А. П. Щеглова

МНОЖЕСТВЕННОСТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ХЕНОНА С ДРОБНЫМ ЛАПЛАСИАНОМ

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Эффект возникновения множественных положительных решений для квазилинейных эллиптических уравнений впервые был описан Коффманом в работе [1]. Здесь и далее под множественностью подразумевается возможность построения любого наперед заданного числа положительных решений, не получающихся друг из друга ортогональными преобразованиями. В [1] было показано, что если область Ω — достаточно узкое кольцо в $\mathbb{R}^2$ и $q > 2$, то задача

$$-\Delta u = u^{q-1} \quad \text{в } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

имеет любое наперед заданное число различных положительных решений. В [2] этот результат был обобщен на случай $n \geq 4$ и $2 < q < \frac{2n}{n-2}$. При $n = 3$ тот же результат был получен в [3]. Для уравнения, содержащего оператор p -Лапласа $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, результаты о множественности были получены в [4] для задачи Дирихле в кольце и в [5] для задачи Неймана в шаре.

В [6] для $p = 2$ и в [7, 8] для произвольного $p > 1$ при достаточно больших α были построены нерадиальные положительные решения уравнения

$$-\Delta_p u = |x|^\alpha u^{q-1} \quad \text{в } B_1, \quad u|_{\partial B_1} = 0.$$

При $p = 2$ это уравнение известно как уравнение Хенона [9].

В настоящей работе мы рассмотрим обобщенное уравнение Хенона с дробным Лапласианом

$$(-\Delta)^s u = |x|^\alpha |u|^{q-2} u \quad \text{в } B, \quad u \in \tilde{H}^s(B) \quad (1)$$

Ключевые слова: дробный лапласиан, уравнение Хенона, множественность решений.

Работа поддержана грантом РФФИ 17-01-00678.

в единичном шаре $B \equiv B_1 \subset \mathbb{R}^n$ при $s \in (0, 1)$, $2 < q < 2_{n,s}^* \equiv \frac{2n}{(n-2s)_+}$, $\alpha > 0$. Дробный лапласиан $(-\Delta)^s$ в левой части уравнения (1) может пониматься в смысле Дирихле или в смысле Навье.

Наша цель – показать, что при достаточно больших α эффект множественности положительных решений для обобщенных уравнений Хенона (1) с дробными Лапласианами также имеет место.

Структура работы следующая: в §2 собраны основные определения и известные факты о дробных Лапласианах, используемые в работе. В §3 доказаны ключевые оценки, необходимые для построения решений. В §4 доказаны основные результаты о существовании решений уравнения (1) с различными симметриями.

Автор благодарит А. И. Назарова за интерес к работе и ценные обсуждения, а также Н. С. Устинова за полезные замечания.

§2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Далее всюду различные абсолютные константы (т.е. не зависящие от α) мы будем обозначать через C . При необходимости, параметры, от которых зависит константа C , указываются в скобках. Запись $a \asymp b$ означает, что верна двусторонняя оценка $C_1 b \leq a \leq C_2 b$ с константами, не зависящими от α .

Шар радиуса r с центром в точке x обозначим $B_r(x)$. Если $x = 0$, то для краткости будем писать B_r . Кроме того, обозначим $K_{r_1, r_2} = B_{r_2} \setminus \overline{B_{r_1}}$ – кольцо в $\mathbb{R}^n$ с внутренним радиусом r_1 и внешним радиусом r_2 .

Преобразование Фурье в пространстве $\mathbb{R}^n$ задается формулой

$$\mathcal{F}u(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} u(x) dx.$$

По определению (см. [10, §2.3.3, 4.3.2])

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L_2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s}) |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi < +\infty \right\}.$$

Для ограниченной области Ω с гладкой границей пространство $\tilde{H}^s(\Omega)$ определяется следующим образом:

$$\tilde{H}^s(\Omega) = \left\{ u \in H^s(\mathbb{R}^n) : \text{supp}(u) \subset \overline{\Omega} \right\}.$$

Дробный лапласиан на классе Шварца

$$\mathcal{S} = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta u(x)| < +\infty \quad \forall \alpha, \beta \right\}$$

задается формулой

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \mathcal{F}u(\xi)).$$

Квадратичная форма этого оператора имеет вид

$$((-\Delta)^s u, u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi. \tag{2}$$

Дробный лапласиан Дирихле $(-\Delta)_D^s$ в области Ω – самосопряженный оператор, восстановленный по квадратичной форме (2) с областью определения $\tilde{H}^s(\Omega)$. При $s \in (0, 1)$ квадратичная форма для дробного лапласиана Дирихле также может быть получена с помощью интеграла

$$((-\Delta)_D^s u, u) = C_s \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy, \tag{3}$$

где $C_s = \frac{s2^{2s}\Gamma(n/2 + s)}{\pi^{n/2}\Gamma(1 - s)}$ (см. [11, гл. 5, § 24]).

Дробный лапласиан Навье $(-\Delta)_N^s$ – это s -ая степень оператора Лапласа в смысле спектральной теории, т. е. самосопряженный оператор, восстановленный по квадратичной форме

$$((-\Delta)_N^s u, u) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j^s (u, \varphi_j)^2, \tag{4}$$

где λ_j и φ_j – собственные числа и собственные функции оператора Лапласа с условием Дирихле в области Ω . Известно (см. [12, лемма 1]), что при $s \in [0, 1]$ область определения квадратичной формы (4) совпадает с $\tilde{H}^s(\Omega)$.

Под решением уравнения (1) мы будем понимать обобщенное решение, т. е. такую функцию $u \in \tilde{H}^s(\Omega)$, что

$$((-\Delta)_D^s u, h) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \Re(\mathcal{F}u \overline{\mathcal{F}h}) d\xi = \int_{\Omega} |u|^{q-2} u h dx \quad \forall h \in \tilde{H}^s(\Omega) \tag{5}$$

для дробного лапласиана Дирихле и

$$((-\Delta)_N^s u, h) \equiv \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j^s(u, \varphi_j)(h, \varphi_j) = \int_{\Omega} |u|^{q-2} u h \, dx \quad \forall h \in \tilde{H}^s(\Omega) \quad (6)$$

для дробного лапласиана Навье.

Норма в пространстве $\tilde{H}^s(\Omega)$ индуцируется нормой в пространстве $H^s(\mathbb{R}^n)$:

$$\|u\|_{\tilde{H}^s(\Omega)}^2 = \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + ((-\Delta)_D^s u, u). \quad (7)$$

Известно (см., например, [12, следствие 1]), что в пространстве $\tilde{H}^s(\Omega)$ квадратичными формами (2) и (4) при $s \in [0, 1]$ задаются эквивалентные норме (7) нормы

$$[u]_{D, \tilde{H}^s(\Omega)}^2 := ((-\Delta)_D^s u, u) \asymp \|u\|_{\tilde{H}^s(\Omega)}^2 \asymp ((-\Delta)_N^s u, u) =: [u]_{N, \tilde{H}^s(\Omega)}^2. \quad (8)$$

Кроме того, для квадратичных форм (2) и (4) при $s \in (0, 1)$ и $u \neq 0$ справедливо неравенство

$$((-\Delta)_N^s u, u) > ((-\Delta)_D^s u, u) \quad (9)$$

(см. [12, теорема 1]).

Для пространства $\tilde{H}^s(\Omega)$ верны неравенства Соболева (см. [10, §2.8.1]): при $s < n/2$ имеем

$$[u]_{D, \tilde{H}^s(\Omega)}^2 \geq C(n, s) \|u\|_{L_{2_{n,s}^*}(\Omega)}^2 \quad \text{и} \quad [u]_{N, \tilde{H}^s(\Omega)}^2 \geq C(n, s) \|u\|_{L_{2_{n,s}^*}(\Omega)}^2. \quad (10)$$

Равенство точных констант в этих неравенствах для произвольного s было получено в [13].

Из неравенства (10) следует непрерывность вложения $\tilde{H}^s(\Omega)$ в $L_{2_{n,s}^*}(\Omega)$, которая обеспечивает компактность вложения

$$\tilde{H}^s(B) \hookrightarrow L_q(B)$$

при всех $q < 2_{n,s}^*$.

Обозначим $L_{q,\alpha}(B)$ весовое пространство $L_q(B, |x|^\alpha dx)$.

Пусть G – замкнутая подгруппа $O(n)$. Обозначим $\mathcal{H}_G^s(B)$ подпространство G -инвариантных функций из пространства $\tilde{H}^s(B)$, т. е.

$$\mathcal{H}_G^s(B) = \left\{ u \in \tilde{H}^s(B) : u(x) = u(gx), \forall g \in G \right\}.$$

Аналогично определяются пространства функций $L_{q,G}(B)$ и $\mathcal{L}_{q,\alpha,G}(B)$:

$$L_{q,G}(B) = \left\{ u \in L_q(B) : u(x) = u(gx), \forall g \in G \right\},$$

$$\mathcal{L}_{q,\alpha,G}(B) = \left\{ u \in L_{q,\alpha}(B) : u(x) = u(gx), \forall g \in G \right\}.$$

Следуя [4], рассмотрим разложение пространства $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^m)^l \oplus \mathbb{R}^k$, где

$$n = ml + k, \quad m \geq 2, \quad k \geq m \text{ или } k = 0.$$

Переменные в пространствах $\mathbb{R}^m$ обозначим y_j , $j = 1, 2, \dots, l$, переменные в пространстве $\mathbb{R}^k$ обозначим z . Функцию u будем называть (m, k) -симметричной, если u инвариантна относительно всех перестановок векторов $y_1, \dots, y_l$ и (при $k \neq 0$) зависит только от $|z|$. Функцию u будем называть (m, k) -радиальной, если она (m, k) -симметричная и зависит только от $|y_j|$ и $|z|$. В частности, радиальные функции – это $(n, 0)$ -радиальные функции. Заметим, что нетривиальные допустимые разложения существуют только при $n \geq 4$. Группу, порождающую пространство (m, k) -радиальных функций, будем обозначать $G_{m,k}$.

§3. ОЦЕНКИ КОНСТАНТ ВЛОЖЕНИЯ

Для построения решений нам понадобятся двусторонние оценки норм Дирихле и Навье в пространствах $\mathcal{H}_{G_{m,k}}^s$ через весовую норму пространства $L_{q,\alpha}$.

Лемма 3.1 (неравенство Фридрихса). Пусть $u \in \tilde{H}^s(B)$, $\rho \in (3/4, 1)$. Тогда для норм Дирихле и Навье справедливо неравенство

$$\int_{K_{\rho,1}} u^2(x) dx \leq C \cdot (1 - \rho)^{2s} [u]_{\tilde{H}^s(B)}^2, \quad (11)$$

где константа $C = C(n, s)$ не зависит от ρ .

Доказательство. Пусть T_0 – оператор вложения пространства $L_2(B)$ в пространство $L_2(K_{\rho,1})$:

$$T_0 : L_2(B) \rightarrow L_2(K_{\rho,1}).$$

Очевидно, что это непрерывный оператор и $\|T_0\| \leq 1$.

Пусть T_1 – оператор вложения пространства $\tilde{H}^1(B) = \overset{\circ}{W}_2^1(B)$ в пространство $L_2(K_{\rho,1})$:

$$T_1 : \tilde{H}^1(B) \rightarrow L_2(K_{\rho,1}).$$

Хорошо известно, что

$$\int_{K_{\rho,1}} u^2(x) dx \leq C(1-\rho)^2 \int_B |\nabla u|^2 dx = C(1-\rho)^2 [u]_{\tilde{H}^1(B)}^2,$$

где константа C не зависит от ρ . То есть $\|T_1\| \leq C(1-\rho)$.

Известно (см. [10, §1.18.1]), что пространства $\tilde{H}^s(B)$ образуют интерполяционную шкалу

$$\left[L_2(B) = \tilde{H}^0(B), \tilde{H}^1(B) \right]_s = \tilde{H}^s(B).$$

Таким образом мы можем интерполировать оператор вложения между операторами T_0 и T_1 . Обозначим полученный оператор T_s :

$$T_s : \tilde{H}^s(B) \rightarrow L_2(K_{\rho,1}).$$

Согласно интерполяционному неравенству

$$\|T_s\| \leq \|T_0\|^{1-s} \|T_1\|^s \leq C(1-\rho)^s,$$

то есть

$$\int_{K_{\rho,1}} u^2(x) dx = \|u\|_{L_2(K_{\rho,1})}^2 \leq C(1-\rho)^{2s} [u]_{\tilde{H}^s(B)}^2$$

и (11) доказано. $\square$

Теорема 3.1. *Рассмотрим произвольное (m, k) -разложение. Для любого $q \in [2, 2_{n-m+1, s}^*]$ и $\alpha > 1$ существует такая (m, k) -радиальная функция $u \in \mathcal{H}_{G_{m,k}}^s(B)$, что*

$$[u]_{D, \tilde{H}^s(B)}^2 \leq C \alpha^{2s-(n-m+1)(1-2/q)} \|u\|_{L_{q,\alpha}(B)}^2, \quad (12)$$

$$[u]_{N, \tilde{H}^s(B)}^2 \leq C \alpha^{2s-(n-m+1)(1-2/q)} \|u\|_{L_{q,\alpha}(B)}^2. \quad (13)$$

При $m \neq n$ или $m = n$ и $0 < s < 1/2$ утверждение теоремы верно и при $q = 2_{n-m+1, s}^*$.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $u \in \mathcal{H}_{G_{m,k}}^s$, удовлетворяющую условию $\text{supp } u \subset \{x \in B : |x| \geq 1 - 1/\alpha\}$. Положим $u_\alpha(x) := u(x/\alpha)$. Тогда u_α является (m, k) -радиальной функцией в пространстве $\tilde{H}^s(K_{\alpha-1, \alpha})$, и для норм Дирихле и Навье справедливо равенство

$$[u]_{\tilde{H}^s(B)}^2 = \alpha^{-n+2s} [u_\alpha]_{\tilde{H}^s(K_{\alpha-1, \alpha})}^2.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_{q,\alpha}(B)}^2 &= \left(\int_{K_{1-1/\alpha,1}} |x|^\alpha |u|^q dx \right)^{2/q} \geq \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right)^{2\alpha/q} \left(\int_{K_{1-1/\alpha,1}} |u|^q dx \right)^{2/q} \\ &\geq C\alpha^{-2n/q} \left(\int_{K_{\alpha-1,\alpha}} |u_\alpha|^q dx \right)^{2/q} = C\alpha^{-2n/q} \|u_\alpha\|_{L_q(K_{\alpha-1,\alpha})}^2. \end{aligned}$$

Тогда для норм Дирихле и Навье справедлива оценка

$$\frac{[u]_{\tilde{H}^s(B)}^2}{\|u\|_{L_{q,\alpha}(B)}^2} \leq C\alpha^{-n+2s+2n/q} \frac{[u_\alpha]_{\tilde{H}^s(K_{\alpha-1,\alpha})}^2}{\|u_\alpha\|_{L_q(K_{\alpha-1,\alpha})}^2}.$$

В [14, теорема 3] показано, что существует (m, k) -радиальная в кольце $K_{\alpha-1,\alpha}$ функция u_α , такая, что

$$\frac{[u_\alpha]_{\tilde{H}^s(K_{\alpha-1,\alpha})}^2}{\|u_\alpha\|_{L_q(K_{\alpha-1,\alpha})}^2} \leq C\alpha^{(m-1)(1-2/q)}.$$

Следовательно, для соответствующей ей функции $u \in \mathcal{H}_{G_{m,k}}^s(B)$ выполнено

$$\frac{[u]_{\tilde{H}^s(B)}^2}{\|u\|_{L_{q,\alpha}(B)}^2} \leq C\alpha^{-n+2s+2n/q} \cdot \alpha^{(m-1)(1-2/q)} = C\alpha^{2s-(n-m+1)(1-2/q)},$$

т.е. справедливы неравенства (12) и (13). □

Замечание. Так как условие $q < 2_{n-m+1,s}^*$ равносильно неравенству $2s - (n - m + 1)(1 - 2/q) > 0$, то при α близких к нулю оценки (12) и (13) не верны.

Теорема 3.2. Пусть $u(x) \in \mathcal{H}_{G_{m,k}}^s$, причем $m \neq n$. Тогда при $q \in [2, 2_{n-m+1,s}^*)$ существует $\hat{\alpha}(n, m, s, q) > 0$, такое, что при $\alpha > \hat{\alpha}$ выполнены неравенства:

$$\begin{aligned} [u]_{D,\tilde{H}^s(B)}^2 &\geq C \left(\frac{\alpha}{\ln \alpha} \right)^{2s-(n-m+1)(1-2/q)} \|u\|_{L_{q,\alpha}(B)}^2, \\ [u]_{N,\tilde{H}^s(B)}^2 &\geq C \left(\frac{\alpha}{\ln \alpha} \right)^{2s-(n-m+1)(1-2/q)} \|u\|_{L_{q,\alpha}(B)}^2. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть T_0 – тождественный оператор на пространстве $L_{2,G_{m,k}}(B)$:

$$T_0 : L_{2,G_{m,k}}(B) \rightarrow L_{2,G_{m,k}}(B).$$

Пусть T_1 – оператор вложения пространства $\mathcal{H}_{G_{m,k}}^1(B)$ в весовое пространство $\mathcal{L}_{p, \frac{\alpha}{s}, G_{m,k}}(B)$:

$$T_1 : \mathcal{H}_{G_{m,k}}^1(B) \rightarrow \mathcal{L}_{p, \frac{\alpha}{s}, G_{m,k}}(B).$$

В [15, теорема 1.1] показано, что для всех $p \in \left[2, 2\frac{n-m+1}{(n-m-1)_+}\right)$ этот оператор компактный при $\alpha > \hat{\alpha}(n, m, s, p)$. Кроме того, для любой функции $v \in \mathcal{H}_{G_{m,k}}^1(B)$ в [8, лемма 1.4] получено неравенство

$$[v]_{\tilde{H}^1(B)}^2 = \|\nabla v\|_{L_2(B)}^2 \geq C \left(\frac{\alpha}{\ln \alpha}\right)^{2(1-(n-m+1)(1/2-1/p))} \|v\|_{L_{p, \frac{\alpha}{s}}(B)}^2,$$

то есть

$$\|T_1\| \leq C \left(\frac{\alpha}{\ln \alpha}\right)^{(n-m+1)(1/2-1/p)-1}.$$

Известно (см. [10, §1.18.1]), что пространства $\tilde{H}^s(B)$ образуют интерполяционную шкалу

$$\left[L_2(B) = \tilde{H}^0(B), \tilde{H}^1(B)\right]_s = \tilde{H}^s(B).$$

Весовые пространства $L_{p, \frac{\alpha}{s}}(B)$ также образуют интерполяционную шкалу

$$\left[L_2(B) = L_{2,0}(B), L_{p, \frac{\alpha}{s}}(B)\right]_s = L_{q, \alpha}(B),$$

где $\frac{1}{q} = \frac{1-s}{2} + \frac{s}{p}$.

Стандартным образом определим проекторы в пространства $G_{m,k}$ -инвариантных функций. Разложим произвольную функцию h в сумму $h = h_1 + h_2$, где

$$h_1(y) = \frac{1}{\mu_y(G_{m,k}(y))} \int_{G_{m,k}(y)} h d\mu_y, \quad h_2(y) = h(y) - h_1(y), \quad \int_{G_{m,k}(y)} h_2 d\mu_y = 0. \quad (14)$$

Здесь $G_{m,k}(y)$ – орбита точки y под действием группы $G_{m,k}$; μ_y – мера Хаара на орбите, инвариантная относительно действия группы. Тогда

функция h_1 $G_{m,k}$ -инвариантна и формулы (14) определяют непрерывные проекторы из пространств $L_p(B)$, $L_{p, \frac{\alpha}{s}}(B)$ и $\tilde{H}^s(B)$ в пространства $L_{p, G_{m,k}}(B)$, $\mathcal{L}_{p, \frac{\alpha}{s}, G_{m,k}}(B)$ и $\mathcal{H}_{G_{m,k}}^s(B)$ соответственно. Поэтому

$$\begin{aligned} \left[L_{2, G_{m,k}(B)}, \mathcal{H}_{G_{m,k}}^1(B) \right]_s &= \mathcal{H}_{G_{m,k}}^s(B), \\ \left[L_{2, G_{m,k}(B)}, \mathcal{L}_{p, \frac{\alpha}{s}, G_{m,k}}(B) \right]_s &= \mathcal{L}_{q, \alpha, G_{m,k}}(B). \end{aligned}$$

Таким образом мы можем интерполировать оператор вложения между операторами T_0 и T_1 . Обозначим полученный оператор T_s :

$$T_s : \mathcal{H}_{G_{m,k}}^s(B) \rightarrow \mathcal{L}_{q, \alpha, G_{m,k}}(B) \quad \text{при} \quad \frac{1}{q} = \frac{s}{p} + \frac{1-s}{2}.$$

Согласно интерполяционному неравенству

$$\begin{aligned} \|T_s\| &\leq \|T_0\|^{1-s} \|T_1\|^s \leq C \left(\frac{\alpha}{\ln \alpha} \right)^{(n-m+1)(s/2-s/p)-s} \\ &= C \left(\frac{\alpha}{\ln \alpha} \right)^{(n-m+1)(1/2-1/q)-s}. \end{aligned} \tag{15}$$

При $p \in \left[2, 2 \frac{n-m+1}{(n-m-1)_+} \right)$ показатель q пробегает интервал $[2, 2_{n-m+1, s}^*]$, а неравенство (15) дает оценку нормы оператора вложения

$$[u]_{\tilde{H}^s(B)}^2 \geq C \left(\frac{\alpha}{\ln \alpha} \right)^{2s-(n-m+1)(1-2/q)} \|u\|_{L_{q, \alpha}(B)}^2.$$

Из эквивалентности норм (8) следует утверждение теоремы. □

Замечание. Поскольку оператор T_1 является компактным, оператор T_s также компактный. То есть вложение $\mathcal{H}_{G_{m,k}}^s(B) \hookrightarrow \mathcal{L}_{q, \alpha, G_{m,k}}(B)$ компактно при всех $q \in [2, 2_{n-m+1, s}^*]$.

При $m = n$ интерполяция в доказательстве теоремы 3.2 даже при $0 < s < 1/2$ позволяет получить вложение только для $q \leq \frac{1}{1-s} < \frac{2}{1-2s} = 2_{1, s}^*$. В случае $m = n$ нам понадобится следующая техническая лемма.

Лемма 3.2. Пусть $n \geq 2$. Тогда для любого $q \in [2, 2_{1, s}^*]$ существует $\alpha_0(n, s, q) > 0$, такое, что вложение $\mathcal{H}_{G_{n,0}}^s(B) \rightarrow \mathcal{L}_{q, \alpha_0, G_{n,0}}(B)$ компактно. В частности, для любой радиальной функции $u \in \mathcal{H}_{G_{n,0}}^s(B)$ справедлива оценка

$$\|u\|_{L_{q, \alpha_0}(B)} \leq C [u]_{\tilde{H}^s(B)}, \tag{16}$$

где $C = C(n, s, q)$.

Доказательство. В этой лемме будем следовать обозначениям пространств, принятым в монографии [10]. Сначала рассмотрим случай $0 < s < 1/2$.

Так как $q \in [2, 2_{1,s}^*)$, то существует $\delta \in (0, 2s]$, такое, что

$$q = \frac{2}{1 - 2s + \delta}.$$

Пусть T_0 – тождественный оператор на подпространстве радиальных функций $\mathcal{L}_{p_0, G_{n,0}}(B)$ для некоторого p_0 :

$$T_0 : \mathcal{L}_{p_0, G_{n,0}}(B) \rightarrow \mathcal{L}_{p_0, G_{n,0}}(B).$$

Положим $\varepsilon = \frac{\delta}{2s} \in (0, 1]$. Зафиксируем некоторое $\beta > 0$ (его выбор будет описан далее) и обозначим T_1 – оператор вложения подпространства $H_{1+\varepsilon}^{1,rad}(B)$ радиальных функций пространства $W_{1+\varepsilon}^1(B) = H_{1+\varepsilon}^1(B)$ в весовое пространство $\mathcal{L}_{r,\beta, G_{n,0}}(B)$:

$$T_1 : H_{1+\varepsilon}^{1,rad}(B) \rightarrow \mathcal{L}_{r,\beta, G_{n,0}}(B).$$

Известно ([15, теорема 1.1]), что на подпространстве радиальных функций оператор T_1 является компактным при всех $r < \infty$ и $\beta = 1 + \left(\frac{nr}{1+\varepsilon} - n - r \right)_+$.

Согласно теоремам [10, §2.4.2, §4.3.1], при условии $p_0 > 1$ мы можем получить пространство $H^s(B)$ как интерполяционное пространство

$$\left[L_{p_0}(B) = H_{p_0}^0(B), H_{1+\varepsilon}^1(B) \right]_s = H_2^s(B) = H^s(B),$$

где $\frac{1-s}{p_0} + \frac{s}{1+\varepsilon} = \frac{1}{2}$. То есть

$$p_0 = \frac{2(1+\varepsilon)(1-s)}{1+\varepsilon-2s}. \quad (17)$$

Заметим, что условие $p_0 > 1$ выполнено, так как

$$1+\varepsilon-2s > 0, \quad \frac{2(1+\varepsilon)(1-s)}{1+\varepsilon-2s} > 1 \iff \varepsilon > 2s-1, \quad 1+\varepsilon(1-2s) > 0.$$

Известно (см. [10, §4.3.2]), что при $0 < s < 1/2$

$$H^s(B) = \overset{\circ}{H}^s(B) = \tilde{H}^s(B).$$

С учетом эквивалентности норм (8) для p_0 , определенного в (17), имеем

$$\left[L_{p_0}(B), H_{1+\varepsilon}^1(B) \right]_s = \tilde{H}^s(B).$$

Согласно теореме [10, §1.18.5] для произвольного $\beta > 0$ мы можем интерполировать весовые пространства

$$\left[L_{p_0}(B) = L_{p_0,0}(B), L_{r,\beta}(B) \right]_s = L_{q, \frac{sq\beta}{r}}(B).$$

При этом $\frac{1-s}{p_0} + \frac{s}{r} = \frac{1}{q}$. Подставляя (17), находим

$$\frac{s}{r} = \frac{1-2s+\delta}{2} - \frac{1+\varepsilon-2s}{2(1+\varepsilon)},$$

т.е.

$$r = \frac{2s(1+\varepsilon)}{\varepsilon\delta} = \frac{2s(2s+\delta)}{\delta^2}. \quad (18)$$

Аналогично доказательству теоремы 3.2 определим проекторы в подпространства $G_{n,0}$ -инвариантных функций по формуле (14). Тогда в силу [10, §1.17.1]

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{L}_{p_0, G_{n,0}}(B), H_{1+\varepsilon}^{1,rad}(B) \right]_s &= \mathcal{H}_{G_{n,0}}^s(B), \\ \left[\mathcal{L}_{p_0, G_{n,0}}(B), \mathcal{L}_{r,\beta, G_{n,0}}(B) \right]_s &= \mathcal{L}_{q, \alpha_0, G_{n,0}}(B), \end{aligned}$$

где $\alpha_0 = \frac{sq\beta}{r}$.

Таким образом мы можем интерполировать оператор вложения между операторами T_0 и T_1 . Обозначим полученный оператор T_s . Тогда

$$T_s : \mathcal{H}_{G_{n,0}}^s(B) \rightarrow \mathcal{L}_{q, \alpha_0, G_{n,0}}(B)$$

является компактным и согласно интерполяционному неравенству

$$\|T_s\| \leq \|T_0\|^{1-s} \|T_1\|^s \leq C(n, q, s),$$

т.е. для радиальной функции u $\|u\|_{L_{q, \alpha_0}(B)} \leq C[u]_{\tilde{H}^s(B)}$ и (16) доказано.

Рассмотрим теперь случай $1/2 \leq s < 1$. Для произвольного $q \in [2, +\infty)$ существует $\sigma \in (0, 1/2)$, такое, что $q \in [2, 2_{1,\sigma}^*)$. Тогда

$$\mathcal{H}_{G_{n,0}}^s(B) \hookrightarrow \mathcal{H}_{G_{n,0}}^\sigma(B) \hookrightarrow \mathcal{L}_{q, \alpha_0, G_{n,0}}(B)$$

и оценка (16) также справедлива. $\square$

Замечание. Формула (18) показывает, что при приближении q к предельному показателю $2_{1,s}^*$ параметр r , а следовательно и β , неограниченно возрастает. В [16, теорема 2.1] показано, что тогда $\|T_1\|$ также неограниченно возрастает. То есть константа в (16) неограниченно возрастает при приближении q к предельному показателю. Однако показатель степени $\alpha_0 = \frac{sq\beta}{r}$ ограничен.

В частности, из леммы 3.2 следует компактность вложения

$$\mathcal{H}_{G_{n,0}}^s(B) \hookrightarrow \mathcal{L}_{q,\alpha,G_{n,0}}(B)$$

при всех $\alpha > \alpha_0$.

Теорема 3.3. Пусть $u \in \mathcal{H}_{G_{n,0}}^s$ – радиальная функция, $n \geq 2$, $q \in [2, 2_{1,s}^*)$. Тогда существует $\hat{\alpha}(n, s, q) > 0$, такое, что при $\alpha \geq \hat{\alpha}$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} [u]_{D, \tilde{H}^s(B)}^2 &\geq C \left(\frac{\alpha}{\ln \alpha} \right)^{2s-(1-2/q)} \|u\|_{L_{q,\alpha}(B)}^2, \\ [u]_{N, \tilde{H}^s(B)}^2 &\geq C \left(\frac{\alpha}{\ln \alpha} \right)^{2s-(1-2/q)} \|u\|_{L_{q,\alpha}(B)}^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Доказательство. Из (9) очевидно, что достаточно доказывать только (19).

Обозначим $r(\alpha) = 1 - \frac{2\kappa \ln \alpha}{\alpha}$, $R(\alpha) = 1 - \frac{\kappa \ln \alpha}{\alpha}$, где $\kappa = sq + 1$. Возьмем радиальную срезающую функцию $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, такую, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \in (0, r(\alpha)), \\ 1, & |x| \in (R(\alpha), +\infty). \end{cases}$$

и $|\nabla \varphi(x)| \leq C \cdot \frac{\alpha}{\ln \alpha}$. Тогда при $\alpha > \alpha_0$ (где α_0 определено в лемме 3.2) имеем

$$\begin{aligned} \left| \|u\|_{L_{q,\alpha}(B)} - \|\varphi u\|_{L_{q,\alpha}(B)} \right| &\leq \|(1-\varphi)u\|_{L_{q,\alpha}(B)} \leq \|u\|_{L_{q,\alpha}(B_{R(\alpha)})} \\ &\leq R(\alpha)^{\frac{\alpha-\alpha_0}{q}} \|u\|_{L_{q,\alpha_0}(B)} \leq C \alpha^{-\frac{\kappa}{q}} [u]_{\tilde{H}^s(B)}, \end{aligned}$$

где последнее неравенство верно в силу (16). Следовательно

$$\|\varphi u\|_{L_{q,\alpha}(B)} \geq \|u\|_{L_{q,\alpha}(B)} - C \alpha^{-\frac{\kappa}{q}} [u]_{\tilde{H}^s(B)}. \quad (20)$$

Если правая часть в (20) оказалась неположительная, то

$$[u]_{\tilde{H}^s(B)} \geq C \alpha^{\frac{sq+1}{q}} \|u\|_{L_{q,\alpha}(B)},$$

откуда немедленно следует (19). Поэтому далее считаем, что правая часть в (20) положительна.

В силу представления (3)

$$[\varphi u]_{D, \tilde{H}^s(B)}^2 = C_s \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(\varphi u)(x) - (\varphi u)(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy.$$

Заметим, что носитель подынтегральной функции можно представить в виде объединения множеств $D_0 \cup D_1 \cup D_2$, где

$$D_0 = \{r(\alpha) < |x| < 1, r(\alpha) < |y| < 1, |x - y| < 1 - r(\alpha)\},$$

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^n, r(\alpha) < |y| < 1\} \setminus D_0,$$

$$D_2 = \{y \in \mathbb{R}^n, r(\alpha) < |x| < 1\} \setminus D_0$$

(при этом $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$). Тогда

$$[\varphi u]_{D, \tilde{H}^s(B)}^2 \leq C_s \left(\iint_{D_0} + \iint_{D_1} + \iint_{D_2} \right) \frac{((\varphi u)(x) - (\varphi u)(y))^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy. \quad (21)$$

Справедливо неравенство

$$\begin{aligned} ((\varphi u)(x) - (\varphi u)(y))^2 &= \left(\varphi(x)(u(x) - u(y)) + u(y)(\varphi(x) - \varphi(y)) \right)^2 \\ &\leq 2\varphi^2(x)(u(x) - u(y))^2 + 2u^2(y)(\varphi(x) - \varphi(y))^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Оценим первый интеграл в (21). Для подынтегральной функции неравенство (22) дает оценку

$$((\varphi u)(x) - (\varphi u)(y))^2 \leq 2(u(x) - u(y))^2 + C \left(\frac{\alpha}{\ln \alpha} \right)^2 u^2(y) |x - y|^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
C_s \iint_{D_0} \frac{|(\varphi u)(x) - (\varphi u)(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy &\leq 2C_s \iint_{D_0} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} \\
&+ C \left(\frac{\alpha}{\ln \alpha}\right)^2 \int_{r(\alpha) < |y| < 1} u^2(y) dy \int_{|x-y| < 1-r(\alpha)} \frac{dx}{|x-y|^{n+2s-2}} \\
&\leq 2[u]_{D, \tilde{H}^s(B)}^2 + C \left(\frac{\alpha}{\ln \alpha}\right)^{2s} \int_{r(\alpha) < |y| < 1} u^2(y) dy (*) \\
&\leq 2[u]_{D, \tilde{H}^s(B)}^2 + C \left(\frac{\alpha}{\ln \alpha}\right)^{2s} (1-r(\alpha))^{2s} [u]_{D, \tilde{H}^s(B)}^2 = C[u]_{D, \tilde{H}^s(B)}^2. \quad (23)
\end{aligned}$$

Неравенство (*) следует из (11).

В силу симметрии интегралы по множествам D_1 и D_2 равны. Оценим второй интеграл в (21). Так как $0 \leq \varphi \leq 1$, неравенство (22) дает

$$((\varphi u)(x) - (\varphi u)(y))^2 \leq 2(u(x) - u(y))^2 + 2u^2(y).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
C_s \iint_{D_1} \frac{|(\varphi u)(x) - (\varphi u)(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy &\leq 2C_s \iint_{D_1} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} \\
&+ 2C_s \int_{r(\alpha) < |y| < 1} u^2(y) dy \int_{|x-y| \geq 1-r(\alpha)} \frac{dx}{|x-y|^{n+2s}} \\
&\leq 2[u]_{D, \tilde{H}^s(B)}^2 + C \left(\frac{\alpha}{\ln \alpha}\right)^{2s} \int_{r(\alpha) < |y| < 1} u^2(y) dy \leq C[u]_{D, \tilde{H}^s(B)}^2. \quad (24)
\end{aligned}$$

Подставляя (23) и (24) в (21), получим $[u]_{D, \tilde{H}^s(B)}^2 \geq C[\varphi u]_{D, \tilde{H}^s(B)}^2$.

Тогда (20) дает оценку

$$\begin{aligned}
\frac{[u]_{D, \tilde{H}^s(B)}}{\|u\|_{L_{q,\alpha}(B)} - C\alpha^{-\frac{s}{q}} [u]_{D, \tilde{H}^s(B)}} &\geq C \frac{[\varphi u]_{D, \tilde{H}^s(B)}}{\|\varphi u\|_{L_{q,\alpha}(B)}} \\
&\geq C \left(\frac{\alpha}{\ln \alpha}\right)^{-n/2+s+n/q} \frac{[v]_{D, \tilde{H}^s(K)}}{\|v\|_{L_q(K)}},
\end{aligned}$$

где $v(x) = (\varphi u)\left(\frac{2\pi \ln \alpha}{\alpha} x\right)$ – радиальная функция в кольце

$$K = K_{\frac{\alpha}{2\pi \ln \alpha} - 1, \frac{\alpha}{2\pi \ln \alpha}}$$

ширины 1. В [14, теорема 1] показано, что для радиальных функций в кольце единичной ширины справедлива оценка

$$\frac{[v]_{D, \tilde{H}^s(K)}}{\|v\|_{L_q(K)}} \geq C \left(\frac{\alpha}{\ln \alpha} \right)^{(n-1)(1/2-1/q)}.$$

Окончательно,

$$\frac{[u]_{D, \tilde{H}^s(B)}}{\|u\|_{L_{q,\alpha}(B)} - C\alpha^{-\frac{\varkappa}{q}} [u]_{D, \tilde{H}^s(B)}} \geq C \left(\frac{\alpha}{\ln \alpha} \right)^{s-(1/2-1/q)},$$

то есть

$$\left(1 + C\alpha^{-\frac{\varkappa}{q}} \left(\frac{\alpha}{\ln \alpha} \right)^{s-(1/2-1/q)} \right) [u]_{\tilde{H}^s(B)} \geq C \left(\frac{\alpha}{\ln \alpha} \right)^{s-(1/2-1/q)} \|u\|_{L_{q,\alpha}}.$$

При $\varkappa = sq + 1$ $C\alpha^{-\frac{\varkappa}{q}} \left(\frac{\alpha}{\ln \alpha} \right)^{s-(1/2-1/q)} = o(1)$ при $\alpha \rightarrow +\infty$ и (19) доказано. $\square$

Замечание. При $m = n$ показатели степени в оценках, полученных в теоремах 3.2 и 3.3 совпадают. То есть на самом деле теорема 3.2 верна для произвольных допустимых (m, k) -разложений.

§4. СУЩЕСТВОВАНИЕ И МНОЖЕСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ

Определим функционалы

$$Q_D(u) = \frac{[u]_{D, \tilde{H}^s(B)}^2}{\|u\|_{L_{q,\alpha}(B)}^2}, \quad Q_N(u) = \frac{[u]_{D, \tilde{N}^s(B)}^2}{\|u\|_{L_{q,\alpha}(B)}^2}.$$

Покажем, что минимайзеры этих функционалов по подпространствам $\mathcal{H}_G^s$ для различных замкнутых подгрупп $G \subset O(n)$ являются положительными обобщенными решениями уравнения (1).

Лемма 4.1. Пусть G – замкнутая подгруппа в $O(n)$, и подпространство $\mathcal{H}_G^s(B)$ компактно вкладывается в весовое подпространство $\mathcal{L}_{q,G}(B)$. Тогда функционалы Q_D и Q_N достигают на $\mathcal{H}_G^s$ ненулевого минимума и минимайзер после домножения на подходящую константу дает положительное решение задачи (1).

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 5 [14]. Для удобства читателя приведем его полностью.

В силу однородности функционалов Q_D и Q_N их можно минимизировать на множестве функций с единичной $L_{q,\alpha}$ -нормой, на котором

$Q_D(u) = [u]_{D, \tilde{H}^s(B)}^2$ и $Q_N(u) = [u]_{N, \tilde{H}^s(B)}^2$. По условию это множество слабо замкнуто в $\mathcal{H}_G^s(B)$, и коэрцитивный, выпуклый функционал достигает на нем наименьшего значения.

Заметим, что уравнения Эйлера для функционалов Q_D и Q_N после подходящей перенормировки минимайзера совпадают с равенствами (5) и (6) соответственно, которые выполнены для всех приращений $h \in \mathcal{H}_G^s(B)$.

Функционалы Q_D и Q_N инвариантны под действием компактной группы Ли G . Поэтому в силу принципа симметричной критичности (см. [17]) первый дифференциал функционалов Q_D и Q_N обращается в нуль не только на приращениях из подпространства $h \in \mathcal{H}_G^s(B)$, но и на всех $h \in \tilde{H}^s(B)$.

Осталось показать, что минимизирующая функция положительна в B .

Известно (см. [13, теорема 3]), что если $u \in \tilde{H}^s(B)$, $s \in (0, 1)$, то $|u| \in \tilde{H}^s(B)$, причем для норм Дирихле и Навье справедливы неравенства

$$[u]_{\tilde{H}^s(B)} \geq [|u|]_{\tilde{H}^s(B)}.$$

Следовательно, минимизирующая функция неотрицательна в B . Положительность минимайзеров следует из строгого принципа максимума [18, теорема 2.6] и [19, теорема 2.5]. $\square$

Теорема 4.1. *При $n \geq 2$ и $q \in (2, 2_{1,s}^*)$ существует $\hat{\alpha}(n, q, s)$, такое, что при $\alpha > \hat{\alpha}$ задача (1) имеет радиальное решение.*

Доказательство. В силу теоремы 3.3 оператор вложения $\mathcal{H}_{G_{n,0}}^s \hookrightarrow \mathcal{L}_{q,\alpha,G_{n,0}}$ компактный. Тогда лемма 4.1 обеспечивает существование положительного решения задачи (1). Значение $\hat{\alpha}$ здесь такое же, как и в теореме 3.3. $\square$

Теорема 4.2. *При $n \geq 4$ и $q \in (2, 2_{n-m+1,s}^*)$ существует $\hat{\alpha}(m, n, q, s)$, такое, что при $\alpha > \hat{\alpha}(m, n, q, s)$ задача (1) имеет (m, k) -радиальное решение. При достаточно больших α решения соответствующие различным значениям m существенно различны (т.е. не получаются друг из друга поворотом).*

Доказательство. Случай $m = n$ доказан в теореме 4.1. При $m < n$ теорема 3.2 обеспечивает компактность вложения

$$\mathcal{H}_{G_{m,k}}^s(B) \hookrightarrow \mathcal{L}_{q,\alpha,G_{m,k}}(B).$$

Тогда лемма 4.1 доказывает существование положительного решения задачи (1).

При всех допустимых m для (m, k) -радиального решения (1) теоремы 3.1 и 3.2 дают двустороннюю оценку норм

$$\begin{aligned} C \left(\frac{\alpha}{\ln \alpha} \right)^{s-(n-m+1)(1/2-1/q)} \|u\|_{L_{q,\alpha}(B)}^{\leq} [u]_{\tilde{H}^s(B)} \\ \leq C \alpha^{s-(n-m+1)(1/2-1/q)} \|u\|_{L_{q,\alpha}(B)}. \end{aligned}$$

При разных значениях m функционалы Q_D и Q_N имеют различные степени роста по α , следовательно минимайзеры по разным подпространствам не могут совпадать при достаточно больших α . $\square$

Выделим класс G , обеспечивающий множественность решений задачи (1) при достаточно больших α .

Пусть $n \neq 3$. Рассмотрим $(2, n-2)$ допустимое разложение пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим G_l группу, порождаемую поворотом на угол $2\pi/l$, $l \in \mathbb{N}$.

Теорема 4.3. Пусть $n \neq 3$, $q \in (2, 2_{n,s}^*)$. Для любого $N \in \mathbb{N}$ существует

$\alpha_N = \alpha_N(n, q, s, N)$, такое, что при любом $\alpha > \alpha_N$ и для всех $2 \leq l \leq N$ существует $(2, n-2)$ -симметричное, G_l -инвариантное решение задачи (1), причем решения с различными l существенно различны.

Доказательство. Дословно повторяет доказательство теоремы 6 [14]. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C. V. Coffman, *A nonlinear boundary value problem with many positive solutions.* — J. Diff. Eq. **54** (1984), 429–437.
2. Y. Y. Li, *Existence of many positive solutions of semilinear elliptic equations on annulus.* — J. Diff. Eq. **83** (1990), 348–367.
3. J. Byeon, *Existence of many nonequivalent nonradial positive solutions of semilinear elliptic equations on three-dimensional annuli.* — J. Diff. Eq. **136** (1997), 136–165.
4. А. И. Назаров, *О решениях задачи Дирихле для уравнения, включающего р-лапласиан, в сферическом слое.* Труды СПбМО. **10** (2004), 33–62.
5. А. П. Щеглова, *Множественность решений одной краевой задачи с нелинейным условием Неймана.* — Пробл. мат. анализа. **30** (2005), 121–144.
6. D. Smets, M. Willem, J. Su, *Non-radial ground states for the Hénon equation.* — Commun. Contemp. Math. **4**, No. 3 (2002), 467–480.

7. А. И. Назаров, *Об “одномерности” экстремали в неравенстве Фридрикса для сферического и плоского слоя.* — Пробл. мат. анализа. **20** (2000), 171–190.
8. S. B. Kolonitskii, A. I. Nazarov, *Multiplicity of solutions to the Dirichlet problem for generalized Hénon equation.* — J. of Math. Sc. **144**, No. 6 (2007), 4624–4644.
9. M. Hénon, *Numerical experiments on the stability of spherical stellar systems.* — Astronomy Astrophysics **24** (1973), 229–238.
10. К. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.* Мир, М., 1980.
11. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Наука и техника, Минск, 1987.
12. R. Musina, A. I. Nazarov, *On fractional Laplacians.* — Comm. Part. Diff. Eq. **39**, No. 9 (2014), 1780–1790.
13. R. Musina, A. I. Nazarov, *On the Sobolev and Hardy constants for the fractional Navier Laplacian.* Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. **121** (2015), 123–129.
14. Н. С. Устинов, *Множественность решений краевых задач с дробными лапласианами Дирихле и Навье.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **459** (2017), 104–126.
15. С. В. Иванов, А. И. Назаров, *О теоремах вложения Соболева с весом для функций с симметриями.* — Алгебра и анализ **18**, No. 1 (2006), 108–123.
16. А. П. Щеглова, *Задача Неймана для обобщенного уравнения Хенона.* — Пробл. мат. анал. **95** (2018), 103–114.
17. R. S. Palais, *The principle of symmetric criticality.* — Comm. in Math. Phys. **69** (1979), 19–30.
18. A. Capella, J. Dávila, L. Dupaigne, Y. Sire, *Regularity of radial extremal solutions for some non-local semilinear equations.* — Comm. Part. Diff. Eqs. **36**, No. 8 (2011), 1353–1384.
19. A. Iannizzotto, S. Mosconi, M. Squassina, *H^s versus C^0 -weighted minimizers.* — NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **22**, No. 3 (2015), 477–497.

Shcheglova A. P., Multiplicity of positive solutions for the generalized Hénon equation with fractional Laplacian.

We consider the equation $(-\Delta)^s u = |x|^\alpha |u|^{q-2} u$ in the unit ball. We show that there exist arbitrarily many nonequivalent positive solutions for $2 < q < \frac{2n}{n-2s}$ and sufficiently large α . Also the existence of a radial solution for some supercritical values of the q and sufficiently large α is proved.

С.-Петербургский государственный
электротехнический университет “ЛЭТИ”
E-mail: apshcheglova@etu.ru

Поступило 5 декабря 2019 г.