Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 489, 2020 г.

В. В. Палин

КОНСТРУКЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ В СЛУЧАЕ ВОЛНЫ РАЗРЕЖЕНИЯ

§1. Введение

Рассмотрим задачу Римана для системы законов сохранения

$$\begin{cases} U_t + (\mathcal{F}(U))_x = 0, \\ U|_{t=0} = U_- + (U_+ - U_-)\,\theta(x), \end{cases} \tag{1}$$

где $U(t,x) = (U_1,\ldots,U_n)^T$ – неизвестная вектор-функция, U_- и U_+ – заданные постоянные векторы (левое и правое начальные состояния), $\theta(x)$ – функция Хевисайда, $\mathcal{F} \in C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ – заданная вектор-функция. Эта задача является естественным "строительным блоком", используемым при построении решения задачи Коши для этой же системы законов сохранения при помощи, например, схемы Годунова [2]. Однако, вопрос о виде решения такой задачи существенным образом зависит от структуры матрицы

$$A(U) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial U_j}\right)_{i,j=1}^{n}.$$

Напомним некоторые определения и известные факты.

Определение 1.1. Система законов сохранения (1) называется строго гиперболической, если для любого $U \in \mathbb{R}^n$ все собственные значения матрицы $A(U)$ вещественны и различны. Если же для любого $U \in \mathbb{R}^n$ все собственные значения матрицы $A(U)$ вещественны, и им соответствует n линейно независимых собственных векторов, то система (1) – нестрого гиперболическая по Фридрихсу. Наконец, если для любого $U \in \mathbb{R}^n$ все собственные значения матрицы $A(U)$ вещественны, то система (1) – нестрого гиперболическая по Петровскому.

Определение 1.2. Собственное значение $\lambda(U)$ матрицы $A(U)$ называется линейно вырожденным, если для него и соответствующего ему

Ключевые слова: задача Римана, нестрого гиперболические системы, геометрическое решение.

правого собственного вектора $r(U)$ для всех $U \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство $\nabla\lambda(U) \cdot r(U) = 0$. Если же, наоборот, для всех $U \in \mathbb{R}^n$ верно $\nabla\lambda(U) \cdot r(U) \neq 0$, то $\lambda(U)$ называется существенно нелинейным.

В случае, когда система (1) нестрого гиперболическая по Фридрихсу, имеет место следующая теорема [3]:

Теорема 1.1. *Пусть система* (1) *нестрого гиперболическая по Фридрихсу, все ее собственные значения либо линейно вырождены, либо существенно нелинейны, а скачок начальных состояний мал, т.е.* $|U_+ - U_-| \ll 1$. *Тогда существует единственное физически корректное решение задачи Римана* (1)*, которое представляет собой* $n+1$ *постоянное состояние, разделенные либо ударными волнами, либо волнами разрежения, либо контактными разрывами.*

Однако, техника, используемая при доказательстве этой теоремы, существенным образом опирается на наличие у матрицы $A(U)$ полного базиса из собственных векторов. С другой стороны, для приложений представляют интерес задачи типа системы уравнений мелкой воды для смеси двух жидкостей:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_t + v_x = 0, \\ v_t + (\frac{1}{2}v^2 + \phi)_x = 0, \\ w_t + (\frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{c_0}\phi)_x = 0, \end{array} \right. \tag{2}$$

где ϕ – высота смеси, v – средняя скорость смеси, w – скорость одной из компонент смеси, $c_0 = \text{const}$ – концентрация этой компоненты. Нетрудно видеть, что система (2) – нестрого гиперболическая по Петровскому, но не является нестрого гиперболической по Фридрихсу. В данной работе мы будем рассматривать системы ступенчатого вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_j}{\partial t} + (\mathcal{F}_j(U_1, \ldots, U_{n-1}))_x = 0, \ \ j = 1, \ldots, n-1 \\ \frac{\partial U_n}{\partial t} + (\mathcal{F}_n(U_1, \ldots, U_{n-1}) + \Phi(U_n))_x = 0 \end{array} \right. \tag{3}$$

такие, что усеченная система

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} + (\mathcal{F}_j(U_1, \ldots, U_{n-1}))_x = 0, \ \ j = 1, \ldots, n-1 \tag{4}$$

удовлетворяет условиям теоремы 1.1, а известная функция $\Phi \in C^2(\mathbb{R})$. Нетрудно видеть, что система (2) имеет именно такой вид.

С другой стороны, так как система (4) удовлетворяет условиям теоремы 1.1, то задача Римана для системы ступенчатого вида (3) сводится к задаче Римана для следующего скалярного квазилинейного уравнения:

$$\begin{cases} u_t + (\Phi(u) + f(t,x))_x = 0, \\ u|_{t=0} = U_{n,-} + (U_{n,+} - U_{n,-})\theta(x). \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $f(t,x)$ – известная функция, полученная подстановкой решения задачи Римана для (4) в $\mathcal{F}_n(U_1, \ldots, U_{n-1})$.

Условие 1.1. Будем далее рассматривать только случай, когда $f(t,x) = \phi\left(\frac{x}{t}\right)$, причем $\phi(q) \in C(\mathbb{R})$, дифференцируема при всех q кроме $q = \alpha$ и $q = \beta$, где $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, $\phi'(q)$ непрерывна во всех точках, кроме $q = \alpha$ и $q = \beta$, ограничена, и удовлетворяет соотношениям

$$\phi'(q) = 0 \ \ \forall q \notin [\alpha;\beta], \quad \phi'(q) \neq 0 \ \ \forall q \in (\alpha;\beta).$$

Заметим, что это условие эквивалентно тому, что решение (4) – одиночная волна разрежения, а функция $\mathcal{F}_n$ удовлетворяет некоторым требованиям типа монотонности. Кроме того, если начальные данные для первых двух неизвестных функций в системе (2) соответствуют одиночной волне разрежения, то условие 1.1 для этой системы будет выполнено.

Для отыскания физически корректного решения задачи Римана (5) поступим следующим образом. Для каждого $t > 0$ построим по начальным данным некоторую кривую на плоскости (x,u) – геометрическое решение, метод построения которого и составляет основное содержание данной статьи. После этого применим к полученной кривой процедуру выравнивания, описанную в работе [4]. В результате получится кусочно-гладкая функция, которая и будет искомым решением.

§2. Построение геометрического решения

2.1. Предварительные преобразования. Применим прием О. А. Олейник: перейдем в задаче (5) от неизвестной функции u к новой неизвестной функции v так, что $u = v_x$. Тогда, интегрируя уравнение по x, получим начальную задачу для нестационарного уравнения Гамильтона–Якоби:

$$\begin{cases} v_t + \Phi(v_x) + \phi\left(\frac{x}{t}\right) = 0, \\ v_x|_{t=0} = U_{n,-} + (U_{n,+} - U_{n,-})\theta(x). \end{cases} \tag{6}$$

Гамильтониан в этой задаче $H(p,x,t) = \Phi(p) + \phi\left(\frac{x}{t}\right)$ зависит от времени, и сингулярен при $t = 0$. Соответствующая система ОДУ Гамильтона принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \Phi'(p), \\ \dot{p} = -\frac{1}{t}\phi'\left(\frac{x}{t}\right), \end{cases} \tag{7}$$

и правая часть этой системы – разрывная функция, которая к тому же сингулярна при $t = 0$. Перейдем в системе (7) от переменных (x,t,p) к переменным (q,τ,p) при помощи замены $x = qe^{\tau}$, $t = e^{\tau}$. Тогда (7) перепишется как автономная система

$$\begin{cases} \frac{dq}{d\tau} = \Phi'(p) - q, \\ \frac{dp}{d\tau} = -\phi'(q). \end{cases} \tag{8}$$

Эта система уже не гамильтонова, но при этом не содержит сингулярных выражений в правой части. Однако, правая часть второго уравнения этой системы – разрывная функция. Поэтому решение этой системы будем далее понимать в смысле Филиппова [5]. А именно, начальным данным (q_0, p_0) для системы уравнений (8) сопоставим множество $S_\tau(q_0,p_0)$ точек $(q(\tau),p(\tau))$ на фазовой плоскости таких, что $q(0) = q_0$, $p(0) = p_0$ и система уравнений (8) для функций $q(\tau)$, $p(\tau)$ выполнена в смысле дифференциального включения. Заметим, что множество $S_\tau(q_0,p_0)$, вообще говоря, не обязано быть одноточечным при $\tau > 0$ в силу того, что у системы (8) могут быть скользящие режимы (этот факт будет более подробно разобран далее). Систему (8) далее будем называть ассоциированной с задачей (5).

2.2. Начальные данные и определение геометрического решения. Сопоставим начальным данным задачи (6) непрерывную кривую γ_0 на фазовой плоскости (q,p):

$$\gamma_0 = \{(q;U_{n,-}) \mid q < 0\} \cup \{(0;p) \mid (p-U_{n,-})(p-U_{n,+}) \leqslant 0\} \\ \cup \{(q;U_{n,+}) \mid q > 0\}.$$

Следуя общей идее, стоящей за определением геометрического решения, мы должны были бы взять эту кривую за начальные данные для системы (7), и определить геометрическое решение как результат сдвига вдоль траекторий этой системы на время t. Однако, как уже говорилось выше, система (7) сингулярна при $t = 0$. Если же перейти от нее к ассоциированной системе (8), то начальные данные придется задавать при $\tau = -\infty$. Воспользовавшись тем, что система (8) автономная, обойдем эту трудность следующим образом.

Определение 2.1. Геометрическим решением задачи Римана (5) в переменных (p, q, τ) будем называть предел по Хаусдорфу последовательности кривых $S_\tau \gamma_0$ при $\tau \to +\infty$.

Для того, чтобы определить геометрическое решение в исходных переменных, определим неоднородное растяжение фазовой плоскости: $\Lambda_t(q_0, p_0) = (tq_0, p_0)$.

Определение 2.2. Геометрическим решением задачи Римана (5) в переменных (p, x, t) будем называть кривую $\Lambda_t \gamma_*$, где γ_* – геометрическое решение в переменных (p, q, τ).

Для доказательства корректности определения 2.1 нам потребуется наложить на функцию $\Phi(p)$ следующее условие.

Условие 2.1. Пусть $\Phi(p) \in C^2(\mathbb{R})$ такова, что ее производная $\Phi'(p)$ удовлетворяет условию роста:

$$\lim_{p \to \pm\infty} |\Phi'(p)| = +\infty. \tag{9}$$

Для доказательства корректности определения геометрического решения изучим сначала, как действует многозначное отображение S_τ.

2.3. О структуре многозначного фазового потока для ассоциированной системы. Обозначим $(q(\tau), p(\tau))$ решение системы (8). В силу условий, наложенных на функции Φ и ϕ, при $q < \alpha$ и $q > \beta$ у системы (8) есть неограниченные бесконечные множества особых точек, состоящие из пересечения графика $q = \Phi'(p)$ с полуплоскостями $q < \alpha$ и $q > \beta$. Все эти особые точки – притягивающие в силу знака $\frac{dq}{d\tau}$. Кроме того, если $q_0 > \beta$, то, пока $q(\tau) > \beta$, множество $S_\tau(q_0, p_0)$ является одноточечным в силу того, что правая часть системы (8) при таких q непрерывна. Аналогичный факт справедлив и в случае $q_0 < \alpha$. Более того, если $q_0 \in (\alpha; \beta)$, то до тех пор, пока $q(\tau) \in (\alpha; \beta)$ множество $S_\tau(q_0, p_0)$ также является одноточечным. Однако, правая единственность по τ может нарушаться на прямых $q = \alpha$ и $q = \beta$. А именно, если точка (α, p_0) такова, что $\Phi'(p_0) = \alpha$, то эта точка соответствует скользящему режиму [5]: траектория $(q(\tau), p(\tau))$ такая, что $q(\tau_0) = \alpha$, $p(\tau_0) = p_0$ может произвольное конечное время находиться в этой точке, после чего покинуть ее, перейдя внутрь области $\alpha < q < \beta$. Заметим, что выйти в полуплоскость $q < \alpha$ траектории не позволяет знак $\frac{dq}{d\tau}$ в этой полуплоскости. Что же касается точек (α, p_0) таких, что $\Phi'(p_0) \neq \alpha$, то в этих точках правая единственность не нарушается в силу того, что $\frac{dq}{d\tau}$ меняется непрерывно при всех p, q. Однако, в этих точках функция $p(\tau)$ имеет слабый разрыв. Аналогичным образом ведут себя решения задачи (8) и на прямой $q = \beta$. Введем следующее определение.

Определение 2.3. Обозначим

$$M_{cr} = \{(q,p) \mid \ (q-\alpha)(q-\beta) = 0, \Phi'(p) = q\}$$

множество точек, соответствующих скользящим режимам. Будем говорить, что траектория $(q(\tau), p(\tau))$ соответствует скользящему режиму, если найдутся $\tau_0 \in \mathbb{R}$ и $(q_0, p_0) \in M_{cr}$ такие, что $q(\tau_0) = q_0$, $p(\tau_0) = p_0$.

В заключение заметим, что при $q \notin [\alpha; \beta]$ все траектории системы (8) параллельны оси Oq. Кроме того, в силу условия 1.1 на функцию ϕ у системы (8) нет изолированных особых точек внутри полосы $\{\alpha < q < \beta\}$, а значит, нет и предельных циклов.

2.4. Корректность определения геометрического решения для невозрастающей ϕ. Рассмотрим случай, когда функция $\phi(q)$ невозрастающая, т.е. $\forall q \in (\alpha; \beta): \ \phi'(q) < 0$. Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2.1. *Для любых $q_0 \in \mathbb{R}$, $p_0 \in \mathbb{R}$ найдется такое $R > 0$, что для всех $\tau > 0$ множество $S_\tau(q_0, p_0)$ лежит в полосе $|p| < R$.*

Доказательство. 1) По сути, лемма утверждает, что если $(q(\tau), p(\tau))$ – решение системы (8), то функция $p(\tau)$ ограничена. В случае, если τ таково, что $q(\tau) \notin [\alpha; \beta]$ это следует из равенства $\frac{dp}{d\tau} = 0$. Изучим теперь случай, когда $\alpha < q < \beta$.

2) Начнем с того, что докажем ограниченность $p(\tau)$ для достаточно больших по модулю p_0.

2.1) Пусть сначала $\lim\limits_{p \to +\infty} \Phi'(p) = +\infty$. Тогда найдется $p_1 \in \mathbb{R}$ такое, что для $p \geqslant p_1$ верно $\Phi'(p) - \beta > 1$. Но тогда, для $p \geqslant p_1$, $q \in (\alpha; \beta)$, разделив второе уравнение системы (8) на первое, получим:

$$0 < \frac{dp}{dq} = -\frac{\phi'(q)}{\Phi'(p) - q} < -\phi'(q),$$

и для траектории системы (8), проходящей через точку (α, p_*), при $p_* > p_1$ имеем

$$p_* \leqslant p \leqslant p_* - \phi(q) + \phi(\alpha) \leqslant p_* - \phi(\beta) + \phi(\alpha),$$

т.е. функция $p(\tau)$ ограничена.

2.2) Пусть теперь $\lim\limits_{p\to+\infty}\Phi'(p) = -\infty$. Тогда найдется $p_1 \in \mathbb{R}$ такое, что для $p \geqslant p_1$ имеет место неравенство $\Phi'(p) - \alpha < -1$. Тогда для $p \geqslant p_1$, $q \in (\alpha;\beta)$, разделив второе уравнение системы (8) на первое, получим:

$$0 > \frac{dp}{dq} = -\frac{\phi'(q)}{\Phi'(p) - q} > \phi'(q),$$

и для траектории системы (8), проходящей через точку (β, p_*), при $p_* > p_1$ имеем

$$p_* \leqslant p \leqslant p_* - \phi(\beta) + \phi(q) \leqslant p_* - \phi(\beta) + \phi(\alpha),$$

т.е. функция $p(\tau)$ ограничена и в этом случае.

2.3) Случаи, соответствующие $p \to -\infty$, разбираются аналогичным образом.

3) Заметим теперь, что при $\alpha < q < \beta$ правая часть системы (8) непрерывна, а значит, имеет место теорема единственности. Отсюда и из ограниченности траекторий, соответствующих $|p_0| \gg 1$, доказанной в предыдущих шагах, следует ограниченность $p(\tau)$ для всех p_0.
Лемма доказана. $\square$

Теорема 2.1. *В случае, если $\phi(p)$ монотонно невозрастает, геометрическое решение корректно определено.*

Доказательство. Выберем p_1 и p_2 так, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\forall p \leqslant p_1,\ \forall q \in [\alpha;\beta]:\ |\Phi'(p) - q| > 1;$$

$$\forall p \geqslant p_2,\ \forall q \in [\alpha;\beta]:\ |\Phi'(p) - q| > 1;$$

$$\gamma_0 \subset \{(q,p) \mid\ q \in \mathbb{R},\ p_1 < p < p_2\}.$$

Тогда в силу леммы 2.1 для любого $\tau > 0$ все точки множества $S_\tau\gamma_0$ лежат в полосе $p_1 - \phi(\alpha) + \phi(\beta) < p < p_2 - \phi(\beta) + \phi(\alpha)$. Обозначим теперь q_1 и q_2 минимум и максимум функции $\Phi'(p)$ на отрезке $p_1 - \phi(\alpha) + \phi(\beta) \leqslant p \leqslant p_2 - \phi(\beta) + \phi(\alpha)$. Пусть $m = \min\{-|\alpha|, -|\beta|, q_1\}$, $M = \max\{|\alpha|, |\beta|, q_2\}$. Обозначим γ_1 пересечение γ_0 с полосой $m \leqslant q \leqslant M$, $\gamma_2 = \gamma_0 \setminus \gamma_1$. В силу леммы 2.1 и знака $\frac{dq}{d\tau}$ для любого $\tau > 0$ все точки кривой $S_\tau\gamma_1$ лежат в прямоугольнике

$$\Pi = \{(q,p) \mid\ m \leqslant q \leqslant M,\ p_1 - \phi(\alpha) + \phi(\beta) \leqslant p \leqslant p_2 - \phi(\beta) + \phi(\alpha)\}.$$

Определим теперь множество $\Sigma_\tau\gamma_1$ следующим образом: если $(q(\tau), p(\tau)) \in S_\tau\gamma_1$ – траектория, не соответствующая скользящему режиму, то $(q(\tau), p(\tau)) \in \Sigma_\tau\gamma_1$. Если же $(q(\tau), p(\tau)) \in S_\tau\gamma_1$ соответствует скользящему режиму (т.е. проходит через точку (q_c, p_c) такую, что $(q_c - \alpha)(q_c - \beta) = 0$ и $q_c = \Phi'(p_c)$), то среди всех таких траекторий выберем только ту, для которой из равенств $q(\tau_1) = q(\tau_2) = q_c$, $p(\tau_1) = p(\tau_2) = p_c$ следует $\tau_1 = \tau_2$. Обозначим эту траекторию $(\widehat{q}(\tau), \widehat{p}(\tau))$ и скажем, что $(\widehat{q}(\tau), \widehat{p}(\tau)) \in \Sigma_\tau\gamma_1$. Построенное таким образом множество $\Sigma_\tau\gamma_1$ является подмножеством $S_\tau\gamma_1$, и его можно интерпретировать как передний фронт для $S_\tau\gamma_1$.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$, и рассмотрим любое решение $(q(\tau), p(\tau)) \in \Sigma_\tau\gamma_1$. В силу того, что $(q(\tau), p(\tau)) \in \Pi$ для любого $\tau > 0$, и у системы (8) нет предельных циклов, найдется такая точка $(q_*, p_*) \in \Pi$, что $\lim\limits_{\tau\to+\infty}((q(\tau), p(\tau)) = (q_*, p_*)$. Следовательно, найдется такое $T = T(q(0), p(0)) \geqslant 0$, что для всех $\tau > T$ верно $(q(\tau) - q_*)^2 + (p(\tau) - p_*)^2 < \frac{1}{4}\varepsilon^2$. Но тогда для всех $\tau_1, \tau_2 > T$ верно $(q(\tau_1) - q(\tau_2))^2 + (p(\tau_1) - p(\tau_2))^2 < \varepsilon^2$. Так как для траекторий $(q(\tau), p(\tau))$, лежащих в $\Sigma_\tau\gamma_1$, имеет место непрерывная зависимость решений от начального условия, то T непрерывно зависит от $(q(0), p(0))$. Отсюда в силу компактности γ_1 найдется $T_* \geqslant 0$ – максимум T по всем $(q(0), p(0)) \in \gamma_1$, и для всех $\tau_1, \tau_2 > T_*$ в силу сказанного выше расстояние по Хаусдорфу d_H между $\Sigma_{\tau_1}\gamma_1$ и $\Sigma_{\tau_2}\gamma_1$ удовлетворяет оценке

$$d_H(\Sigma_{\tau_1}\gamma_1, \Sigma_{\tau_2}\gamma_1) \leqslant \varepsilon.$$

Заметим теперь, что $S_\tau\gamma_1 = \Sigma_\tau\gamma_1 \cup M_\tau$, и при фиксированном τ множество $M_\tau = \{(\widehat{q}(\tau_*), \widehat{p}(\tau_*)) \mid \tau^0 \leqslant \tau_* \leqslant \tau\}$, где $(\widehat{q}(\tau^0), \widehat{p}(\tau^0)) = (q_c, p_c) \in M_{cr}$. Отсюда следует, что при $\tau_1 < \tau_2$ имеет место включение $M_{\tau_1} \subset M_{\tau_2}$, а значит, и оценка

$$\forall \tau_1, \tau_2 > T_*: \; d_H(S_{\tau_1}\gamma_1, S_{\tau_2}\gamma_1) \leqslant \varepsilon. \tag{10}$$

Так как Π – компакт, кривая $S_\tau\gamma_1$ – замкнутое подмножество Π при каждом $\tau > 0$, и оценка (10) означает фундаментальность последовательности $S_\tau\gamma_1$, то в силу компактности множества замкнутых подмножеств компакта в метрике Хаусдорфа [1] существует предел по Хаусдорфу последовательности $S_\tau\gamma_1$.

Перейдем к рассмотрению предела по Хаусдорфу для кривых $S_\tau\gamma_2$, где $\gamma_2 = \gamma_0 \setminus \gamma_1$. Тогда $\gamma_2 = l_+ \cup l_-$, где l_+ – пересечение γ_0 с полуплоскостью $q > M$, l_- – пересечение γ_0 с полуплоскостью $q < m$. Нетрудно видеть, что l_+ и l_- – лучи, параллельные горизонтальной оси. Кроме того, в силу приведенного ранее описания структуры многозначного фазового потока образ $S_\tau l_+$ содержит l_+. Аналогичное утверждение имеет место и для луча l_-. Более того, пределом для луча $S_\tau l_+$ является объединение l_+ и множества $\{(q(\tau), p(\tau)) \mid \tau \geqslant 0\}$, где $(q(\tau), p(\tau))$ – произвольное решение системы (8), удовлетворяющее условию $(q(0), p(0)) \in l_+$. Аналогичное соотношение имеет место и для l_-.

Осталось заметить, что предел по Хаусдорфу для $S_\tau\gamma$ является объединением предела по Хаусдорфу для $S_\tau\gamma_1$ с пределами для лучей $l_\pm$. Теорема доказана. □

2.5. Случай монотонно неубывающей функции ϕ. Докажем аналог леммы 2.1 для случая, когда функция $\phi(q)$ монотонно неубывающая.

Лемма 2.2. *Пусть* $\forall q \in (\alpha; \beta): \ \phi'(q) > 0$. *Тогда для любых* $q_0 \in \mathbb{R}$, $p_0 \in \mathbb{R}$ *найдется такое* $R > 0$, *что для всех* $\tau > 0$ *множество* $S_\tau(q_0, p_0)$ *лежит в полосе* $|p| < R$.

Доказательство. Как и в случае монотонно невозрастающей функции ϕ, достаточно показать ограниченность $p(\tau)$. Сделаем в системе ОДУ (8) замену переменной: $q_* = -q$, $p_* = -p$. Тогда

$$\begin{cases} -\frac{dq_*}{d\tau} = \Phi'(-p_*) - (-q_*), \\ -\frac{dp_*}{d\tau} = -\phi'(-q_*), \end{cases}$$

и обозначая $\Phi_1(p_*) = \Phi(-p_*)$, $\phi_1(q_*) = \phi(-q_*)$, получаем, что функция $\Phi_1(p_*)$ по прежнему удовлетворяет условию 2.1, функция $\phi_1(q_*)$ монотонно невозрастает, и для p_*, q_* имеет место система ОДУ

$$\begin{cases} \frac{dq_*}{d\tau} = \Phi_1'(p_*) - q_*, \\ \frac{dp_*}{d\tau} = -\phi_1'(q_*), \end{cases}$$

которая удовлетворяет утверждению леммы 2.1. Так как ограниченность $p(\tau)$ эквивалентна ограниченности $p_*(\tau)$, а ограниченность $p_*(\tau)$ следует из леммы 2.1, то лемма доказана. □

Заметим теперь, что доказательство теоремы 2.1 можно перенести на случай монотонно неубывающей функции ϕ со следующими изменениями: для $\tau > 0$ все точки $S_\tau\gamma_0$ будут лежать в полосе $p_1 + \phi(\alpha) - \phi(\beta) < p < p_2 + \phi(\beta) - \phi(\alpha)$, и далее в доказательстве следует везде поменять α и β местами. После этого все рассуждения из доказательства теоремы 2.1 будут верны и для случая монотонно неубывающей ϕ. Таким образом, и в этом случае определение геометрического решения корректно.

§3. Связь между геометрическим и обобщенным решением

3.1. Построение обобщенного решения по геометрическому. Для построения обобщенного решения, соответствующего данному геометрическому решению, воспользуемся процедурой выравнивания, изложенной в работе [4]. В результате выравнивания кривой на плоскости – геометрического решения γ – получится некая новая непрерывная кривая $\mathcal{E}_*\gamma$, которая для п.в. $q \in \mathbb{R}$ проектируется взаимнооднозначно на ось q. Но тогда найдется такая кусочно-гладкая функция $U(q)$, что для п.в. $q \in \mathbb{R}$ график $p = U(q)$ совпадает с $\mathcal{E}_*\gamma$. Сделаем теперь в уравнении

$$u_t + (\Phi(u) + \phi\left(\frac{x}{t}\right))_x = 0 \tag{11}$$

замену независимых переменных: $x = qe^\tau$, $t = e^\tau$. Тогда (11) перепишется в виде

$$u_\tau + (\Phi'(u) - q)u_q + \phi'(q) = 0 \tag{12}$$

Так как ассоциированная система ОДУ (8) для задачи (11) совпадает с системой характеристик для (12), то $u(t,x) = U\left(\frac{x}{t}\right)$ будет решением уравнения (11) во всех точках гладкости функции $U(q)$. С другой стороны, во всех точках, где $U(q)$ разрывна, сингулярная часть (11) для $u(t,x)$ будет нулевой в силу свойств выравнивания. Таким образом, $u(t,x)$, построенная по геометрическому решению задачи (5) путем выравнивания, будет обобщенным решением этой задачи.

3.2. О физической корректности построенного решения. Геометрическое решение, соответствующее заданной начальной кривой γ_0, единственно, и выравнивание также определено единственным образом. Для обоснования того, что геометрическое решение выделяет из всех обобщенных решений задачи Римана физически корректное, рассмотрим случай, когда $\phi(q) = 0$ $\forall q \in \mathbb{R}$, а функция $\Phi(p)$ выпуклая. Тогда известно [3], что физически корректное решение задачи Римана в случае $U_{n,-} > U_{n,+}$ – ударная волна, удовлетворяющая условию

Рэнкина-Гюгонио, а в случае $U_{n,-} < U_{n,+}$ – волна разрежения вида

$$u(t,x) = \{\begin{cases} U_{n,-}, & x \leqslant t\Phi'(U_{n,-}), \\ G\left(\frac{x}{t}\right), & \Phi'(U_{n,-}) < \frac{x}{t} < \Phi'(U_{n,+}), \\ U_{n,+}, & x \leqslant t\Phi'(U_{n,+}), \end{cases}$$

где $G = (\Phi')^{-1}$. С другой стороны, ассоциированная система ОДУ в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dq}{d\tau} = \Phi'(p) - q, \\ \frac{dp}{d\tau} = 0, \end{cases}$$

и фазовый поток этой системы устроен следующим образом: если $(q_0, p_0) \in \{q = \Phi'(p)\}$, то точка (q_0, p_0) стационарная. Иначе $(q_0, p_0) \to (\Phi'(p_0), p_0)$ при $\tau \to +\infty$. Но отсюда следует, что геометрическое решение имеет вид

$$\gamma = \{(q, U_{n,-}) \mid \ q \leqslant \Phi'(U_{n,-})\} \cup \{(\Phi'(p), p) \mid \ (p - U_{n,-})(p - U_{n,+}) < 0\} \\ \cup \{(q, U_{n,+}) \mid \ q \geqslant \Phi'(U_{n,+})\}.$$

Осталось заметить, что при $U_{n,-} < U_{n,+}$ кривая γ в точности соответствует графику $p = U(q)$ такому, что $u(t,x) = U(\frac{x}{t})$ – физически корректная волна разрежения, а в случае, когда $U_{n,-} > U_{n,+}$ выравнивание для γ даст как раз ударную волну, удовлетворяющую условию Рэнкина-Гюгонио. Таким образом, обобщенное решение, соответствующее геометрическому решению для задачи Римана в случае выпуклой $\Phi(p)$ и нулевой $\phi(q)$ совпадает с известным физически корректным решением.

Указанные соображения дают основание считать обобщенное решение, соответствующее геометрическому решению, физически корректным.

Список литературы

1. Д. Бураго, Ю. Бураго, С. Иванов, *Курс метрической геометрии.* AMS, Providence, Rhode Island (2001).
2. С. К. Годунов, *Разностный метод численного расчета разрывных уравнений гидродинамики.* — Мат. сборник, **47**, Вып. 3 (1959), 271–306.
3. П. Д. Лакс, *Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных.* Ижевск, НИЦ "РХД" (2010).
4. В. В. Палин, *Геометрические решения задачи Римана для скалярного закона сохранения.* — Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, **22**, No. 4 (2018), 620–646.

5. А. Ф. Филиппов, *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.* М. Наука. Главная редакция физико-математической литературы (1985).

Palin V. V. Construction of the geometrical solution in the case of a rarefaction wave.

We consider the Riemann problem for step-like system, which is non-strictly hyperbolic in the sense of Petrovskii. In this paper we study the case where a solution for a strictly hyperbolic subsystem is a rarefaction wave. For the last remainig equation of the considered system we give a new definition of the solution, which we call geometrical solution. We study the construction of the geometical solution and its relation to the generalized solution. In addition, we discuss the question about physical correctness of the constructed solution.

МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: grey_stranger84@mail.ru

Поступило 5 декабря 2019 г.