Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 489, 2020 г.

В. Е. Федоров

О ПОРОЖДЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКОГО В СЕКТОРЕ РАЗРЕШАЮЩЕГО СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ПОРЯДКА

§1. Введение

В последние годы появился ряд работ, посвященных дифференциальным уравнениям распределенного (по-другому, континуального) порядка [1–3]. Такие уравнения все чаще появляются при исследовании прикладных задач, при описании различных физических или технических процессов в теории вязкоупругости [4], в кинетической теории [5] и др. [6, 7]. Некоторые работы касаются исследования вопросов существования и единственности решения, качественных свойств решений уравнений распределенного порядка [8–13], численного поиска решений краевых задач для таких уравнений [14, 15].

Автором ранее [16, 17] был изучен класс уравнений с производной Герасимова–Капуто распределенного порядка и с линейным *ограниченным* оператором A в банаховом пространстве $\mathfrak{Z}$

$$\int_a^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z(t) d\alpha = Az(t) + g(t), \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

где $m-1 < b \leqslant m \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant a < b$, $\omega : [a, b] \to \mathbb{C}$, $T > 0$, $g : [0, T] \to \mathfrak{Z}$. Получен явный вид решения, определяемый разрешающими операторами однородного уравнения. Результаты об уравнении (1) использованы при исследовании неразрешимого относительно распределенной

Ключевые слова: дробная производная Герасимова–Капуто, дифференциальное уравнение распределенного порядка, дифференциальное уравнение в банаховом пространстве, задача Коши, начально-краевая задача.

Работа поддержана Постановлением 211 Правительства РФ, договор 02.A03.21.0011, и Министерством науки и высшего образования РФ, госзадание No. 1.6462.2017/БЧ.

производной уравнения

$$\int_a^b \omega(\alpha) D_t^\alpha Lx(t)d\alpha = Mx(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

с вырожденным линейным ограниченным оператором $L : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $\ker L \neq \{0\}$, и (L,p)-ограниченным [18] линейным замкнутым плотно определенным в $\mathfrak{X}$ оператором $M : D_M \to \mathfrak{Y}$. Здесь $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – банаховы пространства, функция $f : [0,T] \to \mathfrak{Y}$.

В данной работе получены необходимые и достаточные условия существования аналитического в секторе разрешающего семейства операторов однородного уравнения (1) ($g \equiv 0$) с линейным замкнутым, вообще говоря, *неограниченным* оператором A при $b \leqslant 1$. Затем получены две версии теоремы об однозначной разрешимости задачи Коши для неоднородного уравнения (1): с условием повышенной гладкости функции g по пространственным переменным (условие непрерывности в норме графика оператора A) и с условием ее повышенной гладкости по временной переменной (условие гёльдеровости по t). Абстрактные результаты получены с использованием теории преобразования Лапласа и представляют собой распространение на случай уравнений распределенного порядка некоторых результатов аналитической теории полугрупп операторов [19, 20] и ее обобщений на случай интегральных уравнений [21, 22], дробных дифференциальных уравнений [23]. Условия однозначной разрешимости уравнения (1) использованы при исследовании одного класса начально-краевых задач для уравнений с многочленами от эллиптического дифференциального по пространственным переменным оператора.

§2. Однородное уравнение

При $\beta > 0$, $t > 0$ обозначим $g_\beta(t) := t^{\beta-1}/\Gamma(\beta)$,

$$J_t^\beta h(t) := \int_0^t g_\beta(t-s)h(s)ds = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}h(s)ds.$$

Пусть $\alpha \in (0,1]$, D_t^1 – обычная производная 1-го порядка, D_t^α – производная Герасимова–Капуто (подробнее см. в [23]), т.е. $D_t^\alpha h(t) := D_t^1 J_t^{1-\alpha}\left(h(t) - h(0)\right)$.

Пусть $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $\mathfrak{Z}$ – банахово пространство. Преобразование Лапласа функции $h : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{Z}$ обозначим через $\mathfrak{L}[h]$. Преобразование Лапласа дробной производной Герасимова–Капуто порядка $\alpha \in (0, 1]$ удовлетворяет равенству

$$\mathfrak{L}[D_t^\alpha h](\lambda) = \lambda^\alpha \mathfrak{L}[h](\lambda) - \lambda^{\alpha-1} h(0). \tag{3}$$

Обозначим $S_{\theta,a} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta,\ \mu \neq a\}$ при $\theta \in (\pi/2, \pi]$, $a \in \mathbb{R}$, $\Sigma_\psi := \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \psi,\ t \neq 0\}$ при $\psi \in (0, \pi/2]$.

Далее нам понадобится следующая теорема.

Теорема 1 ([21, Теорема 0.1, с. 5], [24, Теорема 2.6.1, с. 84])**.** *Пусть $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{X}$ – банахово пространство, задано $H : (a, \infty) \to \mathfrak{X}$. Следующие утверждения эквивалентны.*

(i) *Существует аналитическая функция $F : \Sigma_{\theta_0 - \pi/2} \to \mathfrak{X}$, при любом $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ существует такое $C(\theta) > 0$, что для всех $t \in \Sigma_{\theta - \pi/2}$ выполняется неравенство $\|F(t)\|_\mathfrak{X} \leqslant C(\theta) e^{a \operatorname{Re} t}$; при $\lambda > a$ $\mathfrak{L}[F](\lambda) = H(\lambda)$.*

(ii) *Функция H аналитически продолжима на $S_{\theta_0,a}$, при любом $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ найдется такое $K(\theta) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta,a}$*

$$\|H(\lambda)\|_\mathfrak{X} \leqslant \frac{K(\theta)}{|\lambda - a|}.$$

Обозначим через $\mathcal{L}(\mathfrak{Z})$ банахово пространство всех линейных непрерывных операторов из $\mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{Z}$, через $\mathcal{C}l(\mathfrak{Z})$ – множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в $\mathfrak{Z}$, действующих в пространство $\mathfrak{Z}$.

При $A \in \mathcal{C}l(\mathfrak{Z})$ рассмотрим задачу Коши

$$z(0) = z_0 \tag{4}$$

для уравнения распределенного порядка

$$\int_0^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z(t) d\alpha = Az(t), \quad t > 0, \tag{5}$$

где $0 < b \leqslant 1$, $\omega : [0, b] \to \mathbb{C}$. Под решением задачи (4), (5) будем понимать такую функцию $z \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{Z}) \cap C(\mathbb{R}_+; D_A)$, что существует $\int_0^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z(t) d\alpha \in C(\mathbb{R}_+; \mathfrak{Z})$ и выполняются равенства (4) и (5) при $t > 0$. Чтобы подчеркнуть соответствие начальным данным z_0, будем при необходимости записывать решение задачи (4), (5) в виде $z(t; z_0)$.

Сразу отметим, что если в исходной задаче интеграл берется от некоторого $c \in (0,b)$ до b, то соответствующее уравнение также можно записать в виде (5), положив $\omega(\alpha) \equiv 0$ при $\alpha \in (0,c)$.

Обозначим

$$W(\lambda) := \int\limits_0^b \omega(\alpha)\lambda^\alpha d\alpha.$$

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $0 < b \leqslant 1$, $\omega \in L_1(0,b)$. *Тогда* W *– аналитическая функция на множестве* $\mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0\}$.

Лемма 2. *Пусть* $0 < b \leqslant 1$, ω *– кусочно-непрерывная функция на* $(0,b)$, *непрывная слева в точке* b, $\omega(b) \neq 0$. *Тогда для* $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geqslant 0$

$$\exists C > 0 \quad \exists \varepsilon \in (0,b) \quad \exists \varrho > 0 \qquad \forall \lambda \in S_{\theta_0,a_0} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \varrho\} \quad |W(\lambda)| \geqslant C|\lambda|^\varepsilon. \tag{6}$$

Доказательство. При $c > 0$, достаточно близком к b, имеем для некоторого $C_1 = C_1(\varepsilon_1) > 0$ и всех достаточно больших $|\lambda|$

$$\left|\int\limits_c^b \omega(\alpha)\lambda^\alpha d\alpha\right| = |\omega(\xi)| \left|\int\limits_c^b \lambda^\alpha d\alpha\right| = |\omega(\xi)| \left|\frac{\lambda^b - \lambda^c}{\ln\lambda}\right| \geqslant C_1|\lambda|^{\varepsilon_1}$$

для некоторого $\xi \in (c,b)$ и любого $\varepsilon_1 \in (c,b)$. Таким образом, при $\varepsilon \in (c,\varepsilon_1)$ для некоторого $C > 0$ и достаточно больших $|\lambda|$

$$\left|\int\limits_0^b \omega(\alpha)\lambda^\alpha d\alpha\right| \geqslant C_1|\lambda|^{\varepsilon_1} - |\lambda|^c \int\limits_0^c |\omega(\alpha)| d\alpha \geqslant C|\lambda|^\varepsilon. \qquad \square$$

Семейство операторов $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}) : t \geqslant 0\}$ называется *разрешающим* для уравнения (5), если выполняются следующие условия:

(i) оператор-функция $S(t)$ сильно непрерывна при $t \geqslant 0$, $S(0) = I$;

(ii) $S(t)[D_A] \subset D_A$, $S(t)Ax = AS(t)x$ при всех $x \in D_A$, $t \geqslant 0$;

(iii) $S(t)z_0$ – решение задачи Коши (4), (5) при всех $z_0 \in D_A$.

Разрешающее семейство операторов называется *аналитическим*, если оно аналитически продолжимо в сектор Σ_{ψ_0} при некотором $\psi_0 \in (0,\pi/2]$. Аналитическое разрешающее семейство $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}) : t \geqslant 0\}$

имеет тип (ψ_0, a_0) при некоторых $\psi_0 \in (0, \pi/2]$, $a_0 \in \mathbb{R}$, если при любых $\psi \in (0, \psi_0)$, $a > a_0$ существует такое $C(\psi, a)$, что для всех $t \in \Sigma_\psi$ выполняется неравенство $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})} \leqslant C(\psi, a)e^{a \operatorname{Re} t}$.

Замечание 1. Аналогичные понятия разрешающего семейства операторов, аналитического разрешающего семейства операторов используются при исследовании интегральных эволюционных уравнений [21], дифференциальных уравнений дробного порядка [23].

Пусть оператор $A \in \mathcal{C}l(\mathfrak{Z})$ удовлетворяет следующим условиям:

1) существуют такие $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geqslant 0$, что при $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ имеем $W(\lambda) \in \rho(A)$;

2) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ найдется такое $K(\theta, a) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$

$$\|(W(\lambda)I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})} \leqslant \frac{|\lambda| K(\theta, a)}{|W(\lambda)||\lambda - a|}.$$

Тогда будем говорить, что оператор A принадлежит классу $\mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$.

Через $\operatorname{Lap}(\mathfrak{Z})$ обозначим множество функций $x : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{Z}$, для которых определено преобразование Лапласа.

Обозначим

$$Z_0(t) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} W(\lambda) \left(W(\lambda)I - A \right)^{-1} d\lambda, \tag{7}$$

где $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_\pm = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + re^{\pm i\theta},\ r \in (\delta, \infty)\}$, $\Gamma_0 = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + \delta e^{i\varphi},\ \varphi \in (-\theta, \theta)\}$ при некоторых $\delta > 0$, $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$. В случае $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$ операторы $Z_0(t)$ определены при $t > 0$.

Теорема 2. *Пусть* $0 < b \leqslant 1$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geqslant 0$, $\omega \in L_1(0, b)$, W *удовлетворяет условию* (6). *Тогда существует аналитическое разрешающее семейство операторов типа* $(\theta_0 - \pi/2, a_0)$ *уравнения* (5) *в том и только в том случае, когда* $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$. *При этом разрешающее семейство операторов единственно, имеет вид* (7) *и при* $z_0 \in D_A$ *функция* $z(t) = Z_0(t)z_0$ *является единственным решением задачи* (4), (5) *в пространстве* $\operatorname{Lap}(\mathfrak{Z})$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$, $R > \delta$,

$$\Gamma_R = \bigcup_{k=1}^{4} \Gamma_{k,R}, \quad \Gamma_{1,R} = \Gamma_0, \quad \Gamma_{2,R} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + Re^{i\varphi},\ \varphi \in (-\theta, \theta)\},$$

$$\Gamma_{3,R} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + re^{i\theta},\ r \in [\delta, R]\},$$
$$\Gamma_{4,R} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + re^{-i\theta},\ r \in [\delta, R]\},$$

Γ_R – положительно ориентированный замкнутый контур. Рассмотрим также контуры

$$\Gamma_{5,R} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + re^{i\theta},\ r \in [R, \infty)\},$$
$$\Gamma_{6,R} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + re^{-i\theta},\ r \in [R, \infty)\},$$

тогда $\Gamma = \Gamma_{5,R} \cup \Gamma_{6,R} \cup \Gamma_R \setminus \Gamma_{2,R}$.

При $t > 0$, $z_0 \in D_A$ имеем

$$Z_0(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} W(\lambda)\left(W(\lambda)I - A\right)^{-1} z_0 d\lambda$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda z_0 + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\left(W(\lambda)I - A\right)^{-1} Az_0 d\lambda.$$

Для $t \in [0, 1]$, $\lambda \in \Gamma \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \varrho\}$

$$\left\|\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\left(W(\lambda)I - A\right)^{-1} Az_0\right\|_{\mathfrak{Z}} \leqslant \frac{e^{a+\delta}K(\theta, a)\|Az_0\|_{\mathfrak{Z}}}{|W(\lambda)||\lambda - a|} \leqslant \frac{C_1}{|\lambda|^{1+\varepsilon}},$$

поэтому

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\left(W(\lambda)I - A\right)^{-1} Az_0 d\lambda\right\|_{\mathfrak{Z}} \leqslant C_2.$$

Следовательно, интеграл $Z_0(t)$ сходится равномерно по $t \in [0, 1]$ и по непрерывности

$$Z_0(0)z_0 = z_0 + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda}\left(W(\lambda)I - A\right)^{-1} Az_0 d\lambda$$
$$= z_0 + \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma_R} - \int_{\Gamma_{2,R}} + \int_{\Gamma_{5,R}} + \int_{\Gamma_{6,R}}\right)\frac{1}{\lambda}\left(W(\lambda)I - A\right)^{-1} Az_0 d\lambda = z_0,$$

так как по теореме Коши

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{\lambda}\left(W(\lambda)I - A\right)^{-1} Az_0 d\lambda = 0,$$

при этом

$$\left\| \int\limits_{\Gamma_{s,R}} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} \left(W(\lambda)I - A\right)^{-1} Az_0 d\lambda \right\|_{\mathfrak{Z}} \leqslant \frac{C_3}{R^{\varepsilon}}, \quad s = 2, 5, 6.$$

Следовательно, $Z_0(\cdot)z_0 \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{Z})$, функция $z(t) := Z_0(t)z_0$ удовлетворяет условию Коши (4). Учитывая замкнутость оператора A и его коммутирование с операторами $(W(\lambda)I - A)^{-1}$ на D_A, при $z_0 \in D_A$ выполняется также включение $AZ_0(\cdot)z_0 \in C(\mathbb{R}_+; \mathfrak{Z})$, т.е. $z(\cdot) := Z_0(\cdot)z_0 \in C(\mathbb{R}_+; D_A)$.

При $\operatorname{Re}\mu > a$ имеем

$$\mathfrak{L}[Z_0](\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{W(\lambda)}{\lambda(\mu - \lambda)} \left(W(\lambda)I - A\right)^{-1} d\lambda.$$

Поскольку $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$, то

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{s,R}} \frac{W(\lambda)}{\lambda(\mu - \lambda)} \left(W(\lambda)I - A\right)^{-1} d\lambda = 0, \quad s = 2, 5, 6.$$

Поэтому по интегральной формуле Коши

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[Z_0](\mu) &= \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{W(\lambda)}{\lambda(\mu - \lambda)} \left(W(\lambda)I - A\right)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{W(\mu)}{\mu} \left(W(\mu)I - A\right)^{-1}. \end{aligned}$$

В силу теоремы 1 отсюда получаем аналитичность отображения $Z_0 : \Sigma_{\theta_0 - \pi/2} \to \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$ и тот факт, что при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ найдется такое $C(\theta, a) > 0$, что $\|Z_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})} \leqslant C(\theta, a)e^{a\operatorname{Re} t}$ при всех $t \in \Sigma_{\theta - \pi/2}$. Поэтому $z \in \operatorname{Lap}(\mathfrak{Z})$.

Далее для $z(t) = Z_0(t)z_0$ при $z_0 \in D_A$

$$\mathfrak{L}[Az](\mu) = \frac{W(\mu)}{\mu} \left(W(\mu)I - A\right)^{-1} Az_0.$$

Следовательно, $\mathfrak{L}[z](\mu) \in D_A$, $A\mathfrak{L}[z](\mu) = \mathfrak{L}[Az](\mu)$, $\mathfrak{L}[z](\mu)$ и $\mathfrak{L}[Az](\mu)$ имеют аналитические продолжения на S_{θ_0, a_0}, так как $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$.

С помощью формулы (3) преобразования Лапласа получим

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^b \omega(\alpha)D_t^\alpha z(t)d\alpha\right](\mu) = \frac{(W(\mu))^2}{\mu}\left(W(\mu)I - A\right)^{-1} z_0 - \frac{W(\mu)}{\mu}z_0$$

$$= \frac{W(\mu)}{\mu}\left(W(\mu)I - A\right)^{-1} Az_0 = \mathfrak{L}[Az](\mu).$$

Применим обратное преобразование Лапласа к обеим частям полученного равенства и получим равенство (5) во всех точках непрерывности функции Az, т.е. для всех $t \geqslant 0$. Таким образом, z – решение задачи (4), (5) и $\{Z_0(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}) : t \geqslant 0\}$ – аналитическое разрешающее семейство операторов типа $(\theta_0 - \pi/2, a_0)$ уравнения (5).

Пусть существует аналитическое разрешающее семейство операторов $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}) : t \geqslant 0\}$ типа $(\theta_0 - \pi/2, a_0)$ уравнения (5), обозначим $\mathfrak{L}[S](\lambda) := H(\lambda)$, $\lambda > a_0$. Из уравнения (5) с учетом пункта (ii) определения разрешающего семейства получим равенства при $z_0 \in D_A$

$$\int_0^b \omega(\alpha)D_t^\alpha S(t)z_0 d\alpha = AS(t)z_0 = S(t)Az_0,$$

отсюда в силу замкнутости оператора A при $\lambda > a_0$ $H(\lambda)[D_A] \subset D_A$,

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^b \omega(\alpha)D_t^\alpha S(t)z_0 d\alpha\right](\lambda) = W(\lambda)H(\lambda)z_0 - \frac{W(\lambda)}{\lambda}z_0$$

$$= H(\lambda)Az_0 = AH(\lambda)z_0.$$

Поэтому оператор $W(\lambda)I - A : D_A \to \mathfrak{Z}$ биективен и

$$H(\lambda) = \frac{W(\lambda)}{\lambda}(W(\lambda)I - A)^{-1}, \quad \lambda > a_0.$$

По теореме 1 отсюда следует, что $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$.

Если существует два решения z_1, z_2 задачи (4), (5) из класса $\mathrm{Lap}(\mathfrak{Z})$, то их разность $y = z_1 - z_2 \in \mathrm{Lap}(\mathfrak{Z})$ является решением уравнения (5) и удовлетворяет начальному условию $y(0) = 0$. Действуя пеобразованием Лапласа на обе части уравнения (5) и учитывая начальное условие, получим равенство $W(\lambda)\mathfrak{L}[y](\lambda) = A\mathfrak{L}[y](\lambda)$. Так как $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$, при $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ получим тождество $\mathfrak{L}[y](\lambda) \equiv 0$. Оно означает, что $y \equiv 0$. Поэтому $z(t) = Z_0(t)z_0$ – единственное решение задачи (4), (5) при $z_0 \in D_A$ в пространстве $\mathrm{Lap}(\mathfrak{Z})$. $\square$

Замечание 2. Если рассматривать задачу (4), (5) на отрезке $[0,T]$, то при доказательстве единственности продолжим функцию y на $[T,\infty)$ непрерывным ограниченным образом и, рассуждая аналогично, получим единственность решения на отрезке.

Замечание 3. Нетрудно показать, что в условиях теоремы 2 при $z_0 \in D_{A^2}$ выполняется включение $Z_0(\cdot)z_0 \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; D_A)$, т. е. $Z_0(\cdot)z_0$ непрерывна в норме графика D_A в нуле и удовлетворяет уравнению (5) при $t = 0$.

§3. Неоднородное уравнение

Решением задачи Коши (4) для неоднородного уравнения

$$\int_0^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z(t) d\alpha = Az(t) + g(t), \quad t \in (0,T), \tag{8}$$

где $0 < b \leqslant 1$, $\omega : [0,b] \to \mathbb{C}$, $T > 0$, $g \in C([0,T]; \mathfrak{Z})$, называется такая функция $z \in C([0,T); \mathfrak{Z}) \cap C((0,T); D_A)$, что существует

$$\int_0^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z(t) d\alpha \in C((0,T); \mathfrak{Z})$$

и выполняются равенства (4) и (8).

Обозначим

$$Z(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} \left(W(\lambda)I - A\right)^{-1} d\lambda.$$

Заметим, что

$$Z_0(t) = \int_0^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-1} Z(t) d\alpha.$$

Сначала рассмотрим случай повышенной гладкости функции g по пространственным переменным ($g \in C([0,T]; D_A)$).

Лемма 3. *Пусть* $0 < b \leqslant 1$, $\omega \in L_1(0,b)$, W *удовлетворяет условию* (6), $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geqslant 0$, $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$, $g \in C([0,T]; D_A)$. *Тогда функция*

$$z_g(t) = \int_0^t Z(t-s) g(s) ds$$

является единственным решением задачи (4), (8) *с* $z_0 = 0$.

Доказательство. Нетрудно показать, что $Z(t)$ аналитически продолжима в сектор $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$. Исследуем поведение этой функции в окрестности нуля. В силу условия (6) и того, что $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$, имеем

$$\|Z(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})} \leqslant C_1 \int\limits_{\Gamma} \frac{e^{t\operatorname{Re}\lambda}}{|\lambda|^\varepsilon} ds.$$

При $t \in (0, 1]$ имеем

$$\int\limits_{\Gamma_0} \frac{e^{t\operatorname{Re}\lambda}}{|\lambda|^\varepsilon} ds \leqslant C_1 2\pi\delta^{1-\varepsilon} e^{a+\delta},$$

$$\int\limits_{\Gamma_\pm} \frac{e^{t\operatorname{Re}\lambda}}{|\lambda|^\varepsilon} ds \leqslant C_1 e^{at} \int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{e^{rt\cos\theta} dr}{r^\varepsilon} = C_1 e^{at} (-\cos\theta)^{\varepsilon-1} \Gamma(1-\varepsilon) t^{\varepsilon-1},$$

поэтому $\|Z(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})} = O(t^{\varepsilon-1})$ при $t \to 0+$. Следовательно, $\|z_g(t)\| \leqslant C_2 t^\varepsilon \to 0$ при $t \to 0+$. Поэтому начальное условие (4) с $z_0 = 0$ выполняется.

Определим $g(t) = 0$ при $t \geqslant T$, тогда мы имеем свертку $z_g = Z * g$, в таком случае $\mathfrak{L}[z_g] = \mathfrak{L}[Z]\mathfrak{L}[g]$. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 2, получим $\mathfrak{L}[Z](\mu) = (W(\mu)I - A)^{-1}$, так как в силу условия (6)

$$\left\| \frac{1}{\mu - \lambda} (W(\lambda)I - A)^{-1} \right\| \leqslant \frac{C_3}{|\lambda|^{1+\varepsilon}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\left[\int\limits_0^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z_g d\alpha\right](\mu) &= W(\mu) (W(\mu)I - A)^{-1} \mathfrak{L}[g](\mu) \\ &= \mathfrak{L}[g](\mu) + A (W(\mu)I - A)^{-1} \mathfrak{L}[g](\mu).\end{aligned}$$

Действуя обратным преобразованием Лапласа на обе части полученного равенства, получим

$$\int\limits_0^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z_g(t) d\alpha = g(t) + A(Z * g)(t) = g(t) + Az_g(t),$$

так как $g \in C([0,T];D_A)$ и в силу замкнутости оператора A конечна величина $A(Z * g)(t) = Z * Ag(t)$.

Доказательство единственности решения задачи стандартным образом сводится к доказательству единственности для однородной задачи. В силу замечания 2 получим требуемое. □

Теперь рассмотрим случай повышенной гладкости функции g по временно́й переменной.

Через $C^\gamma([0,T];\mathfrak{Z})$ при $\gamma \in (0,1]$ обозначим класс гельдеровых функций, т. е. функций $f : [0,T] \to \mathfrak{Z}$, для которых существует такое $C > 0$, что при всех $t, s \in [0,T]$ выполняется неравенство $\|f(t) - f(s)\|_{\mathfrak{Z}} \leqslant C|t-s|^\gamma$.

Лемма 4. *Пусть* $0 < b \leqslant 1$, $\omega \in L_1(0,b)$, W *удовлетворяет условию* (6), $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geqslant 0$, $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$, $g \in C^\gamma([0,T];\mathfrak{Z})$, $\gamma \in (0,1]$. *Тогда функция*

$$z_g(t) = \int_0^t Z(t-s)g(s)ds$$

является единственным решением задачи (4), (8) *с* $z_0 = 0$.

Доказательство. Имеем при $t \to 0+$, как при доказательстве предыдущей леммы, $\|Z(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})} = O(t^{\varepsilon-1})$, $\|z_g(t)\|_{\mathfrak{Z}} \leqslant C_2 t^\varepsilon$. При этом $\mathrm{im} Z(t) \subset D_A$ для $t > 0$, так как в силу аналитичности $Z_0(t)$

$$\begin{aligned} AZ(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma A(W(\lambda)I - A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma W(\lambda)(W(\lambda)I - A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda = D_t^1 Z_0(t). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\int_{\Gamma_\pm} \frac{|\lambda| e^{t\mathrm{Re}\,\lambda}}{|\lambda - a|}ds \leqslant e^{at}\int_\delta^\infty \frac{|re^{i\theta} + a|e^{rt\cos\theta}dr}{r} \leqslant \frac{C_1 e^{at}}{-t\cos\theta},$$

поэтому $\|AZ(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})} = O(t^{-1})$ при $t \to 0+$,

$$\|AZ(t-s)(g(s) - g(t))\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C_2|t-s|^{\gamma-1}.$$

Следовательно,

$$\int_0^t AZ(t-s)g(s)ds = \int_0^t AZ(t-s)(g(s)-g(t))ds + (Z_0(t)-I)g(t).$$

Таким образом, $z_g(t) \in D_A$, $z_g \in C((0,T);D_A)$.

В остальном доказательство не отличается от доказательства леммы 3. □

Из теоремы 2 и лемм 3 и 4 получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $0 < b \leqslant 1$, $\omega \in L_1(0,b)$, W *удовлетворяет условию* (6), $\theta_0 \in (\pi/2,\pi]$, $a_0 \geqslant 0$, $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0,a_0)$, $g \in C([0,T];D_A) \cup C^\gamma([0,T];\mathfrak{Z})$, $\gamma \in (0,1]$. *Тогда функция*

$$z(t) = Z_0(t)z_0 + \int_0^t Z(t-s)g(s)ds$$

является единственным решением задачи (4), (8).

§4. Приложение к начально-краевым задачам

Пусть $n < m$, заданы многочлены $P_n(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i\lambda^i$, $Q_m(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{m} d_j\lambda^j$, $c_i, d_j \in \mathbb{R}$, $i = 0,1,\ldots,n$, $j = 0,1,\ldots,m$, $c_n \neq 0$, $d_m \neq 0$. Предположим также, что $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, пучок операторов $\Lambda, B_1, B_2, \ldots, B_r$ регулярно эллиптичен [25, с. 454], где

$$(\Lambda u)(s) = \sum_{|q|\leqslant 2r} a_q(s)\frac{\partial^{|q|}u(s)}{\partial s_1^{q_1}\partial s_2^{q_2}\ldots\partial s_d^{q_d}}, \quad a_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l u)(s) = \sum_{|q|\leqslant r_l} b_{lq}(s)\frac{\partial^{|q|}u(s)}{\partial s_1^{q_1}\partial s_2^{q_2}\ldots\partial s_d^{q_d}}, \quad b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega), \quad l = 1,2,\ldots,r,$$

$q = (q_1,q_2,\ldots,q_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $|q| = q_1 + \cdots + q_d$. Определим оператор $\Lambda_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения $D_{\Lambda_1} = H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega)$ [25, с. 399] равенством $\Lambda_1 u = \Lambda u$. Предположим, что Λ_1 – самосопряженный оператор, тогда спектр $\sigma(\Lambda_1)$ оператора Λ_1 действительный и дискретный [25, Теорема 5.6.3, с. 499]. Пусть, кроме того, $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа и не содержит точки ноль, $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ – ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора Λ_1, занумерованных по невозрастанию соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$u(s,0) = u_0(s), \quad s \in \Omega, \tag{9}$$

$$B_l \Lambda^k u(s,t) = 0, \quad k = 0,1,\ldots,m-1, \quad l = 1,2,\ldots,r, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{10}$$

$$\int\limits_0^b \omega(\alpha) D_t^\alpha P_n(\Lambda) u(s,t) d\alpha = Q_m(\Lambda) u(s,t) + f(s,t), \quad (s,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{11}$$

где $0 < b \leqslant 1$, $\omega : [0,b] \to \mathbb{R}$, $f \in \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$. Положим

$$\mathfrak{X} = \{v \in H^{2rn}(\Omega) : B_l \Lambda^k v(s) = 0,\ k = 0,1,\ldots,n-1,\ l = 1,2,\ldots,r,\ x \in \partial\Omega\}, \tag{12}$$

$$\mathfrak{Y} = L_2(\Omega), \quad L = P_n(\Lambda), \quad M = Q_m(\Lambda), \tag{13}$$

$$D_M = \{v \in H^{2rm}(\Omega) : B_l \Lambda^k v(s) = 0,\ k = 0,1,\ldots,m-1,\ l = 1,2,\ldots,r,\ x \in \partial\Omega\}. \tag{14}$$

Тогда $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$. Пусть, кроме того, $P_n(\lambda_k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, тогда существует обратный оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})$ и задача (9)–(11) представима в виде (4), (8), где $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X}$, $A = L^{-1}M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{Z})$, $D_A = D_M$, $g(t) = L^{-1}f(\cdot,t)$, $z_0 = u_0(\cdot)$.

Лемма 5. *Пусть* $0 \leqslant b_0 < b \leqslant 1$, $\omega(\alpha) \equiv 0$ *при* $\alpha \in [0,b_0)$, $\omega \in C([b_0,b];\mathbb{R})$, $\omega(\alpha) \geqslant 0$ *при* $\alpha \in [b_0,b)$, $\omega(b) > 0$; $(-1)^{m-n} d_m/c_n < 0$, *спектр* $\sigma(\Lambda_1)$ *не содержит нуля и корней многочлена* $P_n(\lambda)$ *и выполняются обозначения* (12)–(14). *Тогда* $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$.

Доказательство. Имеем при заданных условиях

$$\lim_{k\to\infty} \frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} = -\infty,$$

поэтому при некотором $a_1 \geqslant 0$ и любом $\theta_0 \in (\pi/2,\pi)$ $Q_m(\lambda_k)/P_n(\lambda_k) \notin S_{\theta_0,a_1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Из леммы 1 следует, что $W(\lambda) := \int\limits_{b_0}^{b} \omega(\alpha)\lambda^\alpha d\alpha$ – аналитическая функция на множестве $\mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0\}$. По теореме о среднем $W(\lambda) = \omega(\xi)|\lambda|^\xi e^{i\xi \arg\lambda}$, где $0 \leqslant b_0 \leqslant \xi \leqslant b \leqslant 1$. Поэтому $\arg W(\lambda) = \xi \arg\lambda \in (-\theta_0 b, \theta_0 b)$ и $W(\lambda) \notin \mathbb{R}_-$.

Выберем $a_0 \geqslant \varrho/\sin\theta_0$, тогда $|\lambda| \geqslant \varrho$ для $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$. Если, кроме того,

$$a_0 > \frac{1}{\sin\theta_0}\left(\frac{1}{C}\max_{k\in\mathbb{N}}\frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right)^{1/\varepsilon}, \tag{15}$$

то в силу неравенства (6) для всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ имеем

$$W(\lambda) \neq Q_m(\lambda_k)/P_n(\lambda_k).$$

Имеем для $v \in \mathfrak{X}$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$, $\lambda \in S_{\theta,a}$

$$\begin{aligned} \|(W(\lambda)I - A)^{-1}v\|_{\mathfrak{X}}^2 &= \|(W(\lambda)I - P_n(\Lambda)^{-1}Q_m(\Lambda))^{-1}\|_{\mathfrak{X}}^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+\lambda_k^{2n})|\langle v,\varphi_k\rangle|^2}{|W(\lambda) - \frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}|^2} \\ &\leqslant C_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+\lambda_k^{2n})|\lambda|^2|\langle v,\varphi_k\rangle|^2}{|W(\lambda)|^2|1 - W(\lambda)^{-1}\frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}|^2|\lambda - a|^2} \\ &\leqslant \frac{C_1|\lambda|^2\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1+\lambda_k^{2n})|\langle v,\varphi_k\rangle|^2}{|W(\lambda)|^2|\lambda-a|^2\min\limits_{k\in\mathbb{N},\lambda\in S_{a,\theta}}|1 - W(\lambda)^{-1}\frac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}|^2} \\ &= \frac{K|\lambda|^2\|v\|_{\mathfrak{X}}^2}{|W(\lambda)|^2|\lambda-a|^2}. \end{aligned} \tag{16}$$

При этом использована отделенность величины $|\lambda|^2/|\lambda - a|^2$ от нуля при λ из выбранного сектора S_{θ_0,a_0}. Указанный выше минимум существует в силу ограниченности последовательности $\{Q_m(\lambda_k)/P_n(\lambda_k)\}$, непрерывности и ограниченности на бесконечности функции $W(\lambda)$ и положителен в силу (6) и (15). Таким образом, $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$. □

Из леммы 5 и теоремы 3 сразу получим следующий результат.

Теорема 4. *Пусть* $0 \leqslant b_0 < b \leqslant 1$, $\omega(\alpha) \equiv 0$ *при* $\alpha \in [0, b_0)$, $\omega \in C([b_0, b]; \mathbb{R})$, $\omega(\alpha) \geqslant 0$ *при* $\alpha \in [b_0, b)$, $\omega(b) > 0$; $(-1)^{m-n}d_m/c_n < 0$, *спектр* $\sigma(\Lambda_1)$ *не содержит нуля и корней многочлена* $P_n(\lambda)$, $u_0 \in$

D_M, $f \in C^\gamma([0,T]; L_2(\Omega))$, $\gamma \in (0,1]$. *Тогда существует единственное решение задачи* (9)–(11).

Пример. Возьмем $P_0(\lambda) \equiv 1$, $Q_1(\lambda) = \lambda$, $Au = \Delta u$, $r = 1$, $B_1 = I$, $f \equiv 0$. Тогда (9)–(11) представляет собой начально-краевую задачу для уравнения ультрамедленной диффузии [13]

$$\int_0^b \omega(\alpha) D_t^\alpha u(s,t) d\alpha = \Delta u(s,t), \quad (s,t) \in \Omega \times (0,T),$$

$$u(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times (0,T),$$

$$u(s,0) = u_0(s), \quad s \in \Omega.$$

Список литературы

1. А. М. Нахушев, *О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа.* — Дифференц. уравнения **34**, No. 1 (1998), 101–109.
2. M. Caputo, *Mean fractional order derivatives. Differential equations and filters.* — Annali dell'Universita di Ferrara. Sezione VII. Scie. Math., **XLI** (1995), 73–84.
3. M. Caputo, *Distributed order differential equations modeling dielectric induction and diffusion.* — Fract. Calcul. Appl. Analis., **4** (2001), 421–442.
4. C. F. Lorenzo, T. T. Hartley, *Variable order and distributed order fractional operators.* — Nonlinear Dynamics **29** (2002), 57–98.
5. M. Sokolov, A. V. Chechkin, J. Klafter, *Distributed-order fractional kinetics* — Act. Phys. Polonica B. **35** (2004), 1323–1341.
6. R. L. Bagley, P. J. Torvik, *On the existence of the order domain and the solution of distributed order equations. Part* 1. — International J. Appl. Math., **2**, No. 7 (2000), 865–882.
7. R. L. Bagley, P. J. Torvik, *On the existence of the order domain and the solution of distributed order equations. Part* 2. — International J. Appl. Math., **2**, No. 8 (2000), 965–987.
8. А. В. Псху, *К теории оператора интегро-дифференцирования континуального порядка.* — Дифференц. уравнения **40**, No. 1 (2004), 120–127.
9. А. В. Псху, *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М., Наука, 2005. 199 с.
10. T. M. Atanacković, L. Oparnica, S. Pilipović, *On a nonlinear distributed order fractional differential equation.* — J. Math. Analis. Appl., **328** (2007), 590–608.
11. Z. Jiao, Y. Chen, I. Podlubny, *Distributed-order dynamic system. Stability, simulations, applications and perspectives.* London: Springer-Verlag, 2012.
12. S. Umarov, R. Gorenflo, *Cauchy and nonlocal multi-point problems for distributed order pseudo-differential equations.* — Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen **24** (2005), 449–466.

13. A. N. Kochubei, *Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion.* — J. Math. Analis. Appl., **340** (2008), 252–280.
14. K. Diethelm, N. J. Ford, *Numerical solution methods for distributed order time fractional diffusion equation.* — Fract. Calc. Appl. Analis., **4** (2001), 531–542.
15. K. Diethelm, N. Ford, A. D. Freed, Y. Luchko, *Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods.* — Comput. Meth. Appl. Mechanics and Engineering **194**, No. 6-8 (2003), 743–773.
16. Е. М. Стрелецкая, В. Е. Федоров, А. Дебуш, *Задача Коши для уравнения распределенного порядка в банаховом пространстве.* — Мат. заметки СВФУ **25**, No. 1 (2018), 63–72.
17. V. E. Fedorov, E. M. Streletskaya, *Initial-value problems for linear distributed-order differential equations in Banach spaces* — Electron. J. Differential Equations **2018**, No. 176 (2018), 1–17.
18. G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov, *Linear sobolev type equations and degenerate semigroups of operators.* Utrecht, Boston: VSP, 2003.
19. E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups.* Providence: American Mathematical Society, 1957.
20. М. З. Соломяк, *Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах Банаха.* — Докл. АН СССР **122**, No. 5 (1958), 766–769.
21. J. Prüss, *Evolutionary Integral Equations and Applications.* Basel: Springer-Verlag, 1993.
22. M. Kostić, *Abstract volterra integro-differential equations.* Boca Raton: CRC Press, 2015.
23. E. G. Bajlekova, *Fractional Evolution Equations in Banach Spaces.* PhD Thesis. Eindhoven: Eindhoven University of Technology, University Press Facilities, 2001.
24. W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander, *Vector-valued laplace transforms and cauchy problems.* Basel: Springer Basel AG, 2011.
25. H. Triebel, *Interpolation theory. Function spaces. Differential operators.* Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1977.

Fedorov V. E. On generation of an analytic in a sector resolving operators family for a distributed order equation.

We investigate the unique solvability of the Cauchy problem for a class of differential equations of a distributed order not greater than one with an unbounded operator in a Banach space. The necessary and sufficient conditions for the existence of an analytic in the sector resolving family of operators for the homogeneous equation are obtained. Two versions of the theorem on the unique solvability of the Cauchy problem for the corresponding inhomogeneous equation are proved: with the condition of extra smoothness in spatial variables (the condition of continuity in the graph norm of the unbounded operator) functions in the right-hand side of the equation and its increased smoothness in the time variable (condition of Hölder continuity with respect to time). The results are obtained using the Laplace transform theory and represent the extension to the case of distributed order equations of some results of the analytical theory of operator semigroups and its generalizations to the case of integral equations, fractional differential equations. Abstract results are used in the study of a class of initial boundary value problems for equations with polynomials of an elliptic differential operator with respect to spatial variables.

Кафедра математического анализа,
математический факультет, Челябинский
государственный университет, Челябинск, Россия.
Лаборатория функциональных материалов,
Южно-Уральский государственный
университет (национальный исследовательский
университет), Челябинск, Россия
E-mail: kar@csu.ru

Поступило 16 декабря 2019 г.