

А. Енин, П. Перстнева, С. Тихомиров

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ГИСТЕРЕЗИСОМ В РАЗМЕРНОСТИ 1

§1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи с оператором гистерезиса возникают при математическом описании различных физических процессов [4, 11, 16]. Обыкновенные дифференциальные уравнения с гистерезисом рассматриваются многими авторами, например, в [2, 3, 5, 11, 12, 14, 15]. Дифференциальные уравнения в частных производных с гистерезисом также активно изучались в течение последних десятилетий (см. [4, 16] и ссылки в них). Основное внимание обычно уделяется корректности постановки соответствующих задач. При этом поведение их решений изучено плохо, особенно так называемое поведение “на больших временах” и наличие периодических решений.

В данной статье изучается параболическое уравнение с разрывным оператором гистерезиса на границе, которое описывает следующий естественный физический процесс. В ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей ∂Q в каждой точке $x \in Q$ и в каждый момент времени t определена скалярная функция температуры $u(x, t)$, подчиняющаяся уравнению теплопроводности

$$u_t(x, t) = \Delta u(x, t), \quad x \in Q, t > 0 \quad (1)$$

С помощью нагревающих и охлаждающих элементов на границе, в области поддерживают среднюю температуру в диапазоне $[\alpha, \beta]$. Средняя температура $\hat{u}$ определяется датчиками, расположенными в области с плотностью $m(x)$ (см. формальную постановку в разделе 2).

Ключевые слова: гистерезис, термоконтроль, периодическое решение, устойчивость.

Работа выполнена при финансовой поддержке П. Перстневой и С. Тихомирова грантом Президента РФ (проект 075-15-2019-204), а также А. Енина и П. Перстневой программой социальных инвестиций “Родные города” ПАО “Газпром нефть”.

Если средняя температура стала слишком высокой ($\hat{u} \geq \beta$), то нагревающие элементы выключают и включают вместо них охлаждающие, если слишком низкой ($\hat{u} \leq \alpha$) – наоборот, а если средняя температура держится в диапазоне (α, β) , то режим работы элементов не меняют.

Такая постановка задачи близка к работам [8, 10], и настоящая статья дает ответы на ряд вопросов, оставшихся открытыми в этих работах.

Похожие уравнения в одномерной области изучались с использованием методов, отличных от [8, 10], в работах [6, 7, 13]. Первые результаты в многомерной области о существовании периодических решений системы в вышеописанной постановке были получены в [9]. Вскоре после этого в [8] было доказано существование и единственность решения (1) (с точностью до начального данного), а также существование и устойчивость периодических решений системы с двумя переключениями режима регуляции за период, но только для достаточно большого значения разности предельных температур $\beta - \alpha$. В [10] были предприняты попытки получить аналогичный результат для произвольного значения $\beta - \alpha$. Отметим, что в общем случае не удалось доказать ни существования хотя бы одного периодического решения, ни их устойчивости. Также в [10] были приведены многочисленные примеры параметров системы, при которых все периодические решения являются неустойчивыми. Однако все они соответствовали нефизичным параметрам задачи (функция $m(x)$ была отрицательной в части пространства).

В данной работе мы рассматриваем случай одномерной области Q ($n = 1$) в предположении, что нагревательный прибор расположен в одной из точек границы, а измерительные приборы в малой окрестности концов интервала. Отметим, что с практической точки зрения такая постановка, а именно, расположение датчиков на границе области Q или рядом с ней, наиболее интересна. Показано наличие периодического решения и доказана его устойчивость при физических значениях параметров для любого значения $\beta - \alpha$.

§2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей, $Q_T = Q \times (0, T)$. Рассмотрим параболическую задачу

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \Delta u(x, t), & x \in Q, \ t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in Q \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = K(x) \mathcal{H}(\hat{u}(t)), & x \in \partial Q. \end{cases} \quad (2)$$

Определим все символы в правой части граничного условия. $\hat{u}(t)$ – это средняя температура, посчитанная согласно распределению $m(x)$:

$$\hat{u}(t) = \langle m, u(t) \rangle, \quad m \in (H^{1-\delta}(Q))', \quad (3)$$

где $(H^{1-\delta}(Q))'$ – пространство, двойственное к $H^{1-\delta}(Q)$, и $\delta \in (0; 1/2)$. Напомним, что для $s \in (0, 1)$ пространство $H^s(Q)$ является пространством функций из $L_2(Q)$, таких что

$$[u]_{H^s(Q)} = \int_{Q \times Q} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy < \infty,$$

с нормой

$$\|u\|_{H^s(Q)} = \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + [u]_{H^s(Q)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\mathcal{H}(\hat{u}(t))$ – это оператор гистерезиса, формальное определение которого дадим ниже.

Определение 1. Пусть даны $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$, а $\mathbb{B}$ – пространство полунепрерывных справа функций из $[0, T]$ в $\{-1, 1\}$.

$$\mathcal{H} : C[0, T] \rightarrow \mathbb{B}$$

определяется следующим образом. Пусть $X_t = \{t' \in (0, t] : g(t') = \alpha \text{ или } \beta\}$;

$$z(0) = \begin{cases} 1, & g(0) < \beta, \\ -1, & g(0) \geq \beta. \end{cases}$$

и для $t \in (0, T]$

$$z(t) = \begin{cases} z(0), & X_t = \emptyset \\ 1, & X_t \neq \emptyset, \ g(\max X_t) = \alpha, \\ -1, & X_t \neq \emptyset, \ g(\max X_t) = \beta. \end{cases}$$

Определение 2. Обозначим за $H^{2,1}(Q \times (a, b))$ анизотропное пространство Соболева:

$$H^{2,1}(Q \times (a, b)) = \{v \in L_2((a, b); H^2(Q)) : v_t \in L_2(Q)((a, b); L_2(Q))\}$$

Определение 3. Решением уравнения (2) с начальными данными $\varphi \in H^1(Q)$ будем называть функцию $u \in H^{2,1}(Q_T)$, такую что:

- (1) $\mathcal{H}(\hat{v})$ имеет конечное число переключений на $(0, T)$.
- (2) $v(x, t) = v^{(1)}(x, t)$ для $t \in (0, t_1)$, где $v^{(1)}$ – это решение задачи (2) с $\mathcal{H}(\hat{u}) = 1$.
- (3) $v(x, t) = v^{(i)}(x, t_i - t_{i-1})$ для $t \in (t_{i-1}, t_i)$, где $v^{(i)}$ – это решение задачи (2) с начальными данными $v^{(i-1)}(x, t_{i-1} - t_{i-2})$ и с $\mathcal{H}(\hat{u}) = (-1)^{i-1}$.

Определение 4. Глобальным решением уравнения (2) с начальными данными $\varphi \in H^1(Q)$ будем называть функцию $u \in H_{loc}^{2,1}(Q_\infty)$, такую что для любого $T > 0$ функция $u|_{Q_T}$ является решением уравнения (2).

Мы рассматриваем случай одномерной области $Q = (0, \pi)$. В точке 0 установлен прибор, нагревающий или охлаждающий стержень с силой 1. Тогда температура стержня $u(x, t)$ в момент времени t в точке x описывается системой уравнений

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u_x(0, t) = \mathcal{H}(\hat{u}(t)), \\ u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = \phi(x). \end{cases} \quad (4)$$

Средняя температура $\hat{u}$ задается формулой (3). Заметим, что, в силу вложения $H^1(0, \pi)$ в $C(0, \pi)$, борелевы регулярные меры являются элементами $(H^1(0, \pi))'$. Отметим, что для приложений наиболее интересен случай, когда датчики расположены на границе, что соответствует мерам $m = \delta_\pi, \delta_0$.

Моментом переключения в дальнейшем будем называть $t : \mathcal{H}(g)(t) \neq \mathcal{H}(g)(t - 0)$ (значение оператора гистерезиса не такое же, как было “только что”).

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 2.2 из [8].

Теорема 1. Пусть $\varphi \in H^1(Q)$, $\|\varphi\|_{H^1} \leq R$. Тогда для любого $T > 0$ верно:

- (1) Существует единственное решение задачи (4) $v \in H^{2,1}(Q_T)$, и выполняется следующая оценка на его норму в пространстве $H^{2,1}(Q_T)$:

$$\|v\|_{H^{2,1}(Q_T)} \leq c_1(\|\varphi\|_{H^1} + c_2) \quad (5)$$

- (2) Интервал $(0, T]$ содержит не более чем конечное число моментов переключения $t_1 < t_2 < \dots < t_J$ и

$$t_i - t_{i-1} \geq \tau^*, \quad (6)$$

где

$$\tau^* = C(R) \frac{(\beta - \alpha)^{\frac{2}{\delta}}}{\|m\|_{(H^{1-\delta})'}^{\frac{2}{\delta}}} \quad (7)$$

Замечание 1. В [8, 10] все утверждения были доказаны в предположении, что $m \in L^2$. В действительности они могут быть обобщены на случай $m \in (H^{1-\delta})'$ при $\delta > 0$. Мы будем использовать их без доказательств.

Мы изучаем вопрос существования и устойчивости *унимодальных* периодических решений задачи (4), то есть решений, имеющих ровно два момента переключения на периоде.

В настоящей статье доказаны следующие две основные теоремы.

Теорема 2. Если $m = \delta_{x_0}$ для $x_0 \in \{0, \pi/2, \pi\}$, то для любого значения $\beta - \alpha$ существует ровно одно унимодальное периодическое решение задачи (4) и оно орбитально асимптотически устойчиво (см. определение 5).

Теорема 3. Пусть $x_0 \in \{0, \pi/2, \pi\}$. Для любого значения $\beta - \alpha$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что если $\text{supp } m \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (0, \pi)$, то существует хотя бы одно орбитально асимптотически устойчивое периодическое решение задачи (4).

Статья организована следующим образом. В разделе 3 установлено, что для $m = \delta_0, \delta_\pi, \delta_{\pi/2}$ унимодальное периодическое решение существует и единственно. В разделе 4 показано, что полученное периодическое решение устойчиво, что завершает доказательство теоремы 2. В разделе 5 установлено, что если при некотором m_1 есть устойчивое унимодальное периодическое решение, то для достаточно малых возмущений m (см. Теорему 8) также найдется устойчивое унимодальное периодическое решение, что доказывает теорему 3.

§3. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ С ФУНКЦИЕЙ СРЕДНЕЙ
ТЕМПЕРАТУРЫ $m = \delta_0, \delta_\pi, \delta_{\frac{\pi}{2}}$

В этом разделе мы докажем следующее утверждение:

Теорема 4. *Для любого $\beta - \alpha$ существует единственное унимодальное периодическое решение системы (4) при $m = \delta_{x_0}$, $x_0 \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$.*

Как и в предыдущем разделе, мы ссылаемся на существование и единственность решения системы (4), и ищем унимодальное периодическое решение в виде ряда Фурье: $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \cos nx$.

Не умаляя общности будем считать, что начальные данные удовлетворяют условию

$$u(0, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0) \cos nx_0 = \alpha. \quad (8)$$

Следуя [10], рассмотрим характеристические функции

$$F(s) = s + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx_0)}{n^2} \tanh\left(\frac{n^2 s}{2}\right). \quad (9)$$

$$H(t, s) = t - s + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx_0)}{n^2} \frac{e^{-n^2 s} - e^{-n^2 t}}{1 + e^{-n^2 s}}. \quad (10)$$

Следующее утверждение является частным случаем [10, теорема 4.1].

Утверждение 1. *У задачи (4) существует единственное унимодальное периодическое решение с полупериодом T тогда и только тогда, когда*

$$F(T) = \beta - \alpha, \quad (11)$$

$$H(t, T) > 0, \quad t < T. \quad (12)$$

Таким образом, если мы установим (11) и (12), то теорема 4 будет доказана.

Докажем (11). Заметим, что $F(0) = 0$ и $F(t) \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$. Покажем, что $F(t)$ – возрастающая функция при $x_0 \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$. Отметим, что

$$F'(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx_0)}{n^2} \frac{n^2/2}{\cosh^2(n^2 t/2)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(kx_0)}{\cosh^2(n^2 t/2)}, \quad t > 0. \quad (13)$$

Но для любого $t > 0$ последовательность $1/\cosh^2(n^2 t/2)$ положительна и монотонно убывает по n , а последовательность $\cos(nx_0)$ состоит либо

из 1 (если $x_0 = 0$), либо из чередующихся $+1$ и -1 (если $x_0 = \pi$), либо периодична со значениями $+1, 0, -1, 0$ (если $x_0 = \pi/2$). Во всех трех случаях верно неравенство $F'(t) > 0$.

Следовательно, F непрерывна и монотонно возрастает, а значит есть ровно один «кандидат» $t = T$, соответствующий корню уравнения $F(T) = \beta - \alpha$.

Покажем, что для T , удовлетворяющего (11), выполнено (12). Обозначим $y = T - t$. Определим $G(y, t) := H(y, T)$, тогда

$$G(y, t) = y + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx_0)}{n^2} \frac{e^{n^2 y} - 1}{e^{n^2(y+t)} + 1}.$$

Покажем, что $G(y, t) > 0$ для любых $y, t > 0$, откуда незамедлительно следует (12).

Отметим, что $G(0, t) = 0$. Докажем, что $G'_y(y, t) > 0$. Действительно, непосредственные вычисления показывают, что

$$G'_y(y, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \cos(nx_0) \frac{e^{n^2 y} + e^{n^2(y+t)}}{(e^{n^2(y+t)} + 1)^2}.$$

Рассмотрим $\frac{e^{n^2 y} + e^{n^2(y+t)}}{(e^{n^2(y+t)} + 1)^2}$ как функцию от $n \in \mathbb{R}$; тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^{n^2 y} + e^{n^2(y+t)}}{(e^{n^2(y+t)} + 1)^2} \right)'_n &= \frac{(e^{n^2(y+t)} + 1)}{(e^{n^2(y+t)} + 1)^4} \\ &\times \left(2ny e^{n^2(2y+t)} + 2ny e^{n^2 y} + 2n(y+t) e^{n^2(y+t)} \right. \\ &\quad \left. - 4n(y+t) e^{n^2(2y+t)} - 2n(y+t) e^{2n^2(y+t)} \right) < 0, \quad (14) \end{aligned}$$

т.к. любое из первых трех слагаемых меньше модуля последнего или половины модуля четвертого. Следовательно $\frac{e^{n^2 y} + e^{n^2(y+t)}}{(e^{n^2(y+t)} + 1)^2}$ монотонно убывает как функция от n . Для $x_0 \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ можно сгруппировать слагаемые (14) таким образом, что получится знакопередающийся ряд с монотонно убывающими по модулю коэффициентами (т.к. $\{\cos nx_0\} = \{0, 1, -1\}$, см. рассуждение про положительность $F'(t)$). А значит $G_y(y, t) > 0$, и выполнено условие (12).

Таким образом, теорема 4 доказана.

§4. УСТОЙЧИВОСТЬ

4.1. Орбитальная асимптотическая устойчивость и отображение Пуанкаре.

Определение 5. Мы будем говорить, что периодическое решение $z(x, t)$ с начальным данным $\varphi_0 \in H^1$ с $\widehat{\varphi}_0 < \beta$ является *орбитально асимптотически устойчивым* если

- (1) Для любой окрестности U в H^1 траектории $\Gamma = \{z(t)\}$ найдется такая окрестность V начального данного φ_0 в H^1 , что траектория задачи (4) с начальным данным $\varphi \in V$ не покидает окрестности U .
- (2) найдется такая окрестность W начального данного φ_0 в H^1 , что траектория $v(x, t)$ задачи (4) с начальным данным $\varphi \in W$ удовлетворяет

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_{H^1}(v(\cdot, t), \Gamma) \rightarrow 0.$$

Подробное обсуждение понятия орбитальной асимптотически устойчивости можно найти в [8, раздел 4] или [10, раздел 3]. Основным инструментом в доказательстве устойчивости в [8] является отображение Пуанкаре. Определим операторы

$$P_\alpha : \{\phi \in H^1 : \widehat{\phi} < \beta\} \rightarrow \{\phi \in H^1 : \widehat{\phi} = \beta\}$$

$$P_\beta : \{\phi \in H^1 : \widehat{\phi} > \alpha\} \rightarrow \{\phi \in H^1 : \widehat{\phi} = \alpha\}.$$

Пусть $\widehat{\phi} < \beta, \phi \in H^1$; как мы знаем [8], $\forall t$ существует единственное решение системы (система (4) является ее частным случаем)

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \Delta u(x, t), & (x, t) \in Q_t \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in Q \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = K(x), \end{cases}$$

а также $t_1 > 0 : \widehat{u} < \beta, t \in (0, t_1)$, и $\widehat{u}(t_1) = \beta$. Положим $P_\alpha(\phi) = u(\cdot, t_1)$.

Аналогично определим P_β для $\mathcal{H} = -1$.

Отображением Пуанкаре называется

$$P(\phi) = P_\beta P_\alpha(\phi).$$

Пусть $e_0, e_1, e_2, \dots \in H^1$ – собственные функции оператора u_{xx} с граничными условиями Неймана. В нашем случае $e_n(x) = \cos(nx)$ при $n \geq 0$. Введем сужение отображения Пуанкаре на подпространство

$\mathcal{W} = \overline{\text{Lin}}\{e_1, e_2, \dots\} = \{\phi \in H^1(Q) : \langle \phi, e_0 \rangle = 0\}$. Рассмотрим отображение $E : H^1 \rightarrow \mathcal{W}$, являющееся ортогональным проектором на подпространство $\mathcal{W}$. Рассмотрим $R_\alpha, R_\beta : \mathcal{W} \rightarrow H^1$, заданные в терминах рядов следующим образом:

$$R_\tau : \phi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k(x) \mapsto \tau - \sum_{k=1}^{\infty} e_k(x_0) \phi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k e_k(x), \quad \tau = \alpha, \beta.$$

Несложно видеть, что $ER_\alpha = Id_{\mathcal{W}} = ER_\beta$ и

$$R_\alpha E(\phi) = \phi, \quad \phi \in H^1, \widehat{\phi} = \alpha;$$

$$R_\beta E(\phi) = \phi, \quad \phi \in H^1, \widehat{\phi} = \beta.$$

Наконец, определим сужения отображений P_α и P_β на подпространство $\mathcal{W}$:

$$\Pi_\alpha : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}, \quad \Pi_\alpha(\phi_1) = EP_\alpha R_\alpha,$$

$$\Pi_\beta : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}, \quad \Pi_\beta(\phi_1) = EP_\beta R_\beta.$$

Сужением отображения Пуанкаре называется

$$\Pi : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}, \quad \Pi(\phi_1) = EPR_\alpha(\phi_1).$$

Несложно видеть, что $\Pi = \Pi_\beta \Pi_\alpha$.

В разделах 3 и 4 [8] показано, что если выполнены две нижеследующие леммы, то решение орбитально асимптотически устойчиво.

Лемма 1. *Сужение отображения Пуанкаре Π непрерывно-дифференцируемо (в зависимости от начальных данных) в окрестности периодического решения.*

Лемма 2. *Некоторая степень дифференциала сужения отображения Пуанкаре является сжимающим оператором в окрестности периодического решения.*

Доказательство леммы 1. Сужение отображения Пуанкаре $\Pi = \Pi_\beta \Pi_\alpha$, значит его дифференциал равен произведению дифференциалов:

$$D\Pi = D\Pi_\beta \cdot D\Pi_\alpha.$$

В [10] показано, что $\frac{d\widehat{u}(T)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cos(kx_0)}{1+e^{k^2 T}}$. Отметим, что $\frac{1}{1+e^{k^2 T}}$ монотонна по k , а следовательно

$$\frac{d\widehat{u}(T)}{dt} > 0. \quad (15)$$

В предположении (15) в [8] для $D\Pi_\alpha$ была предъявлена явная формула:

$$D\Pi_\alpha = \begin{pmatrix} e^{-T} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \ddots & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & e^{-n^2 T} & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots \end{pmatrix} - \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cos(kx_0)}{1+e^{k^2 T}}} \begin{pmatrix} \frac{2}{1+e^T} \\ \vdots \\ \frac{2}{1+e^{n^2 T}} \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(x_0)(e^{-T} - 1) \\ \vdots \\ \cos(nx_0)(e^{-n^2 T} - 1) \\ \vdots \end{pmatrix}^T \quad \square$$

Доказательство леммы 2. Отметим, что в [8] это утверждение было доказано только для достаточно больших значений $\beta - \alpha$, в [10] были предъявлены контрпримеры при “нефизичных” значениях параметров (не выполнялось условие $m(x) \geq 0$). В данной работе мы проводим доказательство для произвольного $\beta - \alpha$ для $m = \delta_0, \delta_{\pi/2}, \delta_\pi$.

Наше доказательство опирается на следующий базовый факт спектральной теории. Пусть A – банахова алгебра с единицей; в нашем случае это будет алгебра ограниченных операторов из $\mathcal{W}$ в себя.

Теорема 5 (Гельфанд). Пусть $r(a)$ – спектральный радиус элемента $a \in A$. Тогда

$$r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}$$

В [8] было доказано, что Π_α является компактным оператором. Отсюда следует, что дифференциал $D\Pi$ также является компактным оператором. Таким образом, спектр $D\Pi$ состоит из не более чем счётного числа собственных значений и 0. Также известно, что собственные значения образуют последовательность, сходящуюся к нулю. В следующем разделе мы покажем, что все собственные значения оператора $D\Pi_\alpha$ по модулю строго меньше единицы. Отсюда вытекает, что спектральный радиус оператора $D\Pi_\alpha$ строго меньше единицы, а значит, по теореме Гельфанда, норма некоторой степени оператора $D\Pi_\alpha$ меньше единицы. Из непрерывной зависимости от точки $u(x, t)$ дифференциала $D_u \Pi_\alpha$ следует, что и в достаточно малой окрестности периодического

решения в топологии, порожденной H^1 -нормой, норма какой-то степени оператора дифференциала сужения меньше единицы. А именно, существуют $N \in \mathbb{N}$ и $\epsilon > 0$ такие, что для любого начального данного, лежащего в окрестности начального данного ϕ периодического решения $u(x, t)$ $B_\epsilon = \{\psi \in H^1, \hat{\psi} = \alpha : \|\psi - \phi\|_{H^1} < \epsilon\}$,

$$\|(D_\psi \Pi_\alpha)^N\| < 1.$$

В [10] было показано, что $\Pi_\beta(u) = -\Pi_\alpha(-u)$. А значит для унимодального решения сжимаемость степени $D\Pi$ вытекает из сжимаемости степени $D\Pi_\alpha$. $\square$

4.2. Оценка спектрального радиуса оператора дифференциала проекции отображения Пуанкаре. Итак, в этом разделе мы завершим доказательство леммы 2, оценив собственные значения оператора Π_α .

Обозначим

$$c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{1 + e^{n^2 T}}. \quad (16)$$

Дифференциал $D\Pi_\alpha = A$ можно представить в виде суммы $A = D + R$ диагональной матрицы D и матрицы $R = uw^T$ ранга 1, где

$$u = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+e^T} \\ \vdots \\ \frac{2}{1+e^{n^2 T}} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad w = -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} \cos(x_0)(e^{-T} - 1) \\ \vdots \\ \cos(nx_0)(e^{-n^2 T} - 1) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$Av = Dv + Rv = Dv + (uw^T)v = Dv + u(w^T v).$$

Обозначим $\chi(v) = w^T v$. Пусть вектор $v = (v_1, \dots, v_n, \dots)^T$ — собственный вектор оператора A с собственным числом λ , тогда для любого n верно

$$e^{-n^2 T} v_n + \chi(v) \frac{2}{e^{n^2 T} + 1} = \lambda v_n,$$

$$v_n(\lambda - e^{-n^2 T}) = \chi(v) \frac{2}{1 + e^{n^2 T}} \Rightarrow v_n = \frac{2\chi(v)}{(1 + e^{n^2 T})(\lambda - e^{-n^2 T})}.$$

Таким образом, вектор v параллелен

$$z(\lambda) = \left(\dots, \frac{2}{(1 + e^{n^2 T})(\lambda - e^{-n^2 T})}, \dots \right)^T,$$

следовательно, $z(\lambda)$ тоже собственный ($Az(\lambda) = \lambda z(\lambda)$), а значит для $n \geq 1$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} \frac{2e^{-n^2T}}{(1+e^{n^2T})(\lambda-e^{-n^2T})} - \frac{1}{c} \frac{2}{1+e^{n^2T}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cos(kx_0)(e^{-k^2T}-1)}{(1+e^{k^2T})(\lambda-e^{-k^2T})} \\ = \frac{2\lambda}{(1+e^{n^2T})(\lambda-e^{-n^2T})}. \end{aligned}$$

Последняя система равенств после подстановки (16) может быть преобразовано к

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cos(kx_0)}{1+e^{k^2T}} \frac{\lambda-1}{\lambda-e^{-k^2T}} = -1 \quad (17)$$

Теорема 6. Равенство (17) не выполнено ни при каком $\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq 1$.

Замечание 2. Точки $\lambda = \pm 1$ не являются собственными числами $D\Pi_\alpha$, то есть не являются корнями (17). Для $\lambda = 1$ это видно непосредственно из (17), для $\lambda = -1$ (17) равносильно (обратите внимание на изменение пределов суммирования)

$$-4 \sum_{k=0}^{\infty} \cos(kx_0) \frac{e^{-k^2T}}{(1+e^{-k^2T})^2} = 0. \quad (18)$$

В силу монотонности второго множителя и знакопереживания первого множителя, левая часть выражения всегда строго меньше нуля для $x_0 \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$.

Доказательство. Поскольку $\lambda \neq 1$, (17) можно поделить на $\lambda - 1$ и переписать как

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{\cos(kx_0)}{1+e^{-k^2T}} \frac{1}{\lambda+1} + \frac{\cos(kx_0)}{\lambda-e^{-k^2T}} \frac{\lambda}{\lambda+1} \right) = 0.$$

Согласно замечанию 2, это выражение можно домножить на $\lambda + 1$ и получить

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\cos(kx_0)}{1+e^{-k^2T}} - \frac{\cos(kx_0)\lambda}{\lambda-e^{-k^2T}} \right) = 0.$$

Поскольку область, где мы устанавливаем отсутствие корней уравнения, симметрична относительно нуля, сделаем замену $z = -1/\lambda$:

После такой замены нам нужно удостовериться, что в замыкании единичного круга $|z| \leq 1$ равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\cos(kx_0)}{1 + e^{-k^2 T}} - \frac{\cos(kx_0)}{1 + ze^{-k^2 T}} \right) = 0$$

выполняется только при $z = 1$. Введем обозначение

$$B(z) = \frac{1}{z-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\cos(kx_0)}{1 + e^{-k^2 T}} - \frac{\cos(kx_0)}{1 + ze^{-k^2 T}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(kx_0)}{(1 + ze^{-k^2 T})(1 + e^{k^2 T})}$$

Для завершения доказательства теоремы нам достаточно показать, что у $B(z)$ нет нулей в замыкании единичного круга кроме точки $z = 1$.

Докажем следующее:

Утверждение 2. *В замыкании единичного круга вне вещественной оси мнимая часть выражения*

$$\frac{1}{(1 + ze^{-k^2 T})(1 + e^{k^2 T})}$$

строго монотонна по k .

Это будет означать, что на множестве $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{Im(z) = 0\}$ (где $\overline{\mathbb{D}}$ – замкнутый единичный круг на комплексной плоскости) функция $B(z)$ не обнуляется. После этого мы докажем, что на множестве $\{Im(z) = 0\}$ функция $B(z)$ также не обнуляется, откуда следует желаемый результат об отсутствии собственных значений матрицы дифференциала отображения Пуанкаре вне внутренности единичного круга.

Доказательство. Для удобства обозначим $a(k) = e^{k^2 T}$ при фиксированном T . Проверим монотонность по a выражения

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{(1 + \frac{z}{a})(1 + a)}\right) &= \operatorname{Im}\left(\frac{a}{(a + z)(1 + a)}\right) \\ &= \frac{a}{1 + a} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{a + z}\right) = \frac{a}{1 + a} \frac{-\operatorname{Im}(z)}{|z + a|^2} \end{aligned}$$

Пусть

$$\psi(a, z) = \frac{a}{1 + a} \frac{1}{|z + a|^2}, \quad z = x + iy,$$

тогда

$$\psi(a, z) = \frac{a}{1 + a} \frac{1}{(x + a)^2 + y^2}.$$

$$\begin{aligned}
 \psi(a, z)'_a &= \left(\left(1 - \frac{1}{a+1} \right) \frac{1}{(x+a)^2 + y^2} \right)'_a \\
 &= \frac{1}{(a+1)^2} \frac{1}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{a}{a+1} \frac{2(x+a)}{((x+a)^2 + y^2)^2} \\
 &= \frac{(x+a)^2 + y^2 - 2a(a+1)(x+a)}{((a+1)^2)((x+a)^2 + y^2)^2}.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что $z \in \overline{\mathbb{D}}$,

$$\begin{aligned}
 (x+a)^2 + y^2 - 2a(a+1)(x+a) &= x^2 + y^2 + 2ax + a^2 - 2a(a^2 + x(1+a) + a) \\
 &\leq 1 - a^2 - 2a^3 - 2a^2x \\
 &\leq 1 + a^2 - 2a^3 \leq 0, \quad a \geq 1,
 \end{aligned}$$

и равенство достигается только при $a = 1$ (при $k = 0$). $\square$

Следовательно, мнимая часть слагаемых ряда убывает с возрастанием k , а значит мнимая часть $B(z)$ больше нуля.

Пусть $Im(z) = 0$,

$$\psi(a, z) = \frac{a}{(1+a)(z+a)}$$

вещественно; докажем, что выражение монотонно по a .

$$\psi(a, z)'_a = \frac{1}{(a+1)^2} \frac{1}{z+a} - \frac{a}{a+1} \frac{1}{(a+z)^2} = \frac{z+a-a(a+1)}{(a+z)^2(a+1)^2}$$

Числитель не больше нуля, потому что $|z| \leq 1$, $a \geq 1$.

Таким образом, при $x_0 \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ выполняется $B(z) \neq 0$, а значит, все собственные числа $D\Pi_\alpha$ меньше единицы по модулю. $\square$

§5. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ С ФУНКЦИЕЙ СРЕДНЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ m , БЛИЗКОЙ К δ_{x_0}

Обозначим за $\Pi(\varphi, m)$ сужение отображения Пуанкаре для функции средней температуры $m \in (H^{1-\delta})'$. За $t^\alpha(\varphi, m)$ примем такое наименьшее t , что $P^\alpha(R^\alpha \varphi, t) = \beta$. За $u(\varphi, t)$ будем обозначать решение задачи (4) с начальным данным φ в момент времени t .

Следующая теорема была доказана Канторовичем [1].

Теорема 7. Пусть отображение $F : D \subset X \rightarrow Y$, C^2 дифференцируемо. Рассмотрим итеративный процесс

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n).$$

Пусть выполнено:

- $\|F''\| \leq K, K > 0$.
- $\|F'(x_0)^{-1}\| \leq A, A > 0$.
- $\|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| \leq \eta, \eta > 0$.
- $h = AK\eta \leq \frac{1}{2}$.
- $\bar{S}(x, t^*) = \left\{ x \in X : \|x - x_0\| \leq t^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{AK} \right\} \subset D$

Тогда итеративный процесс определён, содержится в открытом шаре $S(x_0, t)$ и сходится к x^* , являющемуся решением уравнения $F(x) = 0$.

Теорема 8. Пусть φ_0 – устойчивое периодическое решение задачи, соответствующее некоторой функции средней температуры $m_0 \in (H^{1-\delta})'$, такое что $\langle m_0, u(\varphi_0, t_\alpha(\varphi_0, m_0)) \rangle \neq 0$. Тогда найдётся $\varepsilon > 0$, такое что для любого m из $H^{1-\delta}$, такого что $\|m - m_0\|_{(H^{1-\delta})'} \leq \varepsilon$ существует устойчивое периодическое решение.

Доказательство. Рассмотрим $F(\varphi) = \varphi - \Pi(\varphi, m) : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$. В качестве множества D из теоремы 7 выберем такую окрестность φ_0 , что $\rho(D_\varphi \Pi(\varphi, m)) < 1$ для всех $\varphi \in D$. Данное множество не пусто в силу непрерывной зависимости $D_\varphi \Pi(\varphi_0, m)$ от φ и m в окрестности периодического решения и полунепрерывности радиуса сверху. В силу отделённости спектрального радиуса от 1, оператор $F'(\varphi_0) = Id - D_\varphi(\Pi(\varphi, m))$ обратим, тогда $\|F'(\varphi_0)^{-1}\| \leq A < \infty$.

Проверим непрерывность $D_\varphi \Pi(\varphi, m)$ по m :

$$\begin{aligned} D_\varphi \Pi_\alpha(\varphi, m)h &= D_\varphi(Eu(R_\alpha(\varphi, m), t(\varphi, m)))h \\ &= E(D_\varphi(P^\alpha R_\alpha(\varphi, m), t(\varphi, m)))h \\ &= E(D_\varphi P^\alpha(\varphi, t(\varphi, m))h + D_t u(R_\alpha(\varphi, m), t(\varphi, m))D_\varphi t(\varphi, m)h). \end{aligned}$$

Заметим, что для непрерывности оператора $D_\varphi \Pi_\alpha$ по m достаточно показать непрерывную зависимость $t(\varphi, m)$ и $D_\varphi t(\varphi, m)$ от m . Для этого применим теорему о неявной функции к следующему равенству:

$$\widehat{u}(R_\alpha(\varphi, m), t(\varphi, m)) = \langle m, u(R_\alpha(\varphi, m), t(\varphi, m)) \rangle = \beta.$$

Поскольку R_α это оператор добавления константы,

$$u(R_\alpha(\varphi, m), t) = u(\varphi, t) + \frac{\alpha - \langle m, \varphi \rangle}{\langle m, 1 \rangle}.$$

Подставляя данное равенство в формулу выше и дифференцируя по φ , m и t получим:

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\varphi, t(\varphi, m)) &= \beta - \alpha + \langle m, \varphi \rangle. \\ \langle \zeta, u(\varphi, t) - \varphi \rangle + \langle m, u'_t(\varphi, t) \rangle Dt(\varphi, m)(h, \zeta) - \langle m, h \rangle, \\ + \langle m, D_\varphi(u(\varphi, t))h \rangle &= 0 \quad h \in H^1, \zeta \in (H^{1-\delta})', \\ Dt(\varphi, m)(h, \zeta) &= \frac{\langle m, h \rangle + \langle \zeta, u(\varphi, t) - \varphi \rangle - \langle m, D_\varphi(u(\varphi, t))h \rangle}{\langle m, u'_t(\varphi, t) \rangle}, \\ h \in H^1, \zeta \in (H^{1-\delta})'. \end{aligned} \quad (19)$$

Знаменатель не обнуляется в силу отделённости от нуля $\langle m_0, u'_t(\varphi, t) \rangle$ в окрестности устойчивого периодического решения и близости m и m_0 . Таким образом, в окрестности периодического решения, $Dt(\varphi, m)$ является непрерывным ограниченным оператором, а $t(\varphi, m)$ – принадлежит C^2 .

Заметим, что отображение $\Pi_\alpha = E(u(R_\alpha(\varphi, m), t(\varphi, m)))$ является C^2 гладким по φ , поскольку $u(\varphi, t)$ и $R(\varphi, m)$ являются аффинными преобразованиями, а C^2 гладкость $t(\varphi, m)$ была доказана выше.

Далее, оценим

$$\begin{aligned} \|(F'(\varphi_0))^{-1}F(\varphi_0)\| &\leq A\|\varphi_0 - \Pi(\varphi_0, m_0) + \Pi(\varphi_0, m_0) - \Pi(\varphi_0, m)\| \\ &= A\|\Pi(\varphi_0, m_0) - \Pi(\varphi_0, m)\| \\ &\leq \max_{z \in [0;1]} \|D_\varphi \Pi_\beta(z\Pi_\alpha(\varphi_0, m) + (1-z)\Pi_\beta(\varphi_0, m_0))(\Pi_\alpha(\varphi_0, m) - \Pi_\alpha(\varphi_0, m_0))\| \\ &\quad + \max_{z \in [0;1]} \|D_m \Pi_\beta(z\Pi_\alpha(\varphi_0, m) + (1-z)\Pi_\beta(\varphi_0, m_0))(m - m_0)\| \\ &\leq \max_{\substack{\varphi \in B(\Pi_\alpha(\varphi_0, m_0)) \\ \tilde{m} \in B(m_0)}} \|D_\varphi \Pi_\beta(\varphi, \tilde{m})\| \max_{\tilde{m} \in B(m_0)} \|D_m \Pi_\alpha(\varphi_0, \tilde{m})\| \|m - m_0\| \\ &\quad + \max_{\substack{\varphi \in B(\Pi_\alpha(\varphi_0, m_0)) \\ \tilde{m} \in B(m_0)}} \|D_m \Pi_\beta(\varphi, \tilde{m})\| \|m - m_0\|. \end{aligned}$$

Покажем, что $\|D_m \Pi_\alpha(\varphi_0, m_0)\| < \infty$:

$$\begin{aligned}
& \|\Pi_\alpha(\varphi, m_0) - \Pi_\alpha(\varphi, m)\| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} \vdots \\ (a_k(0) - \frac{1}{k^2}) e^{-k^2 t(\varphi, m_0)} + \frac{1}{k^2} \\ \vdots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \vdots \\ (a_k(0) - \frac{1}{k^2}) e^{-k^2 t(\varphi, m)} + \frac{1}{k^2} \\ \vdots \end{pmatrix} \right\| \\
&\leq \left\| \begin{pmatrix} \vdots \\ (-k^2 a_k(0) + 1) e^{-k^2 \min(t(\varphi, m), t(\varphi, m_0))} \\ \vdots \end{pmatrix} \right\| \cdot |t(\varphi, m_0) - t(\varphi, m)| \\
&\leq |t(\varphi, m) - t(\varphi, m_0)| \|\varphi\| \leq \sup_{\tilde{m} \in B(m_0)} \|D_m t(\varphi, \tilde{m})\| \|m - m_0\| \|\varphi\|.
\end{aligned}$$

Согласно (19), норма $\|D_m t(\varphi, \tilde{m})\|$ ограничена в окрестности периодического решения. Таким образом с помощью выбора m , достаточно близкого к m_0 η в теореме Канторovichа можно сделать сколь угодно малым.

Тогда существует $\varphi^* \in \left\{ \varphi \in W : \|\varphi - \varphi_0\| \leq t^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{AK} \right\}$ – неподвижная точка отображения $\Pi(\varphi, m)$. Более того, поскольку спектральный радиус $D_\varphi(\varphi^*, m)$ меньше 1, существует $N \geq 1$, такой что

$$\|D_\varphi^N(\varphi^*, m)\| < 1,$$

тем самым неподвижная точка устойчива. $\square$

Замечание 3. Если m_0 – это точечный заряд δ_{x_0} , а m – вероятностная мера с носителем $\text{supp } m \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, то $\|m - m_0\|_{(H^{1-\delta})'} < \sqrt{\varepsilon}$ для $\delta < \frac{1}{2}$

Доказательство. Отметим, что для $m \in C^\infty$

$$\begin{aligned}
|\langle m - m_0, h \rangle| &= \left| \int_0^\pi m(x) (h(x) - h(x_0)) dx \right| \\
&\leq \int_0^\pi m(x) \|h\|_{H^{1-\delta}} |x - x_0|^{\frac{1}{2}-\delta} \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta} \|h\|_{H^{1-\delta}}.
\end{aligned}$$

В случае не абсолютно непрерывной меры m данная оценка верна, поскольку гладкие функции плотны в $(H^{1-\delta})'$. $\square$

Теорема 2 является непосредственным следствием теоремы 4 и лемм 1, 2.

Теорема 3 является непосредственным следствием теорем 2, 8, поскольку из доказательства теоремы 2 следует, что $\langle m_0, u(R_\alpha \varphi_0, T) \rangle > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. В. Канторович, *О методе Ньютона*. — Тр. МИАН СССР **28** (1949), 104–144.
2. H. W. Alt, *On the thermostat problem*. — *Control Cyb.* **14** (1985), 171–193.
3. P.-A. Bliman, A. M. Krasnosel'skii, *Periodic solutions of linear systems coupled with relay*. — *Nonlinear Anal.* **30**, No. 2 (1997), 687–696.
4. M. Brokate, J. Sprekels, *Hysteresis and Phase Transitions*. Springer, Berlin, 1996.
5. M. Fečkan, *Periodic solutions in systems at resonances with small relay hysteresis*. — *Math. Slovaca* **49**, No. 1 (1999), 41–52.
6. A. Friedman, L.-S. Jiang, *Periodic solutions for a thermostat control problem*. — *Commun. Partial Differential Equations* **13** (5) (1988), 515–550.
7. I. G. Götz, K.-H. Hoffmann, A. M. Meirmanov, *Periodic solutions of the Stefan problem with hysteresis-type boundary conditions*. — *Manuscripta Math.* **78** (1983), 179–199.
8. P. Gurevich, *Periodic solutions of parabolic problems with hysteresis on the boundary*. — *Discrete and Continuous Dynamical Systems* **29**, No. 3 (2011).
9. P. L. Gurevich, W. Jäger, A. L. Skubachevskii, *On periodicity of solutions for thermocontrol problems with hysteresis-type switches*. — *SIAM J. Math. Anal.* **41**, No. 2 (2009), 733–752.
10. P. Gurevich, S. Tikhomirov, *Symmetric periodic solutions of parabolic problems with discontinuous hysteresis*. — *J. Dynam. Diff. Equations* **23**, No. 4 (2011), 923–960.
11. M. A. Krasnosel'skii, A. V. Pokrovskii, *Systems with Hysteresis*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1989. (Translated from Russian: *Sistemy s Gisterезисом*, Nauka, Moscow, 1983.)
12. J. Macki, P. Nistri, P. Zecca, *Mathematical models for hysteresis*. — *SIAM Rev.* **35**, No. 1 (1993), 94–123.
13. J. Prüß, *Periodic solutions of the thermostat problem*. — Proc. Conf. “Differential Equations in Banach Spaces,” Bologna, July 1985, *Lecture Notes Math.*, **1223**, Springer-Verlag, Berlin — New York, 1986, pp. 216–226.
14. T. I. Seidman, *Switching systems and periodicity*. — Proc. Conf. “Nonlinear Semigroups, Partial Differential Equations and Attractors,” Washington, DC, 1987, *Lecture Notes in Math.*, **1394**, Springer-Verlag, Berlin — New York, 1989, pp. 199–210.
15. S. Varigonda, T. Georgiou, *Dynamics of relay relaxation oscillators*. — *IEEE Trans. Automat. Control*, **46**, No. 1 (2001), 65–77.
16. A. Visintin, *Differential Models of Hysteresis*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1994.

Enin A., Perstneva P., Tikhomirov S. Periodic solutions of parabolic equations with hysteresis in the dimension 1.

We consider the heat equation in the interval with non-ideal relay in the boundary condition. Thermostat is our prototype model. In the most important case of the location of measuring devices near the boundary of the interval we prove existence and stability of unimodal periodic solutions.

Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
С.-Петербургский государственный университет,
14 линия В.О., дом 29Б,
199178 Санкт-Петербург, Россия;
С.-Петербургский государственный
электротехнический университет “ЛЭТИ”,
ул. Профессора Попова, дом 5,
197376 С.-Петербург, Россия

E-mail: enin.alex@gmail.com

E-mail: deepbrightblue@gmail.com

С.-Петербургский государственный университет,
Университетская набережная, д. 7–9
199034 С.-Петербург, Россия

E-mail: sergey.tikhomirov@gmail.com

Поступило 24 декабря 2019 г.