alpha,\theta}$, определенными в (3.20) и (3.26), не зависит от номера итерации a.

Доказательство. Следует из леммы 3.2 и неравенства (3.28). □

§4. Оценка снизу

Лемма 4.1. *Пусть векторы* p_a *определены формулой* (3.7). *Тогда для них имеет место неравенство*

$$|p_a|_s \geqslant c'_{p_0,A}|\lambda^{(2)}_{\max}|^{-a} \tag{4.1}$$

для всех $a = 0, 1, 2, \ldots$ *Здесь*

$$|\lambda^{(2)}_{\max}| = \max_{2 \leqslant i \leqslant d+1} |\lambda^{(i)}| < 1 \tag{4.2}$$

и константа $c'_{p_0,A} > 0$ *не зависит от номера итерации* a.

Доказательство. Столбцы матрицы A из (3.1) упорядочим следующим образом

$$A = (\ldots \widehat{\alpha}^{(i)} \ldots \widehat{\alpha}^{(j)}\overline{\widehat{\alpha}}^{(j)} \ldots), \tag{4.3}$$

где (i) – вещественные сопряжения, а (j) – комплексно сопряженные пары. Производя линейное преобразование

$$\widehat{\alpha}^{(j)}_+ = \frac{1}{2}(\widehat{\alpha}^{(j)} + \overline{\widehat{\alpha}}^{(j)}), \quad \widehat{\alpha}^{(j)}_- = \frac{1}{2i}(\widehat{\alpha}^{(j)} - \overline{\widehat{\alpha}}^{(j)}), \tag{4.4}$$

перейдем к *вещественной матрице*

$$A_{\mathbb{R}} = (\ldots \widehat{\alpha}^{(i)} \ldots \widehat{\alpha}^{(j)}_+ \widehat{\alpha}^{(j)}_- \ldots), \tag{4.5}$$

столбцы которой образуют базис вещественного пространства $\mathbb{R}^{d+1}$.

Разложим вектор p_0 из (3.5) по этому базису

$$p_0 = A_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{d+1} \end{pmatrix} = \ldots + x_i \widehat{\alpha}^{(i)} + \ldots + (\widehat{\alpha}^{(j)}_+ \widehat{\alpha}^{(j)}_-) \begin{pmatrix} x_j \\ x'_j \end{pmatrix} + \ldots \tag{4.6}$$

По выбору (3.5) вектор $p_0 \neq 0$ имеет целые координаты, а вектор $\widehat{\alpha}^{(1)} = \widehat{\alpha}$ является иррациональным (2.8). Поэтому в разложении (4.6) хотя бы одна из координат $x_i \neq 0$ с $i \geqslant 2$ или столбец $\begin{pmatrix} x_j \\ x'_j \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Если $\lambda^{(j)} = r_j(\cos\varphi_j + i\sin\varphi_j)$, то по (3.7) находим

$$p_a = \mathrm{P}^{-a}_{\alpha} p_0 = \ldots + x_i {\lambda^{(i)}}^{-a} \widehat{\alpha}^{(i)} + \ldots + r_j^{-a} X_j(a\varphi_j) + \ldots, \tag{4.7}$$

где

$$X_j(a\varphi_j) = (\widehat{\alpha}^{(j)}_+ \widehat{\alpha}^{(j)}_-) \begin{pmatrix} x_j(a\varphi_j) \\ x'_j(a\varphi_j) \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

при этом
$$\begin{pmatrix} x_j(a\varphi_j) \\ x'_j(a\varphi_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-a\varphi_j) & -\sin(-a\varphi_j) \\ \sin(-a\varphi_j) & \cos(-a\varphi_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ x'_j \end{pmatrix}.$$

Пусть в (4.6) существует $x_i \neq 0$ для $i \geqslant 2$. Тогда у векторов p_a из (4.7) модуль i-ой координаты
$$|x_i \lambda^{(i)^{-a}}| \to \infty \quad \text{при} \quad a \to \infty. \tag{4.9}$$
Теперь предположим, что в разложении (4.6) найдется столбец $\begin{pmatrix} x_j \\ x'_j \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда
$$\min_{\substack{\varphi \in [0,2\pi) \\ a = 1,2,3,\dots}} |X_j(a\varphi)| = \min_{\varphi \in [0,2\pi)} |X_j(\varphi)| = c_j > 0,$$
и поэтому
$$|r_j^{-a} X_j(a\varphi_j)| \geqslant c_j r_j^{-a} \to \infty \quad \text{при} \quad a \to \infty. \tag{4.10}$$

Пусть $|*|_{s,A}$ обозначает s-метрику (3.11), записанную в базисе (4.5). Из разложения (4.7) и свойств (4.9), (4.10) вытекает
$$|p_a|_{s,A} \geqslant c''_{p_0,A} |\lambda^{(2)}_{\max}|^{-a} \tag{4.11}$$
для всех $a = 0, 1, 2, \dots$, где $\lambda^{(2)}_{\max}$ определено в (4.2) и константа $c''_{p_0,A} > 0$ не зависит от номера итерации a. Поскольку s-метрики $| * |_s$ и $| * |_{s,A}$ эквивалентны – так как это одна и та же метрика в разных базисах – то из (4.11) будет следовать оценка (4.1). $\square$

§5. Симплексы

5.1. Линейные унимодулярные преобразования. Основной областью для нас будет замкнутый d-мерный *единичный симплекс* $\triangle_e = \triangle_e^d$ с вершинами в точках
$$e_0 = (0, \dots, 0), \quad e_1 = (1, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_d = (0, \dots, 1)$$
из пространства $\mathbb{R}^d$.

Выделим в группе унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ с определителем ± 1 *подгруппу* $G_0 = \mathrm{GL}_{d+1,0}(\mathbb{Z})$ из матриц
$$U = \begin{pmatrix} V & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

где $V \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ и $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_d \end{pmatrix}$ – произвольный целочисленный столбец.
Группа G_0 действует на точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ из $\mathbb{R}^d$ по формуле

$$U\alpha = V\alpha + L, \tag{5.2}$$

где α рассматривается как столбец

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Таким образом, группа G_0 соответствует целочисленным унимодулярным преобразованиям пространства $\mathbb{R}^d$.

5.2. Унимодулярный базисный симплекс.

Предложение 5.1. *Если α – иррациональная точка, то существует такая матрица $U \in G_0$, что выполняется включение*

$$\alpha \in \triangle_U^d, \tag{5.4}$$

где $\triangle_U^d = U\triangle_e^d$.

Доказательство. см. [2], [3]. □

Симплекс $\triangle_U^d$ из (5.4) назовем *базисным*. Его основное свойство состоит в том, что он является *унимодулярным*: векторы, выходящие из одной его вершины во все остальные вершины, образуют *унимодулярный базис*, т.е. некоторый базис кубической решетки $\mathbb{Z}^d$.

5.3. Базисный симплекс. Выберем в качестве s *базисный симплекс*

$$\triangle = \triangle_U^d \tag{5.5}$$

из предложения 5.1. Он имеет целочисленные вершины

$$v_i = Ue_i = \frac{P_i}{Q_i}, \tag{5.6}$$

где полагаем $Q_i = 1$ для всех $i = 0, 1, \dots, d$. Векторы

$$v_i' = v_i - v_0 = Ve_i \tag{5.7}$$

для $i = 1, \ldots, d$ с матрицей $V \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ образуют унимодулярный базис. Поэтому симплекс (5.5) имеет объем

$$\operatorname{vol} \triangle = \frac{1}{d!}. \tag{5.8}$$

5.4. Суперсимплекс. Определим следующий *суперсимплекс*

$$\widehat{\triangle} = \widehat{\triangle}_U^d \subset \mathbb{R}^{d+1}. \tag{5.9}$$

Он имеет $d+2$ вершины: $d+1$ целочисленную вершину

$$\widehat{v}_i = \widehat{U} e_i = \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

с индексами $i = 0, 1, \ldots, d$ и еще одну вершину в начале координат $0 \in \mathbb{R}^{d+1}$. Из (5.7) и (5.10) следует, что векторы

$$\widehat{v}_i = \widehat{v}_i - 0 \tag{5.11}$$

для $i = 0, 1, \ldots, d$ образуют унимодулярный базис.

Далее выходящие из начала координат векторы и их концы будем отождествлять. По этому соглашению и (5.8) суперсимплекс (5.9) имеет объем

$$\operatorname{vol} \widehat{\triangle} = \frac{1}{(d+1)!}. \tag{5.12}$$

§6. Полиэдральные нормы и наилучшие диофантовы приближения

6.1. Базисный параллелепипед. Определим параллелепипед

$$\mathbf{P} = \{\lambda_0 \widehat{v}_0 + \lambda_1 \widehat{v}_1 + \ldots + \lambda_d \widehat{v}_d;\ \forall \lambda_i \in [-1, 1]\}, \tag{6.1}$$

имеющий размерность $d+1$. Как уже отмечалось в (5.11), порождающие данный параллелепипед векторы $\widehat{v}_0, \widehat{v}_1, \ldots, \widehat{v}_d$ образуют унимодулярный базис. Поэтому $\mathbf{P}$, который будем называть *базисным параллелепипедом*, обладает следующим свойством

$$\mathbf{P}^{\mathrm{int}} \cap \mathbb{Z}^{d+1} = \{0\}, \tag{6.2}$$

где через $\mathbf{P}^{\mathrm{int}}$ обозначили внутреннюю область параллелепипеда $\mathbf{P}$.

Подействуем модульной матрицей Пизо P_α из (2.16) на параллелепипед (6.1) и получим последовательность параллелепипедов

$$\mathbf{P}^a = \mathrm{P}_\alpha^{-a} \mathbf{P} \tag{6.3}$$

уровней $a = 0, 1, 2, \ldots$ По предложению 2.1 матрица Пизо P_α унимодулярная. Поэтому свойство (6.2) сохраняется

$$\mathbf{P}^{a\ \mathrm{int}} \cap \mathbb{Z}^{d+1} = \{0\} \tag{6.4}$$

для всех параллелепипедов $\mathbf{P}^a$. *Поверхности* этих параллелепипедов обозначим через $\partial\mathbf{P}^a = \mathbf{P}^a \setminus \mathbf{P}^{a\ \mathrm{int}}$.

Параллелепипед $\mathbf{P}$ содержит следующие целые точки

$$\mathbf{P} \cap \mathbb{Z}^{d+1} = \{\lambda_0\widehat{v}_0 + \lambda_1\widehat{v}_1 + \ldots + \lambda_d\widehat{v}_d;\ \forall\lambda_i \in \{0, \pm1\}\} \tag{6.5}$$

и только эти точки, а его поверхность –

$$\partial\mathbf{P} \cap \mathbb{Z}^{d+1} = (\mathbf{P} \cap \mathbb{Z}^{d+1}) \setminus \{0\}. \tag{6.6}$$

Поэтому на поверхностях $\partial\mathbf{P}^a$ лежат точки с целыми координатами

$$\mathbf{V}^a = \{\lambda_0\widehat{v}_0^a + \lambda_1\widehat{v}_1^a + \ldots + \lambda_d\widehat{v}_d^a;\ \forall\lambda_i \in \{0, \pm1\}\}\ \setminus \{0\}, \tag{6.7}$$

где

$$\widehat{v}_i^a = \mathrm{P}_\alpha^{-a}\widehat{v}_i. \tag{6.8}$$

Из равенства (6.7) следует, что количество точек в $\mathbf{V}^a$ равно

$$\sharp\mathbf{V}^a = 3^{d+1} - 1. \tag{6.9}$$

6.2. Вещественная линейная форма. В общем случае линейная форма $F_\mathbb{C}(x)$ из (3.19) может иметь комплексные коэффициенты. В задачах аппроксимации, однако, более удобно иметь дело с вещественными формами, что и будет сделано в данном пункте.

С этой целью рассмотим два вектора

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}_c^\perp &= \det(\widehat{\alpha}^{(2)} \ldots \widehat{\alpha}^{(i)} \ldots \widehat{\alpha}^{(j)}\ \overline{\widehat{\alpha}}^{(j)} \ldots \mathbf{e}),\\ \widehat{\alpha}^\perp &= \det(\widehat{\alpha}^{(2)} \ldots \widehat{\alpha}^{(i)} \ldots \widehat{\alpha}_+^{(j)}\ \widehat{\alpha}_-^{(j)} \ldots \mathbf{e}),\end{aligned} \tag{6.10}$$

Здесь записаны определители квадратных матриц порядка $d+1$. При этом в первой матрице столбцы упорядочены согласно (4.3), во второй столбцы $\widehat{\alpha}_+^{(j)}$, $\widehat{\alpha}_-^{(j)}$ определены в (4.4) и $\mathbf{e}$ – столбец из единичных векторов (3.16). Из определения (4.4) следует, что второй вектор $\widehat{\alpha}^\perp$ имеет вещественные коэффициенты. Элементарными преобразованиями первая матрица легко преобразуется во вторую. На этом пути приходим к формуле связи между векторами (6.10):

$$\widehat{\alpha}_c^\perp = (-2i)^c\widehat{\alpha}^\perp, \tag{6.11}$$

где $2c$ обозначает количество комплексных сопряжений (1.1).

Теперь мы можем определить нужную *вещественную форму*

$$F(x) = \alpha_1^{\perp} x_1 + \ldots + \alpha_{d+1}^{\perp} x_{d+1} \tag{6.12}$$

– линейная форма с коэффициентами $\alpha_i^{\perp}$, равными координатам вектора $\widehat{\alpha}^{\perp}$ из (6.10). В силу (6.11) линейные формы (3.19) и (6.12) связаны тождеством

$$F_{\mathbb{C}}(x) = (-2i)^c F(x). \tag{6.13}$$

6.3. Минимальные точки. Линейную форму $F(x)$ из (6.12) назовем *иррациональной*, если ее коэффициенты $\alpha_1^{\perp}, \ldots, \alpha_{d+1}^{\perp}$ линейно независимы над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. В этом случае будет выполняться неравенство

$$\min_{\widehat{v} \in \mathbf{V}^a} |F(\widehat{v})| = m_a > 0 \tag{6.14}$$

для всех $a = 0, 1, 2, \ldots$ Выделим среди целых точек из $\mathbf{V} = \mathbf{V}^0$ точку $p_0^{\min} = (p_{0,1}, \ldots, p_{0,d+1})$, представляющую минимум (6.14)

$$F(p_0^{\min}) = m_0 \tag{6.15}$$

нулевого уровня $a = 0$.

Лемма 6.1. *Пусть $F(x)$ – линейная иррациональная форма* (6.12) *и точки $p_a^{\min}$ определены формулой*

$$p_a^{\min} = \mathrm{P}_{\alpha}^{-a}\, p_0^{\min} \tag{6.16}$$

для $a = 0, 1, 2, \ldots$, где P_{α} – модульная матрица Пизо (2.16) *и точки $p_a^{\min}$ записаны в виде столбцов. Тогда данные точки обладают свойствами:*

$$p_a^{\min} \in \mathbf{V}^a \tag{6.17}$$

и, следовательно, $p_{a,\min}$ имеют целые координаты; кроме того

$$F(p_a^{\min}) = m_a, \tag{6.18}$$

где m_a – минимальные значения (6.14).

Доказательство. Включение (6.17) вытекает из определения (6.3) параллелепипедов $\mathbf{P}^a$, а равенство (6.18) – из формулы (3.18) и условия $\lambda > 0$. □

6.4. Геометрия наилучших диофантовых приближений.

Предложение 6.1. *Пусть* $F(x)$ *– линейная иррациональная форма* (6.12), $\mathbf{P}^a$ *– параллелепипеды* (6.3), *и пусть* $p_a^{\min}$ *– целые точки из* $\mathbf{P}^a$, *определяемые формулой* (6.16). *Тогда имеют место следующие свойства:*

$$\mathbf{P}^{a\ \mathrm{int}} \cap \mathbb{Z}^{d+1} = \{0\}; \tag{6.19}$$

точки $\pm p_a^{\min} \in \mathbf{P}^a$ *представляют*

$$F(\pm p_a^{\min}) = \pm m_a \tag{6.20}$$

– минимальные значения (6.14)*; при этом*

$$\min_{\substack{\widehat{v} \in \mathbf{P}^a \cap \mathbb{Z}^{d+1} \\ \widehat{v} \neq 0, \pm p_a^{\min}}} |F(\widehat{v})| > m_a \tag{6.21}$$

для всех $a = 0, 1, 2, \ldots$

Доказательство. Свойство (6.19) доказано в (6.4), а равенство (6.20) вытекает из (6.18).

Теперь проверим неравенство (6.21). Непосредственно из определения (6.14) минимальных значений m_a следует нестрогое неравенство вида (6.21). Предположим, что найдется точка $\widehat{v}$, удовлетворяющая условиям из (6.21) и представляющая минимальное значение m_a. Тогда будет выполняться равенство

$$F(\widehat{v} - p_a^{\min}) = 0. \tag{6.22}$$

По выбору $\widehat{v} - p_a^{\min}$ будет ненулевой точкой с целыми координатами. Но тогда равенство (6.22) противоречит условию иррациональности линейной формы $F(x)$. □

Замечание 6.1. Для каждого $a = 0, 1, 2, \ldots$ зададим в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$ *полиэдральную норму* $N_{\theta,a}(x)$ условием

$$N_{\theta,a}(x) \leqslant 1 \iff x \in \mathbf{P}^a, \tag{6.23}$$

где $\mathbf{P}^a$ – параллелепипеды (6.3). Тогда из предложения 6.1 будет следовать, что относительно нормы $N_{\theta,a}(x)$ целые точки $p_a^{\min}$ из параллелепипеда $\mathbf{P}^a$ дают наилучшие диофантовы приближения линейной формы $F(x)$. Полиэдральные нормы $N_{\theta,a}(x)$ из (6.23) представляют собою *лучевые функции* или *функционалы Минковского* относительно параллелепипедов $\mathbf{P}^a$ (см. [8, 9]).

§7. Количесвенная оценка приближений

7.1. Рекуррентные последовательности. Далее минимальные точки $p_a^{\min}$ будем представлять в виде столбцов

$$p_a^{\min} = \begin{pmatrix} p_{a,1} \\ \vdots \\ p_{a,d+1} \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

Все они получаются из начальной точки $p_0^{\min}$ по формуле (6.16).

Пусть матрица Пизо P_α имеет характеристический многочлен

$$ch_{P_\alpha}(x) = \det(xE - \mathrm{P}_\alpha) = x^{d+1} - b_d x^d - \ldots - b_1 x - b_0. \tag{7.2}$$

Для того, чтобы найти характеристический многочлен обратной матрицы $ch_{P_\alpha^{-1}}(x)$, воспользуемся формулой

$$ch_{P_\alpha^{-1}}(x) = |P_\alpha|^{-1}(-x)^{d+1} ch_{P_\alpha}\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

Используя ее и равенство (7.2), получаем

$$ch_{P_\alpha^{-1}}(x) = \det(xE - \mathrm{P}_\alpha^{-1}) = x^{d+1} - b'_d x^d - \ldots - b'_1 x - b'_0 \tag{7.3}$$

с целыми коэффициентами

$$b'_d = -\frac{b_1}{b_0}, \quad \ldots, \quad b'_1 = -\frac{b_d}{b_0}, \quad b'_0 = \frac{1}{b_0}, \tag{7.4}$$

так как, согласно определению (2.16), характеристический многочлен (7.2) имеет свободный член $-b_0 = \pm 1$.

Предложение 7.1. *Столбцы $p_a^{\min}$ из (7.1) удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$p_{a+d+1}^{\min} = b'_d\, p_{a+d}^{\min} + \ldots + b'_1\, p_{a+1}^{\min} + b'_0\, p_a^{\min} \tag{7.5}$$

для $a = 0, 1, 2, \ldots$ При этом начальные условия

$$p_d^{\min} = \mathrm{P}_\alpha^{-d}\, p_0^{\min}, \ldots, \quad p_1^{\min} = \mathrm{P}_\alpha^{-1}\, p_0^{\min}, \quad p_0^{\min} \tag{7.6}$$

задаются матрицей Пизо P_α из (2.16) и столбцом $p_0^{\min}$, определенным в (6.15).

Доказательство. Вытекает из формулы (6.16), равенств (7.3), (7.4) и аналогичного рекуррентного соотношения, доказанного в [2, 3]. □

7.2. Основная теорема.

Теорема 7.1. *Пусть* $F(x) = \alpha_1^{\perp} x_1 + \ldots + \alpha_{d+1}^{\perp} x_{d+1}$ *– вещественная линейная форма* (6.12) *является иррациональной и целочисленные точки* $p_a^{\min} = (p_{a,1}, \ldots, p_{a,d+1})$ *определяются рекуррентным соотношением* (7.5)*. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Выполняется неравенство*

$$|F(p_a^{\min})| = |\alpha_1^{\perp} p_{a,1} + \ldots + \alpha_{d+1}^{\perp} p_{a,d+1}| \leqslant \frac{c_{\alpha,\theta,p_0}}{|p_a^{\min}|_s^{d-\eta}} \tag{7.7}$$

для всех $a = 0, 1, 2, \ldots$ *Здесь показатель* $\eta > 0$ *может быть сколь угодно малым; константа* $c_{\alpha,\theta,p_0} = C_{\alpha,\theta,p_0}/2^c > 0$*, где* C_{α,θ,p_0} *– константа* (3.29) *и* $2c$ *обозначает количество комплексных сопряжений* (1.1)*, не зависит от номера итерации* a*.*

2. *Величина* $|p_a^{\min}|_s$ *имеет экспоненциальный рост относительно номера* a*.*

3. *Целые точки* $p_a^{\min}$ *представляют наилучшие диофантовы приближения* (7.7) *линейной формы* $F(x)$ *относительно норм* $N_a(x)$ *из* (6.23)*.*

Доказательство. Оценка (7.7) вытекает из теоремы 3.1, тождества (6.13) и предложения 7.1. Согласно леммам 3.1 и 4.1 величина $|p_a|_s$ удовлетворяет неравенствам

$$c'_{p_0,A} |\lambda_{\max}^{(2)}|^{-a} \leqslant |p_a|_s \leqslant c_{p_0,A} |\lambda_{\min}^{(2)}|^{-a},$$

из которых получаем второе утверждение теоремы. Последнее утверждение следует из предложений 6.1 и 7.1. □

Список литературы

1. В. Шмидт, *Диофантовы приближения.* М.: Мир, 1983.
2. В. Г. Журавлев, *Симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **449** (2016), 168–195.
3. В. Г. Журавлев, *Ядерные цепные дроби.* Владимир, ВлГУ, 2019.
4. T. W. Cusick, *Diophantine Approximation of Ternary Linear Forms.* — Mathematics of computation. **25**, No. 113 (1971), 163—180.
5. T. W. Cusick, *Diophantine Approximation of Ternary Linear Forms. II.* — Mathematics of computation. **26**, No. 120 (1972), 977—993.
6. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел.* — Третье изд. М.: Наука, 1985.
7. В. Г. Журавлев, *Локализованные единицы Пизо и совместные приближения алгебраических чисел.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **458** (2017), 104–134.

8. Дж. В. С. Касселс, *Введение в теорию диофантовых приближений.* — М.: Из-во иностранной литературы, 1961.
9. Дж. В. С. Касселс, *Введение в геометрию чисел.* — М.: Мир, 1965.

Zhuravlev V. G. Diophantine approximations of linear forms.

Diophantine approximations of linear combinations with real algebraic numbers of arbitrary degree are considered. Using the recurrence relation it is possible to generate an infinite sequence of integer approximations of the linear forms. We prove that the resulting Diophantine approximations are the best relative to some polyhedral norms that are ray functions or the Minkowski functionals.

Владимирский государственный университет
600024, Владимир, Строителей, 11, Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 24 марта 2020 г.