Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 489, 2020 г.

Ю. А. Алхутов, М. Д. Сурначёв

ОЦЕНКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ДИВЕРГЕНТНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СНОСОМ

§1. Введение

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$, где $n \geqslant 3$, уравнение

$$Lu = \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + b(x) \cdot \nabla u = 0, \tag{1.1}$$

с симметричной измеримой матрицей $a(x) = \{a_{ij}(x)\}$, удовлетворяющей условию равномерной эллиптичности, то есть

$$\alpha^{-1}|\xi|^2 \leqslant a\xi \cdot \xi \leqslant \alpha|\xi|^2, \ \alpha = const > 1 \tag{1.2}$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, и $b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$.

Целью настоящей работы является нахождение условий, при которых для фундаментального решения $\Gamma(x, y)$ уравнения (1.1) во всём пространстве будут иметь место глобальные двусторонние оценки

$$C_1|x - y|^{2-n} \leqslant \Gamma(x, y) \leqslant C_2|x - y|^{2-n}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

В случае $b = 0$ такие оценки получены в [1]. Для функции Грина задачи Дирихле в ограниченной области Ω локальные оценки такого вида установлены в работе [2] в случае, когда $b \in L^p(\Omega)$ и $p > n$. В статье [3] оценка (1.3) доказана в предположении, что оператор L из (1.1) субкритический (есть положительная функция Грина), первые производные старших коэффициентов a_{ij} и коэффициенты b_i гёльдеровы во всём пространстве, и

$$\lim_{R\to\infty} \sup_x \int\limits_{\{|y|>R\}} |b(y)| \cdot |x - y|^{1-n} \, dy = 0.$$

Для параболических уравнений вида $u_t = \operatorname{div}(A(x, t)\nabla u) + b(x, t) \cdot \nabla u$ с равномерно эллиптической матрицей A с коэффициентами, непрерывными по Гёльдеру, оценки фундаментального решения были получены в работах [4, 5]. Из результатов этих работ следует, что при

Ключевые слова: конвекция-диффузия, снос, фундаментальное решение, функция Грина, класс Като.

условии малости величины

$$\sup_x \int\limits_{\mathbb{R}^n} |b(y)| \cdot |x-y|^{1-n}\, dy \tag{1.4}$$

для фундаментального решения имеет место глобальная двусторонняя гауссовская оценка типа Аронсона, из которой вытекает (1.3). Оценка малости величины в (1.4) зависит от n, α и гёльдеровской нормы коэффициентов старшей части. Для параболических уравнений со сносом и потенциалом, не зависящими от времени, и гёльдеровскими старшими коэффициентами близкие результаты получены в [6] методами теории полугрупп.

В случае эллиптического уравнения техника, используемая в [4] и [5], была обобщена на случай старших коэффициентов из класса VMO в работе [7]. Доказанная в этой работе оценка носит локальный характер и получается в терминах величины

$$\int\limits_0^R \frac{\sigma_\gamma(t)}{t}\, dt, \quad \sigma_\gamma(t) = \left(\sup_x \int\limits_{t/2 \leqslant |x-y| \leqslant t} \frac{|b(y)|^\gamma}{|x-y|^{n-\gamma}} dy \right)^{1/\gamma}, \quad \gamma > 1. \tag{1.5}$$

В работах [3–7] условие дополнительной регулярности коэффициентов старшей части уравнения существенно используется в доказательстве. Дополнительное требование на регулярность коэффициентов необходимо для корректного определения члена $b \cdot \nabla u$ в уравнении – он должен быть хотя бы суммируемым.

Отметим также работу [8], в которой был получен ряд априорных оценок решений эллиптических уравнений второго порядка с младшими членами из классов Като без дополнительных условий на регулярность коэффициентов старшей части.

В настоящей работе оценка (1.3) получена без дополнительных предположений о регулярности коэффициентов a_{ij} – требуется только измеримость и выполнение условия эллиптичности (1.2).

Далее через $B_R^{x_0}$ будем обозначать открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x_0 радиуса R, а через $\overline{B}_R^{x_0}$ – его замыкание. Положим

$$Q_{r_1,r_2}^{x_0} = B_{r_2}^{x_0} \setminus \overline{B}_{r_1}^{x_0}.$$

и пусть

$$\sigma^2(r) = \sup_x \int\limits_{Q^x_{r/2,r}} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\,dy, \quad \varkappa = \int\limits_0^\infty \frac{\sigma(t)}{t}\,dt. \tag{1.6}$$

Величина $\sigma(r)$ совпадает с $\sigma_2(r)$ из (1.5). Условие конечности $\varkappa$ в (1.6) близко к условию Като, но сильнее. Из сходимости интеграла в определении величины $\varkappa$ следует принадлежность $|b|^2$ классу Като K_n, то есть

$$\lim_{r\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int\limits_{B^x_r} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\,dy = 0, \tag{1.7}$$

а также неравенство

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int\limits_{B^x_r} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\,dy \leqslant (4\varkappa)^2.$$

Доказательство этих соотношений содержится в следующем разделе (см. (2.2) и (2.3)).

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (1.2). *Найдётся такое* $\varkappa_0 = \varkappa_0(n,\alpha) > 0$, *что если* $\varkappa < \varkappa_0$, *то уравнение* (1.1) *имеет фундаментальное решение, удовлетворяющее оценке* (1.3), *в которой постоянные* C_1 *и* C_2 *зависят только от* n *и* α.

Доказательство теоремы 1 будем вести следующим образом. Для $k > 0$ обозначим через b_k векторное поле с коэффициентами $(b_k)_i = \max(-k, \min(b_i, k))$ и положим $L_k u = \operatorname{div}(a\nabla u) + b_k \cdot \nabla u$. Сначала мы получаем оценки функции Грина задачи Дирихле в шаре $B^{x_0}_R$ для операторов L_k с постоянными, не зависящими от k. Далее, после предельного перехода при $k \to \infty$, приходим к аналогичным оценкам функции Грина оператора L в шаре $B^{x_0}_R$. После этого, переходя к пределу при $R \to \infty$, приходим к оценкам фундаментального решения оператора L.

Далее будем обозначать

$$\theta(r) = \int\limits_0^r \frac{\sigma(t)}{t}\,dt.$$

Если дана функция $g = g(x, y)$ двух переменных и к ней применяется какой-то оператор, например ∇, то обозначение $\nabla g(\cdot, y)$ означает, что оператор ∇ применяется по первой переменной при фиксированном значении второй. Аналогичное обозначение будем применять и по отношению ко второй переменной.

§2. Вспомогательные утверждения

Начнём с простого утверждения. Если бы в определении величины $\sigma(r)$ в (1.6) интеграл брался бы по шару, а не по слою, утверждение было бы очевидным. В нашем случае необходимы более тщательные рассуждения.

Лемма 1. *Для любого $R > 0$ справедлива оценка*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sigma(2^{-j}R) \leqslant 4\theta(3R/2).$$

Доказательство. Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$ множество $Q^x_{s/2,s}$ содержит шаровой слой $Q^x_{r/2,3r/4}$ при $3r/4 < s < r$ и шаровой слой $Q^x_{3r/4,r}$ при $r \leqslant s < 3r/2$. Поэтому, для $3r/4 < s < r$

$$\Bigg(\int\limits_{Q^x_{r/2,3r/4}} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\, dy \Bigg)^{1/2} \leqslant \Bigg(\int\limits_{Q^x_{s/2,s}} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\, dy \Bigg)^{1/2},$$

а для $r \leqslant s < 3r/2$

$$\Bigg(\int\limits_{Q^x_{3r/4,r}} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\, dy \Bigg)^{1/2} \leqslant \Bigg(\int\limits_{Q^x_{s/2,s}} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\, dy \Bigg)^{1/2}.$$

Отсюда,

$$\Bigg(\int\limits_{Q^x_{r/2,r}} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\, dy \Bigg)^{1/2} \\ \leqslant \Bigg(\int\limits_{Q^x_{r/2,3r/4}} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\, dy \Bigg)^{1/2} + \Bigg(\int\limits_{Q^x_{3r/4,r}} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\, dy \Bigg)^{1/2}$$

$$\leqslant \int\limits_{3r/4}^{r} \frac{ds}{s\ln(4/3)} \Big(\int\limits_{Q^x_{s/2,s}} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\, dy \Big)^{1/2}$$
$$+ \int\limits_{r}^{3r/2} \frac{ds}{s\ln(3/2)} \Big(\int\limits_{Q^x_{s/2,s}} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\, dy \Big)^{1/2}$$
$$\leqslant \int\limits_{3r/4}^{3r/2} \frac{ds}{s\ln(4/3)} \Big(\int\limits_{Q^x_{s/2,s}} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\, dy \Big)^{1/2} \leqslant 4 \int\limits_{3r/4}^{3r/2} \frac{\sigma(s)}{s}\, ds.$$

Переходя к супремуму по x в левой части данного неравенства, получаем

$$\sigma(r) \leqslant 4 \int\limits_{3r/4}^{3r/2} \frac{\sigma(s)}{s}\, ds.$$

Используя эту оценку, приходим к неравенству

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sigma(2^{-j}R) \leqslant 4 \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{3\cdot 2^{j-2}R}^{3\cdot 2^{j-1}R} \frac{\sigma(s)}{s}\, ds \leqslant 4 \int\limits_{0}^{3R/2} \frac{\sigma(s)}{s}\, ds = 4\theta(3R/2).$$

Лемма 1 доказана. □

Покажем, что условие малости величины $\varkappa$ из (1.6) влечёт подчинённость младшего члена старшей части.

Лемма 2. *Найдётся такое $\varkappa_0 = \varkappa_0(n, \alpha)$, что если $\varkappa \leqslant \varkappa_0$, то для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ выполнено неравенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} a^{-1} b \cdot b \varphi^2\, dx \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} a \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi\, dx, \tag{2.1}$$

в котором a^{-1} – обратная матрица к a.

Доказательство. Из теоремы вложения для классов Като (см. [8] и ссылки там) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |b|^2 \varphi^2\, dx \leqslant C(n) \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\, dy \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|^2\, dx$$

Отсюда, пользуясь определением функции σ, получим

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\,dy &\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}}\int\limits_{Q^x_{2^j,2^{j+1}}} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\,dy \\ &\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sigma^2(2^j) \leqslant \Bigl(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sigma(2^j)\Bigr)^2 \leqslant (4\varkappa)^2.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |b|^2\varphi^2\,dx \leqslant C(n)\varkappa^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|^2\,dx.$$

В силу условия эллиптичности (1.2)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} a^{-1}b\cdot b\varphi^2\,dx \leqslant C(n)\varkappa^2\alpha^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} a\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\,dx.$$

Выбирая здесь $\varkappa \leqslant \varkappa_0 = (2C(n))^{-1/2}\alpha^{-1}$, приходим к (2.1). Лемма 2 доказана. □

Для интеграла из (1.7) аналогично (2.2), используя оценку леммы 1, имеем

$$\int\limits_{B^x_r} \frac{|b(y)|^2}{|x-y|^{n-2}}\,dy \leqslant \sum_{j=0}^{\infty}\sigma^2(2^{-j}r) \leqslant \Bigl(\sum_{j=0}^{\infty}\sigma(2^{-j}r)\Bigr)^2 \leqslant (4\theta(3r/2))^2, \tag{2.3}$$

откуда и следует равенство нулю предела в (1.7).

Предложение 3. *Если выполнено утверждение леммы 2, то*

$$\int\limits_{B^x_\rho} |b(y)|^2\,dy \leqslant \alpha^2 C(n)\rho^{n-2} \tag{2.4}$$

для всех $x\in\mathbb{R}^n$ и $\rho>0$.

Доказательство. Выберем в (2.1) функцию $\varphi\in C_0^\infty(B^x_{2\rho})$ такую, что $\varphi=1$ в B^x_ρ и $|\nabla\varphi|\leqslant 4/\rho$. Для завершения доказательства осталось воспользоваться условием эллиптичности (1.2). Предложение 3 доказано. □

Наряду с оператором L будем рассматривать формально сопряжённый к нему L^*, действие которого задаётся как

$$L^*u = \operatorname{div}(a\nabla u) - \operatorname{div}(bu).$$

Ниже $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область. Через $W^{-1,2}(\Omega)$ обозначаем пространство, сопряжённое к пространству $W_0^{1,2}(\Omega)$, которое является замыканием $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $W^{1,2}(\Omega)$.

Скажем, что функция $u \in W^{1,2}(\Omega)$ является решением уравнения $-Lu = f \in W^{-1,2}(\Omega)$ в Ω, если для всех $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ выполнено равенство

$$\int\limits_\Omega a\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx - \int\limits_\Omega b\varphi \cdot \nabla u\, dx = \langle f, \varphi\rangle, \tag{2.5}$$

в котором $\langle f, \varphi\rangle$ означает действие функционала $f \in W^{-1,2}(\Omega)$ на $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Аналогично определяется решение $u \in W^{1,2}(\Omega)$ сопряженного уравнения $-L^*u = f \in W^{-1,2}(\Omega)$ в области Ω, которое понимается в смысле интегрального тождества

$$\int\limits_\Omega a\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx - \int\limits_\Omega bu \cdot \nabla\varphi\, dx = \langle f, \varphi\rangle, \tag{2.6}$$

выполненного для всех $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Если дополнительно $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, то будем говорить, что функция u является решением соответствующей задачи Дирихле (для оператора L или L^*) с однородным краевым условием на границе Ω.

При выполнении утверждения леммы 2 операторы L и L^* являются ограниченными коэрцитивными операторами из $W_0^{1,2}(\Omega)$ в $W^{-1,2}(\Omega)$. Ограниченность здесь очевидна, покажем коэрцитивность. По неравенству Коши, (2.1) и условию эллиптичности получаем

$$\begin{aligned}
(-Lu, u) = (-L^*u, u) &= \int\limits_\Omega \big(a(x)\nabla u \cdot \nabla u - b(x)u \cdot \nabla u\big)\, dx \\
&\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_\Omega a(x)\nabla u \cdot \nabla u\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega a^{-1}(x)b(x) \cdot b(x)u^2\, dx \\
&\geqslant \frac{1}{4}\int\limits_\Omega a(x)\nabla u \cdot \nabla u\, dx \geqslant \frac{1}{4\alpha}\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx
\end{aligned}$$

В дальнейшем будем считать утверждение леммы 2 выполненным. Тогда для L и L^* имеет место принцип сравнения (см. [1], [2]): если

$L^*u \leqslant L^*v$ (или $Lu \leqslant Lv$) в вариационном смысле в Ω и $u \geqslant v$ на $\partial\Omega$, то $u \geqslant v$ в Ω.

Решение задачи Дирихле для уравнения $-Lu = \mu$, где μ – мера, носитель которой лежит строго внутри области Ω, и u равно нулю на границе Ω, определяется как функция $u \in L^1(\Omega)$, удовлетворяющая равенству

$$-\int\limits_{\Omega} uL^*\varphi\,dx = \int\limits_{\Omega} \varphi\,d\mu \tag{2.7}$$

для всех $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C(\Omega)$ таких, что $L^*\varphi \in C(\overline{\Omega})$. Решение задачи Дирихле для уравнения $-L^*u = \mu$ понимается аналогичным образом, с заменой L^* на L в (2.7). Подробно см. [1, 2].

Через $\mathcal{L}$ обозначим главную часть оператора L, то есть

$$\mathcal{L}u = \operatorname{div}(a\nabla u).$$

Пусть $\mathcal{G}_{x_0,R}(x, y)$ – функция Грина задачи Дирихле для оператора $\mathcal{L}$ в шаре $B_R^{x_0}$ с полюсом в точке y, то есть решение задачи

$$\mathcal{L}_x\mathcal{G}_{x_0,R}(x, y) = -\delta(x - y) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \mathcal{G}_{x_0,R}(\cdot, y) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

Для неё (см. [1]) имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}_{x_0,R}(x, y) \geqslant K_1|x - y|^{2-n}, \quad x, y \in B_{R/2}^{x_0}, \\ &\mathcal{G}_{x_0,R}(x, y) \leqslant K_2|x - y|^{2-n}, \quad x, y \in B_R^{x_0}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где положительные константы K_1, K_2 зависят только от n и α.

Так как при $x \neq y$ функция $\mathcal{G}_{x_0,R}$ является решением уравнения $\mathcal{L}\mathcal{G}_{x_0,R}(\cdot, y) = 0$, то для любого $r > 0$ имеет место оценка Каччопполи

$$\begin{aligned} &\int\limits_{Q^y_{r/2,r}\cap B_R^{x_0}} |\nabla_x\mathcal{G}_{x_0,R}(x, y)|^2\,dx \\ &\leqslant C(\alpha, n)r^{-2} \int\limits_{Q^y_{3r/8,3r/2}\cap B_R^{x_0}} |\mathcal{G}_{x_0,R}(x, y)|^2\,dx \leqslant C(n, \alpha)K_2^2 r^{2-n}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Для получения этой оценки в определении решения достаточно выбрать в (2.5), в котором $b = 0$ и $f = 0$ пробную функцию $\mathcal{G}_{x_0,R}(x, y)\xi^2(z)$, где $\xi \in C_0^\infty(Q^y_{r/2,4r})$, $\xi = 1$ в слое $Q^y_{r,2r}$, $|\nabla\xi| \leqslant 4r^{-1}$ и $0 \leqslant \xi \leqslant 1$.

Следующая оценка содержится в работе [7]. Для удобства читателя приведём доказательство.

Лемма 4. *Для любых* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ *и* $y \in B_R^{x_0}$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_{B_R^{x_0}} |b(z) \cdot \nabla_z \mathcal{G}_{x_0,R}(z,y)|\, dz \leqslant C(n,\alpha) K_2 \theta(3R).$$

Доказательство. Полагая $A_j = Q^y_{2^{-j}R, 2^{1-j}R} \cap B_R^{x_0}$, где $j = 0, 1, \ldots$, найдем

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_R^{x_0}} |b(z) \cdot \nabla_z \mathcal{G}_{x_0,R}(z,y)|\, dz &\leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} \int\limits_{A_j} |b(z) \cdot \nabla_z \mathcal{G}_{x_0,R}(z,y)|\, dz \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} \Bigg(\int\limits_{A_j} |b(z)|^2\, dz \Bigg)^{1/2} \Bigg(\int\limits_{A_j} |\nabla_z \mathcal{G}_{x_0,R}(z,y)|^2\, dz \Bigg)^{1/2} \\ &\leqslant C(n) K_2 \sum_{j=0}^{+\infty} \Bigg(\int\limits_{A_j} \frac{|b(z)|^2}{|z-y|^{n-2}}\, dz \Bigg)^{1/2} \\ &\leqslant C(n,\alpha) K_2 \sum_{j=0}^{\infty} \sigma(2^{1-j}R) \leqslant C(n,\alpha) K_2 \theta(3R).\end{aligned}$$

На последнем шаге мы воспользовались оценкой леммы 1. Лемма 4 доказана. □

Нам понадобятся неравенства Каччопполи для решений уравнения (1.1) и сопряжённого к нему уравнения.

Лемма 5. *Пусть* $v \in W^{1,2}(\Omega)$ *и* $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$. *Если* $Lv = 0$ *в* Ω, *то*

$$\int\limits_\Omega a\xi^2 \nabla v \cdot \nabla v\, dx \leqslant 8 \int\limits_\Omega v^2 a \nabla\xi \cdot \nabla\xi\, dx + 2 \int\limits_\Omega v^2 a^{-1} b \cdot b \xi^2\, dx, \tag{2.10}$$

а если $L^* v = 0$ *в* Ω, *то*

$$\int\limits_\Omega a\xi^2 \nabla v \cdot \nabla v\, dx \leqslant 10 \int\limits_\Omega v^2 a \nabla\xi \cdot \nabla\xi\, dx + 4 \int\limits_\Omega v^2 a^{-1} b \cdot b \xi^2\, dx. \tag{2.11}$$

Доказательство. Для доказательства неравенства (2.10) выберем в интегральном тождестве (2.5) пробную функцию $v\xi^2$, что приведет к равенству

$$\int\limits_{\Omega} a\xi^2 \nabla v \cdot \nabla v\,dx = -2\int\limits_{\Omega} av\xi\nabla v \cdot \nabla\xi\,dx + \int\limits_{\Omega} v\xi^2 b\cdot\nabla v\,dx. \tag{2.12}$$

Применение неравенства Коши к подынтегральным членам в правой части в (2.12) приводит к (2.10). Неравенство (2.11) доказывается аналогично с той разницей, что для решения уравнения $L^*v = 0$ в правой части (2.12) появляется дополнительный интеграл от величины $2v^2\xi b\cdot\nabla\xi$. Лемма 5 доказана. □

§3. Оценки функции Грина для ограниченного сноса

В этом разделе мы получаем оценки функции Грина $G_{x_0,R}(x,y)$ задачи Дирихле для оператора L в шаре $B_R^{x_0}$ при дополнительном условии $b \in L^\infty(B_R^{x_0})$. Существование данной функции следует из результата работы [2].

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (1.2) *и дополнительно* $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Найдётся такое* $\varkappa_0 = \varkappa_0(n,\alpha) > 0$, *что если* $\varkappa < \varkappa_0$, *то в любом шаре* $B_R^{x_0}$ *функция Грина* $G_{x_0,R}$ *задачи Дирихле для оператора* L *удовлетворяет оценкам*

$$G_{x_0,R}(x,y) \geqslant \widetilde{C}_1|x-y|^{2-n}, \quad \forall x,y \in B_{R/2}^{x_0}, \tag{3.1}$$

и

$$G_{x_0,R}(x,y) \leqslant \widetilde{C}_2|x-y|^{2-n}, \quad \forall x,y \in B_R^{x_0}, \tag{3.2}$$

в которых положительные постоянные $\widetilde{C}_1$ *и* $\widetilde{C}_2$ *зависят только от* n *и* α.

Доказательство теоремы 2. По определению функции Грина $\mathcal{G}_{x_0,R}(x,y)$ задачи Дирихле для оператора $\mathcal{L}$ с полюсом в точке y имеем

$$\mathcal{L}_x\mathcal{G}_{x_0,R}(x,y) = \operatorname{div}_x(a(x)\nabla_x\mathcal{G}_{x_0,R}(x,y)) = -\delta(x-y). \tag{3.3}$$

По определению функции Грина $G_{x_0,R}$ задачи Дирихле для оператора L с полюсом в точке y,

$$\begin{aligned} L_xG_{x_0,R}(x,y) &= \operatorname{div}_x(a(x)\nabla_xG_{x_0,R}(x,y)) + b(x)\cdot\nabla_xG_{x_0,R}(x,y) \\ &= -\delta(x-y). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Вычитая из (3.4) равенство (3.3), приходим к соотношению

$$L_x(G_{x_0,R}(x,y) - \mathcal{G}_{x_0,R}(x,y)) = -b(x)\cdot\nabla_x\mathcal{G}_{x_0,R}(x,y).$$

Представление решения через функцию Грина даёт

$$G_{x_0,R}(x,y) = \mathcal{G}_{x_0,R}(x,y) + \int\limits_{B_R^{x_0}} G_{x_0,R}(x,z)b(z)\cdot\nabla_z\mathcal{G}_{x_0,R}(z,y)\,dz. \quad (3.5)$$

Сходимость интеграла в правой части этого равенства следует из приведённых ниже оценок.

Положим

$$(Bf)(x,y) = \int\limits_{B_R^{x_0}} f(x,z)b(z)\cdot\nabla_z\mathcal{G}_{x_0,R}(z,y)\,dz.$$

Тогда уравнение (3.5) запишется в виде $(I-B)G_{x_0,R} = \mathcal{G}_{x_0,R}$, где I – единичный оператор. Запишем формально ряд Неймана

$$G_{x_0,R}(x,y) = \mathcal{G}_{x_0,R}(x,y) + \sum_{k=1}^{\infty} B^k\mathcal{G}_{x_0,R}. \quad (3.6)$$

Полагая $J_k(x,y) = B^k\mathcal{G}_{x_0,R}(x,y)$, получим

$$J_k(x,y) = BJ_{k-1}(x,y) = \int\limits_{B_R^{x_0}} J_{k-1}(x,z)b(z)\cdot\nabla_z\mathcal{G}_{x_0,R}(z,y)\,dz,$$

$$J_0(x,y) = \mathcal{G}_{x_0,R}(x,y).$$

Далее доказательство следует схеме рассуждений работ [4], [5], [7]. Докажем оценку

$$J_k(x,y) \leqslant c_k|x-y|^{2-n}, \quad k\geqslant 0, \quad c_k = (C(n,\alpha)K_2\varkappa)^k K_2. \quad (3.7)$$

При $k=0$ данная оценка является оценкой функции Грина невозмущённого уравнения (2.8). Далее будем вести доказательство по индукции. Покажем, что из оценки (3.7), выполненной для k, следует аналогичная оценка для $k+1$. Для точек $x,y\in B_R^{x_0}$ положим $\rho = |x-y|/2$ и оценим величину

$$J_{k+1}(x,y) = \Bigg(\int\limits_{B_R^{x_0}\cap B_\rho^x} + \int\limits_{B_R^{x_0}\setminus B_\rho^x}\Bigg) J_k(x,z)b(z)\cdot\nabla_z\mathcal{G}_{x_0,R}(z,y)\,dz$$

$$= I_1(x,y) + I_2(x,y).$$

Начнем с оценки $I_1(x,y)$. Пусть

$$A_j = (B^x_{2^{-j}\rho}\setminus\overline{B}^x_{2^{-j-1}\rho})\cap B_R^{x_0}.$$

Из (2.9) вытекает, что

$$\Big(\int_{A_j} \frac{|\nabla_z G_0(z,y)|^2}{|z-x|^{n-2}}\,dz\Big)^{1/2} \leqslant C(n,\alpha)K_2|x-y|^{2-n}. \tag{3.8}$$

Используя предположение индукции, неравенство (3.8) и оценку леммы 1, будем иметь

$$\begin{aligned}
|I_1(x,y)| &\leqslant \int_{B_\rho^x\cap B_R^{x_0}} |J_k(x,z)b(z)\cdot\nabla_z G_0(z,y)|\,dz \\
&\leqslant c_k\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\int_{A_j}\frac{|b(z)|^2}{|z-x|^{n-2}}\,dz\Big)^{1/2}\Big(\int_{A_j}\frac{|\nabla_z G_0(z,y)|^2}{|z-x|^{n-2}}\,dz\Big)^{1/2} \\
&\leqslant C(n,\alpha)K_2c_k|x-y|^{2-n}\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\int_{A_j}\frac{|b(z)|^2}{|z-y|^{n-2}}\,dz\Big)^{1/2} \\
&\leqslant C(n,\alpha)K_2c_k|x-y|^{2-n}\sum_{j=0}^{\infty}\sigma(2^{-j}\rho) \\
&\leqslant C(n,\alpha)K_2c_k|x-y|^{2-n}\theta(3\rho/2).
\end{aligned}$$

Перейдём к оценке $I_2(x,y)$. Пользуясь (3.7) и утвержением леммы 4 найдем

$$\begin{aligned}
|I_2(x,y)| &\leqslant \int_{B_R^{x_0}\setminus B_\rho^x} |J_k(x,z)b(z)\cdot\nabla_z\mathcal{G}_{x_0,R}(z,y)|\,dz \\
&\leqslant c_k2^{n-2}|x-y|^{2-n}\int_{B_R^{x_0}\setminus B_\rho^x}|b(z)\cdot\nabla_z\mathcal{G}_{x_0,R}(z,y)|\,dz \\
&\leqslant c_k2^{n-2}|x-y|^{2-n}\int_{B_R^{x_0}}|b(z)\cdot\nabla_z\mathcal{G}_{x_0,R}(z,y)|\,dz \\
&\leqslant C(n,\alpha)\theta(3R)K_2c_k|x-y|^{2-n}.
\end{aligned}$$

Складывая полученные оценки для I_1 и I_2 и пользуясь тем, что $\theta(r)\leqslant\varkappa$ для всех $r>0$, получаем

$$|J_{k+1}(x,y)| \leqslant C(n,\alpha)K_2\varkappa c_k|x-y|^{2-n} = c_{k+1}|x-y|^{2-n}.$$

Теперь из (3.6) и (3.7) в предположении $C(n,\alpha)K_2\varkappa \leqslant 1/2$ имеем

$$G_{x_0,R}(x,y) \leqslant K_2|x-y|^{2-n}\sum_{k=0}^{\infty}\big(C(n,\alpha)K_2\varkappa\big)^k \leqslant 2K_2|x-y|^{2-n}.$$

С другой стороны, из тех же оценок при условии

$$C(n,\alpha)K_2\varkappa \leqslant K_1/(4K_2)$$

приходим к оценке

$$G_{x_0,R}(x,y) \geqslant \mathcal{G}_{x_0,R}(x,y) - K_2|x-y|^{2-n}\sum_{k=1}^{\infty}\big(C(n,\alpha)K_2\varkappa\big)^k \geqslant \frac{K_1}{2}|x-y|^{2-n}.$$

Таким образом, мы получили верхнюю оценку (3.2) с константой $C_2 = 2K_2$ при условии $\varkappa \leqslant (2C(n,\alpha)K_2)^{-1}$ и нижнюю оценку (3.1) с константой $C_1 = K_1/2$ в предположении $\varkappa \leqslant K_1(4C(n,\alpha)K_2^2)^{-1}$. Теорема 2 доказана. □

§4. Оценки решений

В этом разделе предполагаем, что имеет место утверждение теоремы 2, и воспользуемся оценками (3.1) и (3.2). Сначала приведем вспомогательные неравенства. В следующих утверждениях $\widetilde{C}_1$ и $\widetilde{C}_2$ – постоянные из оценок (3.1) и (3.2) соответственно. Будем пользоваться тем, что по второй переменной функция $G_{x_0,R}(x,y)$ является функцией Грина сопряжённого оператора L^*, то есть для $x \in B_R^{x_0}$ выполняется

$$L_y^* G_{x_0,R}(x,y) = -\delta(y-x) \quad \text{в} \quad B_R^{x_0}, \quad G_{x_0,R}(x,\cdot) = 0 \quad \text{на} \quad \partial B_R^{x_0}.$$

Лемма 6. *Для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $R>0$, $x,y \in B_R^{x_0}$ и $r>0$ справедливы оценки*

$$\int\limits_{Q^y_{r/2,r}\cap B_R^{x_0}} |\nabla_z G_{x_0,R}(z,y)|^2\,dz \leqslant C(n)(\alpha\widetilde{C}_2)^2 r^{2-n}. \tag{4.1}$$

и

$$\int\limits_{Q^x_{r/2,r}\cap B_R^{x_0}} |\nabla_z G_{x_0,R}(x,z)|^2\,dz \leqslant C(n)(\alpha\widetilde{C}_2)^2 r^{2-n}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Докажем оценку (4.1). Пусть $\xi \in C_0^\infty(Q^y_{r/4,3r/2})$, $\xi = 1$ в $Q^y_{r/2,r}$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ и $|\nabla\xi| \leqslant 8r^{-1}$. Функция v определённая как $v(z) = G_{x_0,R}(z,y)$ удовлетворяет уравнению $Lv = 0$ в $B_R^{x_0} \setminus \{y\}$. Пользуясь оценками (2.10), (3.2), условием эллиптичности (1.2), и неравенством (2.4), будем иметь

$$\int\limits_{Q^y_{r/2,r}\cap B_R^{x_0}} |\nabla_z G_{x_0,R}(z,y)|^2\,dz \leqslant \alpha \int\limits_{Q^y_{r/2,3r/2}\cap B_R^{x_0}} a\xi^2\nabla v\cdot\nabla v\,dz$$
$$\leqslant (\alpha\widetilde{C}_2)^2 r^{2-n}\Bigg(C(n) + r^{2-n}\int\limits_{B^y_{3r/2}} |b(z)|^2\,dz\Bigg) \leqslant C(n)(\alpha\widetilde{C}_2)^2 r^{2-n}.$$

Оценка (4.2) доказывается аналогичным образом. если заметить, что функция $v(z)=G_{x_0,R}(x,z)$ удовлетворяет уравнению $L^*v=0$ в $B_R^{x_0}\setminus\{x\}$, а затем воспользоваться оценкой (2.11) вместо (2.10). Лемма 6 доказана. □

Лемма 7. *Для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$, $x, y \in B_R^{x_0}$ и $\rho \leqslant 2R$ имеют место оценки*

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_R^{x_0}\cap B_\rho^y} |b(z)\cdot\nabla_z G_{x_0,R}(z,y)|\,dz &\leqslant C(n)\alpha\widetilde{C}_2\theta(3\rho/2),\\ \int\limits_{B_R^{x_0}\cap B_\rho^x} |b(z)\cdot\nabla_z G_{x_0,R}(x,z)|\,dz &\leqslant C(n)\alpha\widetilde{C}_2\theta(3\rho/2).\end{aligned} \tag{4.3}$$

При этом если $p > n/2$, то

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_R^{x_0}\cap B_\rho^y} |G_{x_0,R}(z,y)|^{p'}\,dz &\leqslant C(n)\frac{p-1}{2p-n}\widetilde{C}_2^{p'}\rho^{n-(n-2)p'},\\ \int\limits_{B_R^{x_0}\cap B_\rho^x} |G_{x_0,R}(x,z)|^{p'}\,dz &\leqslant C(n)\frac{p-1}{2p-n}\widetilde{C}_2^{p'}\rho^{n-(n-2)p'},\end{aligned} \tag{4.4}$$

где $p' = p/(p-1)$, *а если* $q > n$, *то*

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{B_R^{x_0}\cap B_\rho^y} |\nabla_z G_{x_0,R}(z,y)|^{q'}\,dz \leqslant C(n)\frac{q-1}{q-n}(\alpha\widetilde{C}_2)^{q'}\rho^{n-(n-1)q'},\\
&\int\limits_{B_R^{x_0}\cap B_\rho^x} |\nabla_z G_{x_0,R}(x,z)|^{q'}\,dz \leqslant C(n)\frac{q-1}{q-n}(\alpha\widetilde{C}_2)^{q'}\rho^{n-(n-1)q'},
\end{aligned}\tag{4.5}$$

где $q' = q/(q-1)$.

Доказательство. Оценки (4.3) доказываются так же, как и в лемме 4, с применением неравенств (4.1) и (4.2) леммы 6 вместо оценки (2.9).

Неравенства (4.4) вытекают из оценки (3.2). Для доказательства первого неравенства из (4.5), полагая $A_j = Q^y_{2^{-j-1}\rho,2^{-j}\rho}$ и используя оценку (4.1) леммы 6, будем иметь

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{B_R^{x_0}} |\nabla_z G_{x_0,R}(z,y)|^{q'}\,dz\\
&\qquad\leqslant C(n)\sum_{j=0}^{\infty}\Bigg(\int\limits_{A_j}|\nabla_z G_{x_0,R}(z,y)|^2\,dz\Bigg)^{q'/2}(2^{-j}\rho)^{n(2-q')/2}\\
&\qquad\leqslant C(n)(\alpha\widetilde{C}_2)^{q'}\sum_{j=0}^{\infty}(2^{-j}\rho)^{(2-n)q'/2}(2^{-j}\rho)^{n(2-q')/2}\\
&\qquad\qquad\leqslant C(n)(1-2^{(n-1)q'-n})^{-1}(\alpha\widetilde{C}_2)^{q'}\rho^{n-(n-1)q'}.
\end{aligned}$$

Осталось заметить, что в силу вогнутости функции $1-2^{-t}$ справедливо неравенство

$$1-2^{(n-1)q'-n} = 1-2^{(n-q)/(q-1)} \geqslant \frac{q-n}{2(q-1)}.$$

Второе неравенство в (4.5) доказывается аналогично с применением оценки (4.2) леммы 6. Лемма 7 доказана. $\square$

Как следствие, получаем верхние оценки решений задач Дирихле

$$-Lu = f - \operatorname{div} g \text{ в } B_R^{x_0},\ u\in W_0^{1,2}(B_R^{x_0}),\ f\in L^p(B_R^{x_0}),\ g\in L^q(B_R^{x_0}) \tag{4.6}$$

и

$$-L^*u = f - \operatorname{div} g \text{ в } B_R^{x_0},\ u\in W_0^{1,2}(B_R^{x_0}),\ f\in L^p(B_R^{x_0}),\ g\in L^q(B_R^{x_0}), \tag{4.7}$$

в которых $p > n/2$ и $q > n$. Положим

$$\Psi(R) = \left(\frac{p-1}{2p-n}\right)^{1/p'} R^{2-n/p} \Bigg(\int\limits_{B_R^{x_0}} |f|^p\,dx\Bigg)^{1/p} + \left(\frac{q-1}{q-n}\right)^{1/q'} R^{1-n/q} \Bigg(\int\limits_{B_R^{x_0}} |g|^q\,dx\Bigg)^{1/q}, \tag{4.8}$$

где $p' = p/(p-1)$, $q' = q/(q-1)$.

Предложение 8. *Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ и u – решение задачи Дирихле (4.6) или (4.7). Тогда*

$$\max_{B_R^{x_0}} |u| \leqslant C(n)\widetilde{\alpha} C_2 \Psi(R). \tag{4.9}$$

Доказательство. Запишем представление решения через функцию Грина для задачи (4.6)

$$u(x) = \int\limits_{B_R^{x_0}} f(y) G_{x_0,R}(x,y)\,dy + \int\limits_{B_R^{x_0}} g(y)\cdot\nabla_y G_{x_0,R}(x,y)\,dy.$$

Применяя неравенство Гёльдера к интегралам в правой части с учётом оценок (4.4) и (4.5), в которых $\rho = 2R$, приходим к соотношению (4.9). Для задачи (4.7) представление решения через функцию Грина имеет вид

$$u(y) = \int\limits_{B_R^{x_0}} f(x) G_{x_0,R}(x,y)\,dx + \int\limits_{B_R^{x_0}} g(x)\cdot\nabla_x G_{x_0,R}(x,y)\,dx, \tag{4.10}$$

откуда оценка (4.9) получается тем же способом. Предложение 8 доказано. □

Перейдём к оценке модуля непрерывности решения уравнения

$$-L^* u = f - \operatorname{div} g$$

в шаре $B_R^{x_0}$ с такой же правой частью, как в (4.7). Докажем вначале лемму об уменьшении осцилляции.

Лемма 9. *Пусть $u \in W^{1,2}(B_R^{x_0})$ – решение уравнения из (4.7) в шаре $B_R^{x_0}$. Тогда найдется положительная постоянная $c(n)$ такая, что* *для* $\gamma = c(n)\widetilde{C}_1/\widetilde{C}_2$ *выполнена оценка*

$$\operatorname*{ess\,osc}_{B^{x_0}_{R/2}} u \leqslant (1-\gamma)\operatorname*{ess\,osc}_{B^{x_0}_R} u + C(n)\alpha\widetilde{C}_2(\theta(3R)\sup_{B^{x_0}_R}|u| + \Psi(R)). \tag{4.11}$$

Доказательство. Полагая

$$m = \operatorname*{ess\,inf}_{B^{x_0}_R} u, \quad M = \operatorname*{ess\,sup}_{B^{x_0}_R} u,$$

предположим, что

$$|\{u > (m+M)/2\} \cap B^{x_0}_{R/4}| > \frac{1}{2}|B^{x_0}_{R/4}|,$$

где $|E|$ означает n-мерную меру Лебега измеримого множества E.

Для функции $v = u - m$ и множества $F = \{v \geqslant (M-m)/2\} \cap B^{x_0}_{R/4}$ имеем

$$-L^*v = -m \cdot \operatorname{div} b + f - \operatorname{div} g \quad \text{в} \quad B^{x_0}_R, \quad |F| > \frac{1}{2}|B^{x_0}_{R/4}|.$$

Так как в предположении этого раздела $b \in L^\infty(B^{x_0}_R)$, то функция v непрерывна (см. [2]) и множество F замкнуто. Пусть μ – ёмкостная мера, реализующая винеровскую ёмкость компакта F (см. [9], глава 2, §1, также [10], глава 1, §5, лемма 5.1, и доказательство этой леммы в разделе I Дополнения),

$$\int\limits_F \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-2}} \leqslant 1, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu(F) = \operatorname{cap} F.$$

Известно, что $\operatorname{cap} F \geqslant C(n)|F|R^{-2}$ (см. [10], глава 1, §2, теоремы 2.3 и 2.6), а поскольку $|F| > |B^{x_0}_{R/4}|/2$, то $\operatorname{cap} F \geqslant C(n)R^{n-2}$.

Пусть U – решение задачи Дирихле

$$L^*U = -(\widetilde{C}_2)^{-1}\mu \text{ в } B^{x_0}_R, \quad U|_{\partial B^{x_0}_R} = 0,$$

которое можно записать в виде

$$U(y) = \frac{1}{\widetilde{C}_2}\int\limits_{B^{x_0}_R} G_{x_0,R}(x,y)\,d\mu(x) = \frac{1}{\widetilde{C}_2}\int\limits_F G_{x_0,R}(x,y)\,d\mu(x).$$

В [9], глава 1, §4, лемма 1.7 и теорема 1.20, показана суммируемость с квадратом градиента потенциала с конечной энергией, откуда следует, что $\mu \in W^{-1,2}(B^{x_0}_R)$. Поэтому $U \in W^{1,2}_0(B^{x_0}_R)$.

Из оценки (3.1) функции Грина следует, что для $x \in B^{x_0}_{R/2}$ выполнено неравенство

$$U(x) \geqslant C(n)\widetilde{C}_1(\widetilde{C}_2)^{-1}R^{2-n}\mu(F) \geqslant C(n)\widetilde{C}_1(\widetilde{C}_2)^{-1} := \gamma > 0. \qquad (4.12)$$

Из оценки (3.2) и определения ёмкости следует, что $U \leqslant 1$ в $B^{x_0}_R$. Далее будем считать, что $\gamma \in (0, 1/2)$.

Рассмотрим теперь решение задач Дирихле

$$-L^* w_1 = -m \cdot \operatorname{div} b \quad \text{в} \quad B^{x_0}_R, \quad w \in W^{1,2}_0(B^{x_0}_R).$$

и

$$-L^* w_2 = f - \operatorname{div} g \quad \text{в} \quad B^{x_0}_R, \quad w \in W^{1,2}_0(B^{x_0}_R).$$

Из оценки предложения 8 следует, что

$$\sup_{B^{x_0}_R} |w_2| \leqslant C(n)\alpha\widetilde{C}_2\Psi(R).$$

В силу представления решения с помощью функции Грина (4.10) имеем

$$w_1(y) = m \int\limits_{B^{x_0}_R} b(x) \cdot \nabla_x G_{x_0,R}(x, y)\, dx,$$

и применяя здесь оценку (4.3), в которой $\rho = 2R$, находим

$$\sup_{B^{x_0}_R} |w_1| \leqslant |m| C(n)\alpha\widetilde{C}_2\theta(3R).$$

Положим $w = w_1 + w_2$. Тогда $L^*(v - w) = 0$ в $B^{x_0}_R$ и функция w обращается в ноль на границе шара $B^{x_0}_R$. Полагая

$$\omega = C(n)\alpha\widetilde{C}_2(\theta(3R) \sup_{B^{x_0}_R} |u| + \Psi(R)),$$

получим

$$\sup_{B^{x_0}_R} |w| \leqslant \omega. \qquad (4.13)$$

В силу принципа сравнения в области $B^{x_0}_R \setminus F$, применённого к функциям $v - w$ и $((M - m)/2 - \omega)U$, из (4.13) и оценки (4.12), будем иметь

$$u(x) - m \geqslant \gamma \frac{M - m}{2} - 2\omega, \quad x \in B^{x_0}_{R/2} \setminus F.$$

Данная оценка выполнена во всём шаре $B^{x_0}_{R/2}$, так как на множестве F выполнено неравенство $u - m \geqslant (M - m)/2$. Аналогично, если

$$|\{u > (m + M)/2\} \cap B^{x_0}_{R/4}| \leqslant \frac{1}{2}|B^{x_0}_{R/4}|,$$

то придем к оценке снизу:

$$M - u(x) \geqslant \gamma \frac{M-m}{2} - 2\omega, \quad x \in B^{x_0}_{R/2}.$$

В итоге, в обоих случаях получаем (4.11). Лемма 9 доказана. □

Не ограничивая общности, будем считать, что $\gamma = c(n)\widetilde{C}_1/\widetilde{C}_2$ из формулировки леммы 9 лежит в интервале $(0, 1/2)$. В следующих утверждениях этого раздела величина γ такая же, как и в лемме 9.

Сформулируем аналогичное лемме 9 утверждение для решения уравнения из (4.6). Оно доказывается таким же способом, только проще, так как уравнение не меняется при сдвиге решения на постоянную.

Лемма 10. *Пусть $u \in W^{1,2}(B^{x_0}_R)$ – решение уравнения из* (4.6) *в шаре $B^{x_0}_R$. Тогда*

$$\operatorname*{ess\,osc}_{B^{x_0}_{R/2}} u \leqslant (1-\gamma) \operatorname*{ess\,osc}_{B^{x_0}_R} u + C(n)\alpha\widetilde{C}_2 k(R).$$

Обозначим

$$\beta = \log_2 \frac{1}{1-\gamma}$$

и для чисел p и q из (4.6), (4.7) положим

$$\nu = \min(\beta, 1 - n/q, 2 - n/p).$$

Из леммы 9 следует оценка модуля непрерывности решений уравнения из (4.7).

Лемма 11. *Пусть $u \in W^{1,2}(B^{x_0}_R)$ – решение уравнения из* (4.7) *в шаре $B^{x_0}_R$ и $M = \sup\limits_{B^{x_0}_R} |u|$. Тогда*

$$\begin{aligned} \operatorname*{ess\,osc}_{B^{x_0}_t} u \leqslant 4M(t/R)^\beta + C(n)\alpha\widetilde{C}_2 k(R)(t/R)^\nu \ln(R/t) \\ + C(n)\alpha\widetilde{C}_2 M \int\limits_1^{R/t} \tau^{-\beta}\theta(6t\tau)\,\frac{d\tau}{\tau}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Доказательство. Пусть $t \leqslant R/2$. Выбирая $l \in \mathbb{N}$ так, что $R/2 < 2^l t \leqslant R$, в силу утверждения леммы 9 получим

$$\begin{gathered}\operatorname*{ess\,osc}_{B_t^{x_0}} u \leqslant (1-\gamma)^k \operatorname*{ess\,osc}_{B_{2^l t}^{x_0}} u \\ + C(n)\alpha\widetilde{C}_2\biggl(M\sum_{j=1}^{l}(1-\gamma)^{j-1}\theta(3\cdot 2^j t) + \sum_{j=1}^{l}(1-\gamma)^{j-1}\Psi(2^j t)\biggr)\end{gathered} \tag{4.15}$$

Для $s \leqslant R$ имеем

$$\begin{aligned}\Psi(s) &\leqslant s^{2-n/p}\biggl(\int\limits_{B_R^{s_0}} |f|^p\,dx\biggr)^{1/p} + s^{1-n/q}\biggl(\int\limits_{B_R^{s_0}} |g|^q\,dx\biggr)^{1/q} \\ &\leqslant \Psi(R)((s/R)^{2-n/p} + (s/R)^{1-n/q}).\end{aligned} \tag{4.16}$$

Если положить $r = 2^l t$, то

$$(1-\gamma)^l = 2^{-l\beta} = (t/r)^\beta,$$

и, поскольку $\max(\beta, 2-n/p, 1-n/q) \leqslant 2$, то из (4.15) и (4.16) получаем

$$\begin{aligned}\operatorname*{ess\,osc}_{B_t^{x_0}} u \leqslant 2(t/R)^\beta \operatorname*{ess\,osc}_{B_r^{x_0}} u + C(n)\alpha\widetilde{C}_2\biggl(M\int\limits_t^R (t/s)^\beta\theta(6s)\,\frac{ds}{s} \\ + \Psi(R)\int\limits_t^R (t/s)^\beta((s/R)^{2-n/p} + (s/R)^{1-n/q})\,\frac{ds}{s}\biggr)\end{aligned} \tag{4.17}$$

Для $\tau > 0$ имеем

$$\begin{aligned}t^\beta R^{-\tau}\int\limits_t^R s^{\tau-\beta-1}\,ds &\leqslant t^\beta R^{-\tau}\max(t^{\tau-\beta}, R^{\tau-\beta})\ln(R/t) \\ &\leqslant \max((t/R)^\beta, (t/R)^\tau)\ln(R/t).\end{aligned} \tag{4.18}$$

Применяя неравенство (4.18) со значениями $\tau = 2 - n/p$ и $\tau = 1 - n/q$ для оценки последнего интеграла в (4.17), приходим к (4.14). Лемма 11 доказана. $\square$

Заметим, что

$$\int\limits_1^\infty \tau^{-\beta}\theta(6t\tau)\frac{d\tau}{\tau} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

В самом деле, так как $\theta(s) \leqslant \varkappa$ для любого $s \geqslant 0$ и функция θ монотонно возрастает, то разбивая интеграл на две части, имеем

$$\int\limits_1^\infty \tau^{-\beta}\theta(6t\tau)\frac{d\tau}{\tau} = \left(\int\limits_{\tau_0}^\infty + \int\limits_1^{\tau_0}\right)\tau^{-\beta-1}\theta(6t\tau)\,d\tau \leqslant \beta^{-1}\tau_0^{-\beta}\varkappa + \beta^{-1}\theta(6t\tau_0).$$

Поскольку $\theta(6t\tau_0) \to 0$ при $t \to 0$ для любого $\tau_0 \geqslant 0$, то за счёт выбора τ_0 первое слагаемое в правой можно сделать сколь угодно малым, а за счёт последующего выбора t и второе. Поэтому оценка леммы 11 действительно гарантирует непрерывность решения в точке x_0.

Из леммы 10 таким же образом получаем оценку решений уравнения из (4.6).

Лемма 12. *Пусть $u \in W^{1,2}(B_R^{x_0})$ – решение уравнения из* (4.6) *в шаре $B_R^{x_0}$ и $M = \sup\limits_{B_R^{x_0}} |u|$. Тогда*

$$\operatorname*{ess\,osc}_{B_t^{x_0}} u \leqslant 4M(t/R)^\beta + C(n)\alpha\widetilde{C}_2\Psi(R)(t/R)^\nu \ln(R/t).$$

Приведём без доказательства оценки граничной непрерывности решений уравнений из (4.6), (4.7). Доказательства повторяют доказательства лемм 9–12. В следующих двух утверждениях точка $z \in \mathbb{R}^n$ и $\rho > 0$ произвольны, $x_0 \in \partial B_\rho^z$ и $0 < R \leqslant \rho$. В определении $k(R)$ из (4.8) полагается $f = 0$ и $g = 0$ вне шара B_ρ^z.

Лемма 13. *Пусть $u \in W^{1,2}(B_R^{x_0})$ – решение уравнения из* (4.7) *в $B_R^{x_0} \cap B_\rho^z$, $u = 0$ на $\partial B_\rho^z \cap B_R^{x_0}$ и $M = \sup\limits_{B_R^{x_0} \cap B_\rho^z} |u|$. Тогда при $t < R$ справедлива оценка*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_\rho^z \cap B_t^{x_0}} |u| \leqslant 4M(t/R)^\beta + C(n)\alpha\widetilde{C}_2\Psi(R)(t/R)^\nu \ln(R/t) + C(n)\alpha\widetilde{C}_2 M \int\limits_1^{R/t} \tau^{-\beta}\theta(6t\tau)\,\frac{d\tau}{\tau}.$$

Лемма 14. *Пусть* $u \in W^{1,2}(B_R^{x_0})$ *– решение уравнения из* (4.6) *в* $B_R^{x_0} \cap B_\rho^z$*,* $u = 0$ *на* $\partial B_\rho^z \cap B_R^{x_0}$ *и* $M = \sup\limits_{B_R^{x_0} \cap B_\rho^z} |u|$*. Тогда при* $t < R$ *выполнена оценка*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_\rho^z \cap B_t^{x_0}} |u| \leqslant 4M(t/R)^\beta + C(n)\alpha \widetilde{C}_2 \Psi(R)(t/R)^\nu \ln(R/t).$$

§5. Оценки функции Грина для неограниченных младших коэффициентов

В этом разделе будут показаны оценки (3.1) и (3.2) без предположения об ограниченности младших коэффициентов уравнения. Напомним, что величина $\varkappa$ определена в (1.6), а оператор

$$L_k u = \operatorname{div}(a\nabla u) + b_k \cdot \nabla u$$

имеет коэффициенты $(b_k)_i = \max(-k, \min(b_i, k))$. Ниже $G^{(k)}_{x_0,R}(x,y)$ означает функцию Грина задачи Дирихле для оператора L_k в шаре $B_R^{x_0}$.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (1.2)*. Тогда найдётся такое* $\varkappa_0 = \varkappa_0(n,\alpha) > 0$*, что если* $\varkappa < \varkappa_0$*, то в любом шаре* $B_R^{x_0}$ *существует функция Грина* $G_{x_0,R}$ *задачи Дирихле для оператора* L*, удовлетворяющая оценкам* (3.1) *и* (3.2)*. Если* $B_R^{x_0} \subset B_{R_1}^{x_1}$*, то* $G_{x_0,R}(x,y) \leqslant G_{x_1,R_1}(x,y)$ *для всех* $x, y \in B_R^{x_0}$*.*

Доказательство. Так как функция $G^{(k)}_{x_0,R}(x,y)$ является решением уравнений

$$L_k G^{(k)}_{x_0,R}(\cdot,y) = 0 \quad \text{в} \quad B_R^{x_0} \setminus \{y\}, \qquad L_k^* G^{(k)}_{x_0,R}(x,\cdot) = 0 \quad \text{в} \quad B_R^{x_0} \setminus \{x\},$$

то в силу оценок (3.2) и утверждений лемм 11, 12, 13 и 14 функции $G^{(k)}_{x_0,R}(x,y)$ равномерно ограничены и равностепенно по k непрерывны в области вида $r < |x-y| < 2r$ для любого $r > 0$. По теореме Арцела-Асколи из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность вне диагонали $x = y$ и если $r < |x-y| < 2r$, то сходимость будет равномерной. Обозначим предельную функцию через $G_{x_0,R}(x,y)$, эта функция будет непрерывной по совокупности аргументов вне диагонали $x = y$.

В силу утверждений предложения 8 и лемм 12 и 14 решения задач Дирихле

$$-L_k u_k = f - \operatorname{div} g \text{ в } B_R^{x_0},\ u_k \in W_0^{1,2}(B_R^{x_0}),\ f \in L^p(B_R^{x_0}),\ g \in L^q(B_R^{x_0}),$$

где $p > n/2$ и $q > n$, будут равномерно ограниченными и равностепенно непрерывными в $\overline{B}_R^{x_0}$. Рассмотрим также задачу Дирихле

$$-Lu = f - \operatorname{div} g \text{ в } (B_R^{x_0}),\ \ u \in W_0^{1,2}(B_R^{x_0}). \tag{5.1}$$

Пользуясь функцией Грина $G_{x_0,R}^{(k)}$ оператора L_k, имеем

$$u(x) - u_k(x) = \int\limits_{B_R^{x_0}} G_{x_0,R}^{(k)}(x,y)(b_k - b)(y) \cdot \nabla u(y)\, dy.$$

Так как $0 \leqslant G_{x_0,R}^{(k)}(x,y) \leqslant \widetilde{C}_2|x-y|^{2-n}$, то в силу теоремы Фубини получим

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_R^{x_0}} |u - u_k|\, dx &\leqslant \int\limits_{B_R^{x_0}} \int\limits_{B_R^{x_0}} G_{x_0,R}^{(k)}(x,y)|(b - b_k) \cdot \nabla u|\, dx\, dy \\ &\leqslant \widetilde{C}_2 \int\limits_{B_R^{x_0}} |(b-b_k) \cdot \nabla u|\, dy \int\limits_{B_R^{x_0}} |x-y|^{2-n}\, dx \\ &\leqslant \widetilde{C}_2 C(n) R^2 \int\limits_{B_R^{x_0}} |(b - b_k)\cdot \nabla u|\, dy,\end{aligned}$$

а поскольку $b_k \to b$ в $L^2(B_R^{x_0})$, последний интеграл сходится к нулю. Таким образом, $u_k \to u$ в $L^1(B_R^{x_0})$. В силу теоремы Арцела-Асколи эту сходимость можно считать равномерной. Предельная функция u также удовлетворяет оценке (4.9).

Из равномерной вне диагонали сходимости $G_{x_0,R}^{(k)}$ к $G_{x_0,R}$ и оценок (3.2) следует сходимость $G_{x_0,R}^{(k)}(\cdot,y)$ к $G_{x_0,R}(\cdot,y)$ и сходимость $G_{x_0,R}^{(k)}(x,\cdot)$ к $G_{x_0,R}(x,\cdot)$ в $L^{p'}(B_R^{x_0})$, более того, эта сходимость равномерна по $y \in B_R^{x_0}$ и $x \in B_R^{x_0}$, соответственно.

Покажем, что при $k \to \infty$ функции $G_{x_0,R}^{(k)}(\cdot,y)$ сходятся к $G_{x_0,R}(\cdot,y)$ в $W_0^{1,q'}(B_R^{x_0})$ для любого $y \in B_R^{x_0}$. Заметим вначале, что

$$L_k(G^{(k)}(\cdot,y) - G^{(m)}(\cdot,y)) = (b_m - b_k)\cdot \nabla G^{(m)}(\cdot,y). \tag{5.2}$$

В силу соображений двойственности и установленных выше оценок решений имеет место оценка (см. [1], [2])

$$\left(\int\limits_{B_R^{x_0}} |\nabla_x(G^{(k)}(x,y) - G^{(m)}(x,y))|^{q'}\,dx\right)^{1/q'} \leqslant C(n,\alpha,R,q)\int\limits_{B_R^{x_0}} |(b_m-b_k)(x)\cdot\nabla_x G^{(m)}(x,y)|\,dx.$$

Последний интеграл стремится к нулю при $k,m\to\infty$ равномерно по y. Действительно, интеграл в малой окрестности точки y может быть сделан сколь угодно малым за счёт оценки (4.3), с постоянной, не зависящей от k,m и y, а вне этой окрестности функция $|\nabla G^{(m)}(\cdot,y)|$ суммируема с квадратом с L^2-нормой, не зависящей от m и y (см. лемму 6) и $b_k-b_m\to 0$ в $L^2(B_R^{x_0})$.

Установим теперь сходимость $G_{x_0,R}^{(k)}(x,\cdot)$ к $G_{x_0,R}(x,\cdot)$ в $W_0^{1,q'}(B_R^{x_0})$ при любом $x\in B_R^{x_0}$. Для функции $w=G^{(k)}(x,\cdot)-G^{(m)}(x,\cdot)$ имеем

$$L_k^* w = \operatorname{div}((b_k-b_m)G^{(m)}(x,\cdot)).$$

Выбирая в интегральном тождестве (2.6) пробную функцию $w\eta^2$, где $\eta\in C^\infty(\overline{B}_R^{x_0})$, $\eta=0$ в B_ρ^y, $\eta=1$ вне $B_{2\rho}^y$ и $\rho<R/2$, получим

$$\int\limits_{B_R^{x_0}} \eta^2 a\nabla w\cdot\nabla w\,dy = -2\int\limits_{B_R^{x_0}} \eta w a\nabla w\cdot\nabla\eta\,dy + \int\limits_{B_R^{x_0}} b_k w\cdot(\eta^2\nabla w + 2\eta w\nabla\eta)\,dy + \int\limits_{B_R^{x_0}} (b_k-b_m)(y)G^{(m)}(x,y)\cdot(\eta^2\nabla w+2\eta w\nabla\eta)\,dy.$$

Применяя неравенство Коши, придём к оценке

$$\int\limits_{B_R^{x_0}} \eta^2 a\nabla w\cdot\nabla w\,dy \leqslant 24\int\limits_{B_R^{x_0}} w^2 a\nabla\eta\cdot\nabla\eta\,dy + 8\int\limits_{B_R^{x_0}} a^{-1}b_k\cdot b_k w^2\eta^2\,dy$$
$$+\,8\int\limits_{B_R^{x_0}} a^{-1}(b_k-b_m)\cdot(b_k-b_m)(G^{(m)}(x,y))^2\eta^2\,dy.$$

В силу сходимости $b_k\to b$ в $L^2(B_R^{x_0})$, равномерной по m ограниченности $G^{(m)}(x,\cdot)$ на носителе η, равномерной сходимости w к нулю на носителе $\nabla\eta$ и условия эллиптичности (1.2), получаем стремление $\nabla w=\nabla(G^{(k)}(x,\cdot)-G^{(m)}(x,\cdot))$ к нулю в $L^2(B_R^{x_0}\setminus B_{2\rho}^x)$ при $k,m\to\infty$, при этом сходимость равномерна по x. Осталось заметить, что норма $\nabla G^{(k)}(x,\cdot)$ в $L^{q'}(B_{2\rho}^x)$ может быть сделана сколь угодно малой за счёт малости ρ равномерно по k и x (см. оценку (4.5)), откуда и следует искомая сходимость. Аналогичным образом устанавливается сходимость $\nabla G^{(k)}_{x_0,R}(\cdot,y)$ к $\nabla G_{x_0,R}(\cdot,y)$ в $L^2(B_R^{x_0}\setminus B_{2\rho}^y)$ при $k\to\infty$

Для предельной функции $G_{x_0,R}$ также имеют место оценки (3.1), (3.2), оценки лемм 6, 7, и оценки непрерывности обеспечиваемые леммами 11, 12, 13, 14.

Далее воспользуемся равенством

$$u_k(x)=\int\limits_{B_R^{x_0}} f(y)G^{(k)}_{x_0,R}(x,y)\,dy+\int\limits_{B_R^{x_0}} g(y)\cdot\nabla_y G^{(k)}_{x_0,R}(x,y)\,dy.$$

Переходя здесь к пределу при $k\to\infty$ получим

$$u(x)=\int\limits_{B_R^{x_0}} f(y)G_{x_0,R}(x,y)\,dy+\int\limits_{B_R^{x_0}} g(y)\cdot\nabla_y G_{x_0,R}(x,y)\,dy. \qquad (5.3)$$

Аналогично, решения задач Дирихле

$$-L_k^* v_k=f-\operatorname{div} g \text{ в } B_R^{x_0},\ v_k\in W_0^{1,2}(B_R^{x_0})$$

равномерно сходятся к решению задачи

$$-L^* v=f-\operatorname{div} g \text{ в } B_R^{x_0},\ v\in W_0^{1,2}(B_R^{x_0}) \qquad (5.4)$$

и имеет место представление

$$v(y)=\int\limits_{B_R^{x_0}} f(x)G_{x_0,R}(x,y)\,dx+\int\limits_{B_R^{x_0}} g(x)\cdot\nabla_x G_{x_0,R}(x,y)\,dx.$$

Решения задач (5.1), (5.4) удовлетворяют оценкам предложения 8 и лемм 11, 12, 13, 14.

Далее, для всех $y \in B_R^{x_0}$ и $\varphi \in C_0^\infty(B_R^{x_0})$ справедливо равенство

$$\int\limits_{B_R^{x_0}} a(x)\nabla_x G^{(k)}_{x_0,R}(x,y)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx - \int\limits_{B_R^{x_0}} b_k(x)\varphi(x)\cdot\nabla_x G^{(k)}_{x_0,R}(x,y)\,dx = \varphi(y). \tag{5.5}$$

Покажем, что при $k \to \infty$ имеет место сходимость

$$\int\limits_{B_R^{x_0}} b_k(x)\varphi(x)\cdot\nabla_x G^{(k)}_{x_0,R}(x,y)\,dx \to \int\limits_{B_R^{x_0}} b(x)\varphi(x)\cdot\nabla_x G_{x_0,R}(x,y)\,dx. \tag{5.6}$$

Разобъём этот интеграл на две части – интеграл по малой окрестности точки y и по её дополнению. Интеграл по малой окрестности точки y может быть сделан сколь угодно малым равномерно по k за счёт оценки (4.3), а интеграл по дополнению к этой окрестности сходится за счёт сходимости $b_k \to b$ в $L^2(B_R^{x_0})$ и сходимости $\nabla_x G^{(k)}_{x_0,R}(x,y) \to \nabla_x G_{x_0,R}(x,y)$ в $L^2(B_R^{x_0} \setminus B_\rho^y)$ по переменной x для любого $\rho > 0$. Используя (5.6) и сходимость $\nabla_x G^{(k)}_{x_0,R}(x,y)$ к $\nabla_x G_{x_0,R}(x,y)$ в $L^{q'}(B_R^{x_0})$ по переменной x, перейдём к пределу в (5.5), что даёт

$$\int\limits_{B_R^{x_0}} a(x)\nabla_x G_{x_0,R}(x,y)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx - \int\limits_{B_R^{x_0}} b(x)\varphi(x)\cdot\nabla_x G_{x_0,R}(x,y)\,dx = \varphi(y). \tag{5.7}$$

Таким образом, $L_x G_{x_0,R}(x,y) = -\delta(x-y)$ в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(B_R^{x_0})$, и $G_{x_0,R}(\cdot,y)$ действительно является функцией Грина задачи Дирихле для оператора L в шаре $B_R^{x_0}$ с полюсом в точке y. Точно так же устанавливается, что $L_y^* G_{x_0,R}(x,y) = -\delta(y-x)$, и $G_{x_0,R}(x,\cdot)$ является функцией Грина задачи Дирихле для оператора L^* в шаре $B_R^{x_0}$ с полюсом в точке x.

Чтобы доказать монотонность получившейся функции Грина относительно области, отметим, что для функций Грина $G^{(k)}_{x_0,R}$ операторов с ограниченными коэффициентами это вытекает из принципа максимума. При предельном переходе неравенство $G^{(k)}_{x_0,R}(x,y) \leqslant G^{(k)}_{x_1,R_1}(x,y)$ переходит в аналогичное неравенство для функции Грина оператора L. Теорема 3 доказана. $\square$

§6. Доказательство теоремы 1

Докажем основной результат работы – теорему 1.

Доказательство теоремы 1. По теореме 3 для любого $k \in \mathbb{N}$ в шаре B_k^0 существует функция Грина $G_{0,k}$ задачи Дирихле для оператора L, удовлетворяющая оценками (3.1), (3.2). Из принципа сравнения следует, что последовательность функций Грина $G_{0,k}(x,y)$ при $k \to \infty$ является монотонно возрастающей. В силу оценки (3.2) и лемм 11, 12 в любой области вида $0 < r_1 < |x-y| < r_2$ эти функции являются равномерно ограниченными и равностепенно непрерывными. Извлекая сходящуюся подпоследовательность, получим предельную функцию $\Gamma(x,y)$, которая удовлетворяет оценкам (1.3) и является непрерывной вне диагонали. Из теоремы Дини о монотонной последовательности следует, что в любой области вида $0 < r_1 < |x-y| < r_2 < \infty$ уже вся последовательность функций $G_{0,k}$ равномерно сходится к Γ при $k \to \infty$.

Установим сходимость $\nabla_x G_{0,k}(x,y)$ к $\nabla_x \Gamma(x,y)$ в $L^{q'}(B_r^0)$ по переменной x для любых $y \in \mathbb{R}^n$, $q > n$ и $r > 1$. Для любых целых чисел $k, m > 2r$ функция $v(x) = G_{0,k}(x,y) - G_{0,m}(x,y)$ удовлетворяет уравнению $Lv = 0$ в B_{2r}^0. Пусть $\xi \in C_0^\infty(B_{2r}^0)$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $\xi = 1$ в $B_r^0 \setminus B_{2\rho}^y$, $\xi = 0$ в B_ρ^y. Тогда из оценки (2.10) в силу условия эллиптичности (1.2) и равномерной сходимости v к нулю на носителе функции ξ следует сходимость ∇v к нулю в $L^2(B_{2r}^0 \setminus B_{2\rho}^y)$ при $k, m \to \infty$. Так как в силу оценки (4.5) норма ∇v в $L^{q'}(B_{2\rho}^y)$ может быть сделана сколь угодно малой, получаем искомую сходимость.

Аналогично устанавливается и сходимость $\nabla_y G_{0,k}(x,y)$ к $\nabla_y \Gamma(x,y)$ в $L^{q'}(B_r^0)$ по переменной y для любых $x \in \mathbb{R}^n$, $q > n$ и $r > 1$. Здесь положим $v(y) = G_{0,k}(x,y) - G_{0,m}(x,y)$. Тогда $L^* v = 0$ в B_{2r}^0 и остаётся воспользоваться неравенством (2.11).

Для $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ переходя к пределу при $k \to \infty$ в равенстве (5.7), где $x_0 = 0$ и $R = k$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(a(x)\nabla_x \Gamma(x,y) \cdot \nabla\varphi(x) - b(x)\varphi(x) \cdot \nabla_x \Gamma(x,y)\big)\, dx = \varphi(y).$$

Таким образом, $-L_x \Gamma(x,y) = \delta(x-y)$ в смысле пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ для любого $y \in \mathbb{R}^n$. Точно так же устанавливается, что $-L_y^* \Gamma(x,y) = \delta(y-x)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$. Кроме того

$\Gamma(\cdot, y) \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{y\})$ для любого $y \in \mathbb{R}^n$ и $\Gamma(x, \cdot) \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\})$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$.

Нетрудно показать, что для $p > n/2$ и $q > n$ решения задач

$$-Lu_k = f - \operatorname{div} g \quad \text{в} \quad B^0_k, \quad u \in W^{1,2}_0(B^0_k), \tag{6.1}$$

где функции с компактным носителем $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, равномерно ограничены, равностепенно непрерывны, и сходятся при $k \to \infty$ к предельной функции $u \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, которая является решением уравнения $Lu = f - \operatorname{div} g$ в $\mathbb{R}^n$, стремящимся к нулю на бесконечности. В силу принципа максимума для оператора L, такое решение единственно. Данная сходимость будет в каждом шаре B^0_r, $r > 0$, равномерной и сходимостью в $W^{1,2}(B^0_r)$. Переходя к пределу в соответствующих формулах (5.3) представления решения задач (6.1), для предельной функции получим

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\Gamma(x, y)\, dy + \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y) \cdot \nabla_y \Gamma(x, y)\, dy.$$

Теорема 1 доказана. □

Авторы выражают благодарность профессору А. И. Назарову за полезное обсуждение результатов настоящей работы.

Список литературы

1. W. Littman, G. Stampacchia, H. F. Weinberger, *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients.* — Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **17** (1963), 45–79.
2. G. Stampacchia, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus.* — Annales de l'Institut Fourier **15**, No. 1 (1965), 189–257.
3. Y. Pinchover, *On the equivalence of Green functions of second order elliptic equation in $\mathbb{R}^n$.* — Diff. Integral Equations **5**, No. 3 (1992), 481–493.
4. Qi Zhang, *A Harnack inequality for the equation $\nabla(a\nabla u) + b\nabla u = 0$, when $|b| \in K_{n+1}$.* — Manuscripta Math. **89** (1995) 61–77.
5. Qi S. Zhang, *Gaussian bounds for the fundamental solutions of $\nabla(A\nabla u) + B\nabla u - u_t = 0$.* — Manuscripta Math. **93** (1997), 381–390.
6. V. Kondratiev, V. Liskevich, Z. Sobol, O. Us, *Estimates of heat kernels for a class of second-order elliptic operators with applications to semi-linear inequalitites in exterior domains.* — J. London Math. Soc. **69**, No. 2 (2004), 107–127.
7. V. Kozlov, A. I. Nazarov, *A comparison theorem for nonsmooth linear operators.* `arXiv preprint 1901.08631v1`, 24 Jan 2019.
8. K. Kurata, *Continuity and Harnack's inequality for solutions of elliptic partial differential equations of second order.* — Indiana University Math. J. **43**, No. 2 (1994), 411–440.

9. Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала.* М., Наука, 1966.
10. Е. М. Ландис, *Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов.* М., Наука, 1971.

Alkhutov Yu. A., Surnachev M. D. Estimates of the fundamental solution for an elliptic equation in divergence form with drift.

For a second-order linear divergence-form elliptic equation with uniformly elliptic measurable principal coefficients and with drift we establish a condition on lower order coefficients that guarantees classical two-sided bounds of the fundamental solution.

Владимирский государственный
университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
Горького ул., 87
600000 Владимир, Россия
E-mail: yurij-alkhutov@yandex.ru

Поступило 9 января 2020 г.

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН
Миусская пл., 4
125047 Москва, Россия;
НИТУ «МИСиС»
Ленинский проспект, д. 4
119049 Москва, Россия
E-mail: peitsche@yandex.ru