Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 488, 2019 г.

А. В. Пастор

О ВЕРШИНАХ СТЕПЕНИ 6 МИНИМАЛЬНОГО И МИНИМАЛЬНОГО ПО СТЯГИВАНИЮ 6-СВЯЗНОГО ГРАФА

§1. Введение

1.1. Основные обозначения. Под графом в данной работе понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Множество вершин графа G традиционно обозначается $V(G)$, а множество ребер – $E(G)$. Для ребра $e \in E(G)$ через $V(e)$ мы будем обозначать множество вершин, инцидентных e. Для $v \in V(G)$ через $E_G(v)$ обозначим множество ребер графа G, инцидентных v (т.е. $E_G(v) = \{e \in E(G) \mid v \in V(e)\}$). Количество вершин и ребер графа G мы будем обозначать через $v(G)$ и $e(G)$, соответственно. Степень вершины v обозначается через $d_G(v)$, а наименьшая из степеней вершин графа G – через $\delta(G)$. Там, где это не будет приводить к неоднозначному толкованию, мы вместо $d_G(v)$ будем писать просто $d(v)$. *Компонентами* графа мы будем называть его компоненты связности.

Пусть $A \subset V(G)$. Через $G(A)$ обозначается индуцированный подграф графа G на множестве A. Для $X \subset V(G) \cup E(G)$ через $G - X$ мы будем обозначать граф, полученный из G удалением всех вершин и ребер множества X, а также всех ребер, инцидентных вершинам из X (в частности, при $A \subset V(G)$ мы получаем $G - A = G(V(G) \setminus A)$, а при $B \subset E(G)$ получаем, что $G - B$ – граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G) \setminus B$). Для $x \in V(G) \cup E(G)$ положим $G - x = G - \{x\}$.

Окрестностью вершины $v \in V(G)$ мы будем называть множество $N_G(v)$ всех вершин, смежных с v. Аналогично, *окрестностью* множества $A \subset V(G)$ мы будем называть множество $N_G(A)$, состоящее из всех вершин графа G, которые смежны хотя бы с одной из вершин

Ключевые слова: k-связность, минимальный k-связный граф, минимальный по стягиванию k-связный граф.

Исследования выполнены при поддержке гранта правительства РФ (грант 14.Z50.31.0030).

множества A и не лежат в A. *Окрестностью* подграфа H мы будем называть окрестность его множества вершин (т. е. $N_G(H) = N_G(V(H))$). Через $\overline{H}$ мы будем обозначать подграф $G - (V(H) \cup N_G(H))$. Другими словами, $\overline{H}$ – это индуцированный подграф графа G на множестве вершин, не входящих в H и не смежных с вершинами из H.

Определение 1. *Вершинной связностью* графа G называется мощность наименьшего подмножества $T \subset V(G)$, такого, что граф $G - T$ является несвязным или тривиальным (то есть состоящим из одной вершины). Вершинная связность графа G обозначается $\kappa(G)$. Граф G называется *k-связным*, если $\kappa(G) \geqslant k$.

Очевидно, что $\delta(G) \geqslant \kappa(G)$. Пусть далее $\kappa(G) = k$. Множество вершин графа G, имеющих степень k, мы обозначим через $V_k(G)$. Также мы будем использовать обозначения $v_k(G) = |V_k(G)|$ и $G_k = G(V_k(G))$.

1.2. Разделяющие множества, фрагменты и части разбиения. Всюду в данном разделе мы будем считать, что $k = \kappa(G)$. Мы будем рассматривать такие множества $S \subset V(G) \cup E(G)$, что граф $G - S$ несвязен. Легко видеть, что в таком случае $|S| \geqslant k$.

Определение 2. 1) Множество S *разделяет* множество $X \subset V(G)$, если не все вершины из $X \setminus S$ лежат в одной компоненте графа $G - S$.

2) Пусть $X, Y \subset V(G)$. Множество S *отделяет* X от Y, если $X \not\subset S$, $Y \not\subset S$ и никакие две вершины $x \in X \setminus S$ и $y \in Y \setminus S$ не лежат в одной компоненте графа $G - S$.

Аналогичная терминология будет применяться также для подграфов и для отдельных вершин. Например, мы будем говорить, что множество S *отделяет* вершину x от подграфа F, если оно отделяет $\{x\}$ от $V(F)$.

Определение 3. Множество $R \subset V(G)$ называется *разделяющим*, если граф $G - R$ несвязен. Разделяющее множество, содержащее ровно m вершин, называется также *m-разделяющим*. Множество всех m-разделяющих множеств графа G мы будем обозначать $\mathfrak{R}_m(G)$.

Определение 4. Множество $M \subset V(G) \cup E(G)$ мы будем называть *разрезом* графа G, если $|M| = k$, $M \cap E(G) \neq \varnothing$ и граф $G - M$ – несвязен. Через $\mathfrak{M}_i(G)$ мы обозначим множество всех разрезов графа G, содержащих ровно i ребер. Также введем обозначение $\mathfrak{M}(G) = \cup_{i=1}^{k} \mathfrak{M}_i(G)$ и $\mathfrak{M}^{+}(G) = \mathfrak{M}(G) \cup \mathfrak{R}_k(G)$.

Замечание 1. Легко видеть (см. например [3, замечание 1]), что для любого разреза M графа G граф $G - M$ имеет ровно две компоненты, причем концы любого ребра $e \in M$ принадлежат разным компонентам. Кроме того, никакая вершина $v \in M$ не может быть инцидентна никакому ребру $e \in M$.

Определение 5. Пусть $M \in \mathfrak{M}^+(G)$. Тогда множество всех входящих в M вершин мы будем обозначать через $V_0(M)$, а множество всех вершин, входящих в M либо инцидентных ребрам из M – через $V(M)$.

Замечание 2. В частности, для $R \in \mathfrak{R}_k(G)$ имеем $V(R) = V_0(R) = R$.

Определение 6. Индуцированный подграф F графа G называется *фрагментом*, если $|N_G(F)| = k$ и $v(\overline{F}) > 0$.

Для фрагмента F графа G введем обозначение $\widetilde{F} = V(F) \cup N_G(F)$.

Замечание 3. Пусть F – фрагмент графа G. Тогда очевидно, что множество $N_G(F)$ является k-разделяющим и отделяет F от $\overline{F}$. Подграф $\overline{F}$ при этом также является фрагментом и $N_G(\overline{F}) = N_G(F)$.

Определение 7. Будем говорить, что множество $R \in \mathfrak{R}_k(G)$ *относится* к ребру $e \in E(G)$, если $V(E) \subset R$. Множество R *относится* к множеству $B \subset E(G)$, если R относится хотя бы к одному ребру $e \in B$.

Будем говорить, что фрагмент F *относится* к ребру e или к множеству B, если $N_G(F)$ относится к e или к B соответственно.

1.2.1. *Части разбиения.* Наряду с понятием фрагмента бывает удобно использовать близкое к нему понятие части разбиения графа. Впервые это понятие было введено в работе [1]. В работах [3, 9] были даны некоторые его обобщения.

Определение 8. Пусть $S \in \mathfrak{M}^+(G)$ и $U_1, \dots, U_m$ – компоненты графа $G - S$. Назовем множества $H_i = V(U_i) \cup V_0(S)$ *частями разбиения* графа G множеством S. Введем обозначение $\mathrm{Part}_G(S) = \{H_1, \dots, H_m\}$.

Границей части H_i называется множество $\mathrm{Bound}(H_i) = H_i \cap V(S)$, а *внутренностью* части H_i – множество $\mathrm{Int}(H_i) = H_i \setminus V(S)$.

Замечание 4. Пусть $S \in \mathfrak{R}_k(G)$, $U_1, \dots, U_m$ – компоненты графа $G - S$ и $H_1, \dots, H_m$ – соответствующие им части $\mathrm{Part}_G(S)$. Тогда при всех $i \in \{1, \dots, m\}$ выполнены соотношения $H_i = \widetilde{U_i}$, $\mathrm{Int}(H_i) = V(U_i)$ и $\mathrm{Bound}(H_i) = S$.

Определение 9. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{M}^+(G)$. Назовем *квазичастями* разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ множества вида

$$H = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} H_S, \quad \text{где} \quad H_S \in \mathrm{Part}_G(S).$$

Частями разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ мы назовем все максимальные по включению квазичасти. Множество всех частей разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ будем обозначать через $\mathrm{Part}_G(\mathfrak{S})$. В случае, когда ясно, какой граф разбивается, мы вместо $\mathrm{Part}_G(\mathfrak{S})$ и $\mathrm{Part}_G(S)$ будем писать $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ и $\mathrm{Part}(S)$, соответственно.

Определение 10. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{M}^+(G)$ и $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. *Границей* части H назовем множество

$$\mathrm{Bound}(H) = H \cap \left(\bigcup_{S \in \mathfrak{S}} V(S) \right).$$

Внутренностью части H назовем множество $\mathrm{Int}(H) = H \setminus \mathrm{Bound}(H)$.

Вершины, принадлежащие границе части, мы будем называть *граничными*, а вершины, принадлежащие внутренности, – внутренними.

Определение 11. Назовем часть A *пустой*, если $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$, и *непустой* в противном случае.

Замечание 5. 1) Легко видеть, что пересечение двух различных частей $H_1, H_2 \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ является подмножеством множества $V_0(S)$ для некоторого $S \in \mathfrak{S}$.

2) Также нетрудно проверить, что граница $\mathrm{Bound}(H)$ состоит из всех вершин части H, имеющих смежные вершины вне H и, в случае, если $\mathrm{Int}(H) \neq \varnothing$, отделяет $\mathrm{Int}(H)$ от $V(G) \setminus H$.

1.2.2. *Зависимые и независимые разделяющие множества.* Понятие независимых k-разделяющих множеств впервые было введено в работах [4, 15]: k-разделяющие множества S и T называются *независимыми*, если S не разделяет T и T не разделяет S. В работе [3] было дано определение независимых разрезов, а в работе [9] это определение было применено к произвольным множествам из $\mathfrak{M}^+(G)$.

Определение 12. Множества $S, T \in \mathfrak{M}^+(G)$ называются *независимыми*, если можно так задать нумерацию частей

$$\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \quad \text{и} \quad \mathrm{Part}(T) = \{B_1, B_2, \dots, B_n\},$$

что
$$A_1 \supset \bigcup_{i=2}^{m} B_i \quad \text{и} \quad B_1 \supset \bigcup_{i=2}^{n} A_i.$$
В противном случае множества S и T называются *зависимыми*.

Замечание 6. В случае, если $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$, данное определение полностью согласуется с классическим: легко видеть, что множества S и T будут независимы тогда и только тогда, когда ни одно из них не разделяет другое.

Разбиение графа парой зависимых k-разделяющих множеств описывается следующей леммой.

Лемма 1 ([2, лемма 7])**.** *Пусть множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ зависимы,* $\mathrm{Part}(S) = \{F_1, \ldots, F_n\}$ *и* $\mathrm{Part}(T) = \{H_1, \ldots, H_m\}$. *Для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, \ldots, m\}$ введем обозначения*
$$P = S \cap T, \quad S_j = S \cap \mathrm{Int}(H_j), \quad T_i = T \cap \mathrm{Int}(F_i), \quad G_{i,j} = F_i \cap H_j.$$
Тогда
$$\mathrm{Part}(\{S, T\}) = \{G_{i,j}\}_{i \in \{1,\ldots,n\},\, j \in \{1,\ldots,m\}}, \quad \mathrm{Bound}(G_{i,j}) = P \cup T_i \cup S_j,$$
причем $T_i \neq \varnothing$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $S_j \neq \varnothing$ для всех $j \in \{1, \ldots, m\}$.

1.3. Минимальные и минимальные по стягиванию k-связные графы. При исследовании структуры k-связных графов важную роль играют две элементарные операции: удаление и стягивание ребра (при стягивании ребра e из графа G удаляются оба его конца и вместо них добавляется новая вершина, смежная с теми и только с теми вершинами, которые были смежны хотя бы с одним из концов ребра e). Граф, получаемый из G стягиванием ребра e, мы обозначим $G \cdot e$.

Определение 13. 1) k-связный граф G называется *минимальным*, если для любого ребра $e \in E(G)$ граф $G - e$ не является k-связным.

2) k-связный граф G называется *минимальным по стягиванию*, если для любого ребра $e \in E(G)$ граф $G \cdot e$ не является k-связным.

Замечание 7. Пусть G – k-связный граф и $v(G) > k + 1$. Тогда легко видеть, что

1) G минимален тогда и только тогда, когда любое его ребро входит в какой-либо разрез;

2) G минимален по стягиванию тогда и только тогда, когда для любого ребра $e \in E(G)$ найдется множество $T \in \mathfrak{R}_k(G)$, относящееся к ребру e.

Одним из важнейших результатов в теории минимальных k-связных графов является следующая теорема.

Теорема 1 (W. Mader, [17])**.** *Пусть G – минимальный k-связный граф и C – множество вершин произвольного цикла в G. Тогда*

$$C \cap V_k(G) \neq \varnothing.$$

Фактически это означает, что граф G_{k+1} является лесом (где G_{k+1} – индуцированный подграф графа G на множестве вершин, степени которых больше k).

Интерес к минимальным и минимальным по стягиванию графам возник после того, как W. T. Tutte в работе [20] дал описание структуры трехсвязного графа в терминах удаления и стягивания ребер. R. Halin в работе [14] доказал, что в любом минимальном k-связном графе есть вершина степени k и поставил вопрос об оценке количества таких вершин. Ответ на этот вопрос дал W. Mader в работе [18], где было доказано, что для любого минимального k-связного графа выполнено неравенство

$$v_k(G) \geqslant \frac{k-1}{2k-1} v(G) + \frac{2k}{2k-1}. \tag{1}$$

Более того, эта оценка точная, что подтверждается бесконечной серией примеров.

С минимальными по стягиванию графами ситуация несколько сложнее. При $k \leqslant 3$ минимальным по стягиванию k-связным графом является только полный граф. Минимальные по стягиванию 4-связные графы были полностью классифицированы в работах в работах M. Fontet [13] и Н. Мартинова [19]. В этих работах, в частности, было доказано, что все такие графы являются 4-регулярными. Для минимальных по стягиванию 5-связных графов K. Ando и T Iwase [11] доказали неравенство $v_5(G) \geqslant \frac{1}{2} v(G)$ и построили бесконечную серию примеров, показывающую, что константу $\frac{1}{2}$ нельзя заменить на большую. Для $k = 6$ лучшим на данный момент результатом по-видимому является оценка, доказанная в работе Q. Zhao и др. [21]: $v_6(G) \geqslant \frac{1}{5} v(G)$, а для $k = 7$ – оценка из работы M. Li и др. [16]: $v_7(G) \geqslant \frac{1}{22} v(G)$. При $k \geqslant 8$ на данный момент не доказано существование в минимальном по стягиванию k-связном графе даже одной вершины степени k.

Исследовались также и графы, одновременно обладающие обоими свойствами: минимальности и минимальности по стягиванию. Для таких графов долгое время лучшей нижней оценкой количества вершин степени k при $k > 4$ являлось неравенство (1), верное для всех минимальных k-связных графов. Однако недавно появились работы, в которых для минимальных и минимальных по стягиванию k-связных графов при $5 \leqslant k \leqslant 10$ были доказаны более сильные оценки. При $k = 5$ лучшей на данный момент является оценка $v_5(G) \geqslant \frac{2}{3}v(G)$, полученная в работе [12]. Для $6 \leqslant k \leqslant 10$ в работах [5–7] было доказано, что $v_k(G) > \frac{1}{2}v(G)$.

1.3.1. *Окрестности вершин минимального и минимального по стягиванию 6-связного графа.* При исследовании структуры минимальных и минимальных по стягиванию k-связных графов большую роль играет изучение окрестностей их вершин. Для рассматриваемого в данной работе случая $k = 6$ С. А. Образцова [5] доказала, что в минимальном и минимальном по стягиванию 6-связном графе G окрестность любой вершины $v \in V_6(G)$ содержит хотя бы одну вершину степени 6 (т. е. что в графе G_6 нет изолированных вершин). Это соображение сыграло ключевую роль при доказательстве оценки $v_6(G) > \frac{1}{2}v(G)$. K. Ando и др. [10] обобщили это утверждение на случай произвольной (не обязательно имеющей степень 6) вершины графа G. В данной работе мы продолжим изучение окрестностей вершин степени 6 минимального и минимального по стягиванию 6-связного графа G. Основной упор будет сделан на изучение вершин степени 6, смежных ровно с одной вершиной степени 6.

1.3.2. *Верхние оценки и примеры минимальных и минимальных по стягиванию k-связных графов.* Примеры минимальных и минимальных по стягиванию 6-связных графов, содержащих вершины степени больше 6, впервые были построены С. А. Образцовой и А. В. Пастором в работе [8]. В указанной работе для каждого $k \geqslant 5$ была построена бесконечная серия минимальных и минимальных по стягиванию k-связных графов, содержащих вершины степени больше k. При $k = 6$ построенная серия обладает следующими свойствами:

- каждая вершина любого графа серии смежна хотя бы с двумя вершинами степени 6;
- доля вершин степени 6 в графах этой серии возрастает с ростом числа вершин и в пределе дает $\frac{21}{31}$;

- в самом маленьком графе серии 108 вершин и 72 из них имеют степень 6, то есть доля вершин степени 6 составляет $\frac{2}{3}$.

Еще один пример минимального и минимального по стягиванию 6-связного графа, содержащего вершины степени больше 6, привели K. Ando, S. Fujita и K. Kawarabayashi [10]. В этом примере есть вершина, смежная ровно с одной вершиной степени 6. Сама эта вершина имеет степень 7. Таким образом, оставался открытым вопрос о том, может ли минимальный и минимальный по стягиванию 6-связный граф содержать вершину степени 6, смежную ровно с одной вершиной степени 6? Также отметим, что в примере Ando и др. 35 вершин, 27 из которых имеют степень 6, то есть доля вершин степени 6 составляет $\frac{27}{35} > \frac{21}{31}$.

В данной работе мы построим бесконечную серию минимальных и минимальных по стягиванию 6-связных графов, обладающих следующими свойствами:

- в каждом из графов серии есть пары смежных вершин степени 6, ни одна из которых не смежна с другими вершинами степени 6 (более того, число таких пар возрастает с ростом числа вершин и может быть сколь угодно большим);
- в каждом графе серии доля вершин степени 6 составляет $\frac{11}{17} < \frac{2}{3}$.

Таким образом, мы покажем, что существуют минимальные и минимальные по стягиванию 6-связные графы со сколь угодно большим числом вершин, в которых доля вершин степени 6 равна $\frac{11}{17}$.

1.4. Используемые леммы. В данной работе мы будем пользоваться следующими доказанными ранее леммами.

Лемма 2 (см. [4])**.** *Пусть k-разделяющее множество R отделяет от k-связного графа G компоненту G_1. Тогда каждая из вершин множества R смежна хотя бы с одной из вершин компоненты G_1.*

Лемма 3 (см. [5, лемма 3])**.** *Пусть G – минимальный k-связный граф и $xy \in E(G)$. Тогда если $N_G(y) \subset N_G(x) \cup \{x\}$, то степени всех вершин, входящих в $N_G(y) \setminus \{x\}$, равны k.*

Важным частным случаем леммы 3 является ситуация, когда $d(x) = k + 1$ и $d(y) = k$. В этом случае $|N_G(\{x, y\})| = k$, то есть подграф $G(\{x, y\})$ является фрагментом графа G.

Определение 14. Упорядоченную пару (x, y) вершин минимального k-связного графа G мы будем называть *отделяемой парой*, если выполняются следующие условия:

- $xy \in E(G)$;
- $d(x) = k + 1$ и $d(y) = k$;
- $N_G(y) \subset N_G(x) \cup \{x\}$.

Вершину графа G мы будем называть *отделяемой*, если она входит в отделяемую пару. Фрагмент, индуцированный отделяемой парой, будем называть *особым*.

Лемма 4 (см. [6, лемма 5]). *Пусть G – минимальный k-связный граф и H – фрагмент графа G, такой, что $v(H) = 2$. Тогда $V(H) \cap V_k(G) \neq \varnothing$.*

Следствие 1. *Пусть G – минимальный k-связный граф и H – фрагмент графа G, относящийся к ребру uv и такой, что $v(H) \leqslant 2$. Тогда выполнено хотя бы одно из следующих двух утверждений*:

1° $N_G(u) \cap V_k(G) \cap V(H) \neq \varnothing$;

2° $d(v) = k$ *и фрагмент H – особый.*

В частности, в любом из случаев вершина и смежна с вершиной степени k, принадлежащей множеству $V(H) \cup \{v\}$.

Доказательство. Заметим, что в случае $v(H) = 1$ будет выполнено утверждение 1°. Действительно, в этом случае единственная вершина фрагмента H принадлежит всем трем пересекаемым множествам. Поэтому далее мы будем рассматривать только случай $v(H) = 2$.

Предположим, что утверждение 1° не выполнено. По лемме 2 существует вершина $x \in N_G(u) \cap V(H)$, причем по нашему предположению $d(x) > k$. Обозначим другую вершину подграфа H через y. Тогда по лемме 4 имеем $d(y) = k$, следовательно, по нашему предположению $uy \notin E(G)$. Далее, легко видеть, что $d(x) = k+1$, $N_G(x) = N_G(H) \cup \{y\}$ и $N_G(y) \subset N_G(x) \cup \{x\}$. То есть (x, y) – отделяемая пара и H – особый фрагмент. Но тогда по лемме 3 получаем $d(v) = k$ и выполнено утверждение 2°. □

Замечание 8. 1) Фактически, доказательство следствия 1 ничем не отличается от доказательства леммы 4 из работы [5] (там доказывалось, что вершина u имеет смежную вершину степени k). Однако в данной работе нам потребуется именно такая, немного уточненная формулировка.

2) При $k = 6$ утверждение следствия 1 можно вывести также из [10, лемма 4].

Лемма 5 (см. [5, лемма 5])**.** *Пусть G – минимальный по стягиванию k-связный граф и $a \in V_k(G)$. Тогда существует относящийся к $E_G(a)$ фрагмент H, такой, что $v(H) \leqslant \frac{k-1}{2}$.*

Замечание 9. 1) Строго говоря, в лемме 5 работы [5] было дополнительное условие $v(G) \geqslant 2k$, однако очевидно, что в случае $v(G) < 2k$ утверждение этой леммы также верно.

2) В нашем случае $k = 6$, то есть утверждение леммы 5 означает, что найдется 6-разделяющее множество, содержащее a и по крайней мере одну из смежных с ней вершин, которое отделяет компоненту, содержащую не более двух вершин.

Определение 15. Пусть $\kappa(G) = 6$, A – фрагмент графа G, $x \in N_G(A)$, $y \in N_G(x) \cap V(A)$ и B – фрагмент, относящийся к ребру xy. Тогда фрагмент B называется *допустимым* для $(x, y; A)$, если выполняются следующие условия: $V(B) \subset N_G(A)$, $v(B) \leqslant 2$ и $|N_G(B) \cap V(A)| \geqslant 2$ (см. рис. 1).

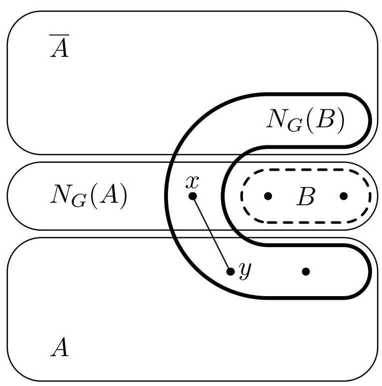


Рис. 1. Фрагмент B, допустимый для $(x, y; A)$.

Лемма 6 (см. [10, лемма 3])**.** *Пусть G – минимальный по стягиванию 6-связный граф, $x \in V(G)$, A – фрагмент, относящийся к $E_G(x)$, и $y \in N_G(x) \cap V(A)$. Предположим, что при этом $v(A) \geqslant 3$ и $v(\overline{A}) \geqslant 2$.*

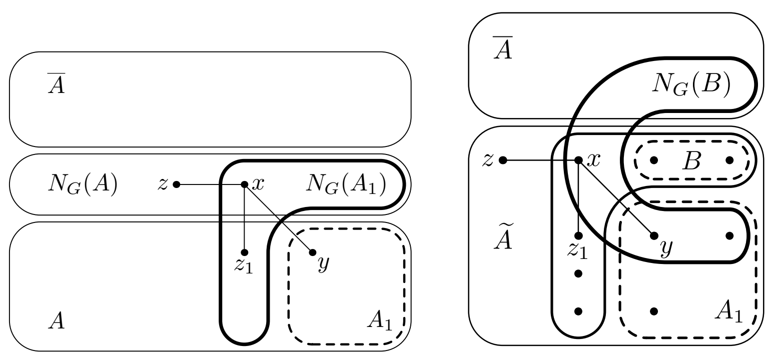
Тогда либо существует фрагмент B, допустимый для $(x, y; A)$, либо существует фрагмент A', относящийся к ребру xy, такой, что $V(A') \subsetneq V(A)$.

§2. Структура минимального и минимального по стягиванию 6-связного графа

Всюду, начиная с этого момента, под G понимается минимальный и минимальный по стягиванию 6-связный граф, содержащий хотя бы 8 вершин.

Лемма 7. *Пусть A – фрагмент графа G, относящийся к ребру xz, причем $v(\overline{A}) \geqslant 2$. Тогда $V_6(G) \cap N_G(x) \cap \widetilde{A} \neq \varnothing$.*

Доказательство. Рассмотрим все содержащиеся в A фрагменты, относящиеся к $E_G(x)$. Пусть A_1 – наименьший из них. Тогда A_1 относится к некоторому ребру xz_1, где $z_1 \in \widetilde{A}$ (см. рис. 2a). Далее, мы рассмотрим два случая: $v(A_1) \leqslant 2$ и $v(A_1) \geqslant 3$.



(a) (b)

Рис. 2. (a) фрагменты A и A_1; (b) фрагменты A_1 и B.

1. Пусть $v(A_1) \leqslant 2$. В этом случае по следствию 1 вершина x смежна с вершиной степени 6, лежащей в множестве $V(A_1) \cup \{z_1\} \subset \widetilde{A}$, что и требуется.

2. Пусть $v(A_1) \geqslant 3$. Тогда рассмотрим вершину $y \in N_G(x) \cap V(A_1)$ (такая вершина существует по лемме 2). Очевидно, что $v(\overline{A_1}) \geqslant v(\overline{A}) \geqslant 2$, следовательно, мы можем применить лемму 6 к фрагменту A_1 и ребру xy. Из этой леммы, учитывая минимальность фрагмента A_1, мы получим, что существует фрагмент B, допустимый для $(x, y; A_1)$ (см. рис. 2b). Тогда $v(B) \leqslant 2$. Таким образом, по следствию 1 вершина x смежна с вершиной степени 6, лежащей в множестве $V(B) \cup \{y\} \subset \widetilde{A}$, что и требуется. $\square$

Замечание 10. Фактически, лемма 7 очень близка к лемме 5 работы [10]. В принципе, ее можно было бы вывести из той леммы.

2.1. Висячие вершины графа G_6. В этом разделе мы рассмотрим вершины степени 6 графа G, смежные ровно с одной вершиной степени 6. Также мы отдельно изучим двухвершинные компоненты графа G_6, то есть пары смежных вершин степени 6 графа G, не смежных с другими вершинами степени 6.

Лемма 8. *Пусть $x \in V_6(G)$, $N_G(x) \cap V_6(G) = \{z\}$ и A – фрагмент графа G, относящийся к $E_G(x)$. Пусть также $N_G(A) \neq N_G(z)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $z \in N_G(A)$;
2) $|N_G(z) \cap V(A)| \geqslant 2$;
3) $N_G(x) \cap N_G(z) \cap V(A) \neq \varnothing$.

Доказательство. 1) Предположим противное: пусть $z \notin N_G(A)$. Тогда либо $z \in V(A)$, либо $z \in V(\overline{A})$. Обозначим через A_1 тот из фрагментов A и $\overline{A}$, которому не принадлежит вершина z. Тогда $z \in V(\overline{A_1})$ и, следовательно, $v(\overline{A_1}) \geqslant 2$ (в противном случае $N_G(z) = N_G(A_1) = N_G(A)$, что противоречит условию). Но тогда по лемме 7 вершина x смежна с вершиной степени 6, лежащей в $\widetilde{A_1}$, то есть $|N_G(x) \cap V_6(G)| \geqslant 2$. Противоречие.

2, 3) По пункту 1) данной леммы $z \in N_G(A)$, следовательно, по лемме 2 найдется вершина $t \in N_G(z) \cap V(\overline{A})$. Пусть A_1 – минимальный по включению фрагмент графа G, относящийся к $E_G(x)$ и содержащийся в A. Тогда $V(\overline{A_1}) \supset V(\overline{A}) \ni t$, откуда $N_G(A_1) \neq N_G(z)$. То есть к фрагменту A_1 также можно применить пункт 1) данной леммы. Таким образом, $z \in N_G(A_1)$ (см. рис. 3).

Рассмотрим вершину $y \in N_G(x) \cap V(A_1)$. Поскольку по доказанному выше $z \notin V(A_1)$, имеем $y \neq z$. Но z – единственная смежная с x

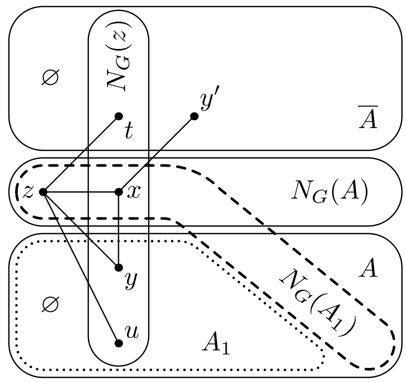


Рис. 3. Фрагменты A и A_1.

вершина степени 6. Следовательно, $d(y) \geqslant 7$ и тогда $v(A_1) \geqslant 2$. Аналогично, рассмотрев вершину $y' \in N_G(x) \cap V(\overline{A_1})$, получим $v(\overline{A_1}) \geqslant 2$. Далее, мы рассмотрим два случая: $v(A_1) = 2$ и $v(A_1) \geqslant 3$.

1. Пусть $V(A_1) = \{y, u\}$. Тогда $N_G(y) \subset N_G(A_1) \cup \{u\}$ и $d(y) \leqslant 7$. Но выше мы доказали, что $d(y) \geqslant 7$, следовательно, $d(y) = 7$ и $N_G(y) = N_G(A_1) \cup \{u\}$. В частности, это означает, что $yz \in E(G)$ и тогда $y \in N_G(x) \cap N_G(z) \cap V(A)$. Таким образом, утверждение 3) выполнено. Далее, применив лемму 4 к фрагменту A_1 получим $d(u) = 6$. То есть вершина u смежна со всеми вершинами множества $N_G(A_1) \cup \{y\}$, кроме какой-то одной. Но при этом $xu \notin E(G)$, поскольку $d(u) = 6$ и $u \neq z$. Тогда $zu \in E(G)$, следовательно, утверждение 2) также выполнено.

2. Пусть $v(A_1) \geqslant 3$. Тогда мы можем применить лемму 6 к фрагменту A_1 и ребру xy. Заметим, что относящегося к xy фрагмента, содержащегося в A_1, в силу минимальности A_1 существовать не может. Следовательно, найдется фрагмент B, допустимый для $(x, y; A_1)$.

По следствию 1 вершина x должна быть смежна с вершиной степени 6 из множества $V(B) \cup \{y\}$. Но единственная смежная с x вершина степени 6 – это z. Тогда, поскольку $z \neq y$, получаем, что $z \in V(B)$. Далее докажем, что $N_G(B) = N_G(z)$. Действительно, в противном случае, применив пункт 1) данной леммы к фрагменту B, мы получим $z \in N_G(B)$, что противоречит доказанному выше.

Итак, $y \in N_G(B) = N_G(z)$. Тогда $y \in N_G(x) \cap N_G(z) \cap V(A)$ и утверждение 3) доказано. Утверждение 2) следует непосредственно из равенства $N_G(B) = N_G(z)$ и определения допустимого фрагмента. $\square$

Следствие 2. *Пусть $x \in V_6(G)$ и $N_G(x) \cap V_6(G) = \{z\}$. Тогда вершины x и z имеют хотя бы две общих смежных.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное 6-разделяющее множество T, содержащее вершины x и z. Тогда граф $G - T$ состоит хотя бы из двух компонент, каждая из которых по пункту 3) леммы 8 содержит общую смежную вершин x и z. Следовательно, общих смежных хотя бы две. $\square$

Следствие 3. *Пусть упорядоченная пара вершин (x, z) и множество $T \in \mathfrak{R}_6(G)$ таковы, что $x \in V_6(G)$, $N_G(x) \cap V_6(G) = \{z\}$, множество T относится к $E_G(x)$ и $T \neq N_G(z)$. Тогда $z \in T$, $|\mathrm{Part}(T)| = 2$ и внутренность каждой части $\mathrm{Part}(T)$ содержит две или три вершины, смежные с z.*

Доказательство. Напомним, что внутренность каждой части $\mathrm{Part}(T)$ есть множество вершин одной из компонент графа $G - T$. Пусть A – компонента графа $G - T$. Тогда $N_G(A) = T \neq N_G(z)$. Следовательно, по пункту 1) леммы 8 имеем $z \in T$.

Далее, по пункту 2) леммы 8 каждая из компонент графа $G - T$ содержит хотя бы две вершины, смежные с z. Но поскольку $x \in N_G(z) \cap T$, в графе $G - T$ таких вершин не более 5. Следовательно, компонент ровно две и каждая из них содержит две или три вершины, смежные с z. $\square$

Следствие 4. *Пусть упорядоченная тройка вершин (x, z, t) и множество $T \in \mathfrak{R}_6(G)$ таковы, что $x \in V_6(G)$, $N_G(x) \cap V_6(G) = \{z\}$, $t \in (N_G(z) \cap T) \setminus \{x\}$, множество T относится к $E_G(x)$ и $T \neq N_G(z)$. Тогда $z \in T$, $N_G(z) \cap T = \{x, t\}$, $|\mathrm{Part}(T)| = 2$ и для любой части $H \in \mathrm{Part}(T)$ выполнено $|N_G(z) \cap \mathrm{Int}(H)| = 2$.*

Доказательство. По следствию 3 получаем, что $z \in T$, $|\mathrm{Part}(T)| = 2$ и для любой части $H \in \mathrm{Part}(T)$ выполнено $|N_G(z) \cap \mathrm{Int}(H)| \geqslant 2$. Тогда $\{x, t\} \subset N_G(z) \cap T$ и, следовательно, $|N_G(z) \cap T| \geqslant 2$. Пусть $\mathrm{Part}(T) = \{H_1, H_2\}$. Заметим, что

$$|N_G(z) \cap \mathrm{Int}(H_1)| + |N_G(z) \cap \mathrm{Int}(H_2)| + |N_G(z) \cap T| = 6$$

и каждое из слагаемых не меньше двух. Тогда

$$|N_G(z) \cap \mathrm{Int}(H_1)| = |N_G(z) \cap \mathrm{Int}(H_2)| = |N_G(z) \cap T| = 2$$

и, следовательно, $N_G(z) \cap T = \{x, t\}$. $\square$

Теорема 2. *Пусть вершины $x, z \in V_6(G)$ таковы, что*

$$N_G(x) \cap V_6(G) = \{z\} \quad \text{и} \quad N_G(z) \cap V_6(G) = \{x\}.$$

Введем обозначения $R = N_G(\{x, z\})$ и $Y = N_G(x) \cap N_G(z)$. Тогда

1) $|Y| = 4$*;*

2) $R \in \mathfrak{R}_6(G)$*, причем никакое зависимое с R множество из $\mathfrak{R}_6(G)$ не пересекается с Y;*

3) *среди вершин множества R может быть не более одной пары смежных. А именно, смежными могут быть вершины, не входящие в Y, и только они.*

Доказательство. 1) Заметим, что $|Y| \leqslant 4$, поскольку в противном случае $|N_G(\{x, z\})| = 5$, что невозможно.

Предположим, что $|Y| < 4$. Тогда найдутся вершины s, t лежащие в $N_G(z) \setminus (N_G(x) \cup \{x\})$. Рассмотрим множества $S, T \in \mathfrak{R}_6(G)$, где $\{s, z\} \subset S$ и $\{t, z\} \subset T$. Отметим, что ни одно из этих множеств не совпадает ни с $N_G(x)$, ни с $N_G(z)$. Действительно, множество S содержит вершину $s \notin N_G(x)$, а множество T – вершину $t \notin N_G(x)$ и оба эти множества содержат вершину $z \notin N_G(z)$.

Заметим, что множество T относится к $E_G(z)$. Тогда, применив следствие 3 к паре вершин (z, x) и множеству T, получаем $x \in T$ и $|\mathrm{Part}(T)| = 2$. Пусть $\mathrm{Part}(T) = \{H_1, H_2\}$. Поскольку $\{x, z\} \subset T$, множество T относится также и к $E_G(x)$. Кроме того, $t \in (N_G(z) \cap T) \setminus \{x\}$. Тогда, применив следствие 4 к тройке вершин (x, z, t) и множеству T, получим, что $|N_G(z) \cap \mathrm{Int}(H_1)| = |N_G(z) \cap \mathrm{Int}(H_2)| = 2$ и $N_G(z) \cap T = \{x, t\}$. Следовательно, $s \notin T$. Не умаляя общности будем считать, что $s \in \mathrm{Int}(H_1)$.

Рассуждая аналогично получим, что $x \in S$, $N_G(z) \cap S = \{x, s\}$ и можно ввести обозначения $\mathrm{Part}(S) = \{F_1, F_2\}$ так, что $t \in \mathrm{Int}(F_1)$ и $|N_G(z) \cap \mathrm{Int}(F_1)| = |N_G(z) \cap \mathrm{Int}(F_2)| = 2$.

Докажем, что множества S и T зависимы. Действительно, в противном случае $S \subset H_1$ и найдется часть $F_i \in \mathrm{Part}(S)$, такая, что $F_i \subset H_1 \setminus \{s\}$. Но тогда $|N_G(z) \cap \mathrm{Int}(F_i)| < 2$, что невозможно. В дальнейших рассуждениях мы будем применять к множествам S и T лемму 1 и будем использовать обозначения, принятые в этой лемме.

Кроме того, введем дополнительные обозначения $R_{i,j} = \mathrm{Bound}(G_{i,j})$ и $V_{i,j} = \mathrm{Int}(G_{i,j})$ (где $i, j \in \{1, 2\}$). Отметим, что $z \in P \subset R_{i,j}$ при всех $i, j \in \{1, 2\}$. Следовательно, ни одно из множеств $R_{i,j}$ не может совпадать с $N_G(z)$.

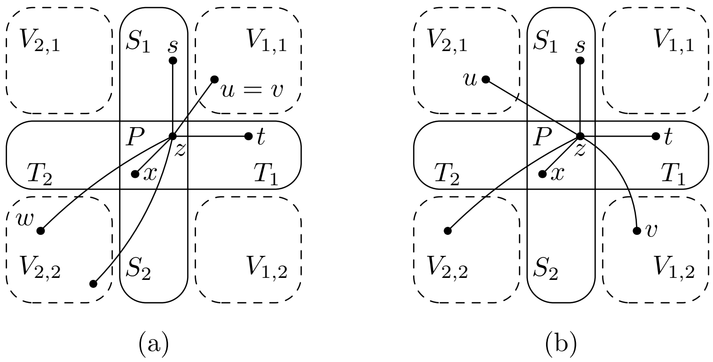


Рис. 4. (a) случай $u = v$; (b) случай $u \neq v$.

Пусть u и v – такие вершины, что

$$N_G(z) \cap \mathrm{Int}(H_1) = \{s, u\} \quad \text{и} \quad N_G(z) \cap \mathrm{Int}(F_1) = \{t, v\}.$$

Далее, мы рассмотрим два случая: вершины u и v могут совпадать или не совпадать.

1.1. Пусть $u = v$ (см. рис. 4a).Тогда $u \in \mathrm{Int}(H_1) \cap \mathrm{Int}(F_1) = V_{1,1}$. Следовательно, часть $G_{1,1}$ непуста и тогда $|R_{1,1}| \geqslant 6$. Рассмотрим вершину $w \in N_G(z)$, отличную от x, s, t, u. Легко видеть, что $w \in \mathrm{Int}(H_2) \cap \mathrm{Int}(F_2) = V_{2,2}$, то есть часть $G_{2,2}$ также непуста и тогда $|R_{2,2}| \geqslant 6$. С другой стороны, из леммы 1 легко следует, что $|R_{1,1}| + |R_{2,2}| = |S| + |T| = 12$, откуда $|R_{1,1}| = |R_{2,2}| = 6$. Тогда $R_{1,1}$ – 6-разделяющее множество, относящееся к ребру xz и отделяющее $V_{1,1}$ от остальных вершин графа G. Применив следствие 3 к паре (x, z) и множеству $R_{1,1}$ получаем, что в $V_{1,1}$ должны быть хотя бы две вершины, смежные с z. Однако это не так: легко видеть, что $N_G(z) \cap V_{1,1} = \{u\}$. Таким образом, данный случай невозможен.

1.2. Пусть $u \neq v$ (см. рис. 4b). Тогда $u \notin \mathrm{Int}(F_1)$. Действительно, в противном случае $u \in N_G(z) \cap \mathrm{Int}(F_1) = \{t, v\}$, но $u \neq v$ по нашему предположению и $u \neq t$, поскольку $u \notin T$. Далее, $u \notin S$, поскольку

$N_G(z) \cap S = \{x, s\}$. Следовательно, $u \in \mathrm{Int}(H_1) \cap \mathrm{Int}(F_2) = V_{2,1}$. Аналогично доказывается, что $v \in V_{1,2}$. Тогда части $G_{1,2}$ и $G_{2,1}$ непусты, откуда $|R_{1,2}| \geqslant 6$ и $|R_{2,1}| \geqslant 6$. Но по лемме 1 имеем $|R_{1,2}| + |R_{2,1}| = |S| + |T| = 12$. То есть $|R_{1,2}| = |R_{2,1}| = 6$. Тогда $R_{1,2}$ – 6-разделяющее множество, относящееся к ребру xz и отделяющее $V_{1,2}$ от остальных вершин графа G. Применив следствие 3 к паре (x, z) и множеству $R_{1,2}$ получаем, что в $V_{1,2}$ должны быть хотя бы две вершины, смежные с z. Но легко видеть, что $N_G(z) \cap V_{1,2} = \{v\}$. Таким образом, данный случай также невозможен.

2) Поскольку $|Y| = 4$, в множестве $N_G(x)$ есть ровно одна вершина, отличная от z и не смежная с z. Обозначим эту вершину через x_1. Аналогично, обозначим через z_1 единственную вершину множества $N_G(z)$, которая отлична от x и не смежна с x. Тогда $R = Y \cup \{x_1, z_1\}$, следовательно, $|R| = 6$. При этом R отделяет множество $\{x, z\}$ от остальных вершин графа G. Таким образом, $R \in \mathfrak{R}_6(G)$.

Предположим, что множество $T \in \mathfrak{R}_6(G)$ зависимо с R и $y \in T \cap Y$. Тогда множество T должно пересекаться с внутренностями всех частей $\mathrm{Part}(R)$. В частности, $T \cap \{x, z\} \neq \varnothing$. Не умаляя общности будем считать, что $x \in T$. Тогда множество T относится к ребру xy. Кроме того, из зависимости T и R следует, что $T \neq N_G(z)$. Отметим также, что $y \in (N_G(z) \cap T) \setminus \{x\}$. Тогда, применив следствие 4 к тройке (x, z, y) и множеству T, получим, что $z \in T$, $N_G(z) \cap T = \{x, y\}$, $|\mathrm{Part}(T)| = 2$ и для любой части $H \in \mathrm{Part}(T)$ выполнено $|N_G(z) \cap \mathrm{Int}(H)| = 2$. В частности, это означает, что $\{x, y, z\} \subset T$ и $z_1 \notin T$. Обозначим части $\mathrm{Part}(T)$ через H_1 и H_2 так, что $z_1 \in \mathrm{Int}(H_1)$. Из доказанного выше следует, что мы можем ввести обозначения так, что $N_G(z) \cap \mathrm{Int}(H_1) = \{y_1, z_1\}$ и $N_G(z) \cap \mathrm{Int}(H_2) = \{y_2, y_3\}$, где $Y = \{y, y_1, y_2, y_3\}$.

Далее рассмотрим множество $S \in \mathfrak{R}_6(G)$, относящееся к ребру zz_1. Отметим, что $S \neq N_G(x)$, поскольку $z_1 \notin N_G(x)$, и $S \neq N_G(z)$, поскольку $z \in S$. Кроме того, $z_1 \in (N_G(z) \cap S) \setminus \{x\}$. Тогда, применив следствие 3 к паре (z, x) и множеству S, мы получим, что $x \in S$ и $|\mathrm{Part}(S)| = 2$. И далее, применив следствие 4 к тройке (x, z, z_1) и множеству S, получаем $N_G(z) \cap S = \{x, z_1\}$ и $|N_G(z) \cap \mathrm{Int}(F_1)| = |N_G(z) \cap \mathrm{Int}(F_2)| = 2$, где $\mathrm{Part}(S) = \{F_1, F_2\}$. Не умаляя общности будем считать, что $y \in \mathrm{Int}(F_2)$.

Докажем, что множества S и T зависимы. Действительно, в противном случае, поскольку $z_1 \in S$, мы имеем $S \subset H_1$ и, следовательно,

$\mathrm{Int}(F_1) \subset \mathrm{Int}(H_1) \setminus \{z_1\}$. Таким образом, y_1 – единственная вершина из $N_G(z)$, которая может лежать в $\mathrm{Int}(F_1)$. Противоречие.

Итак, множества S и T зависимы. Далее мы будем использовать для частей разбиения графа G этими множествами, их границ и внутренностей те же обозначения, что использовались в лемме 1 и в пункте 1) данной теоремы. Отметим, что ни одно из множеств $R_{i,j}$ не может совпадать с $N_G(z)$, так как все эти множества содержат вершину z. Далее, поскольку $y_1 \in H_1 \setminus S$, возможны два случая: $y_1 \in V_{1,1}$ и $y_1 \in V_{2,1}$. Разберем эти случаи.

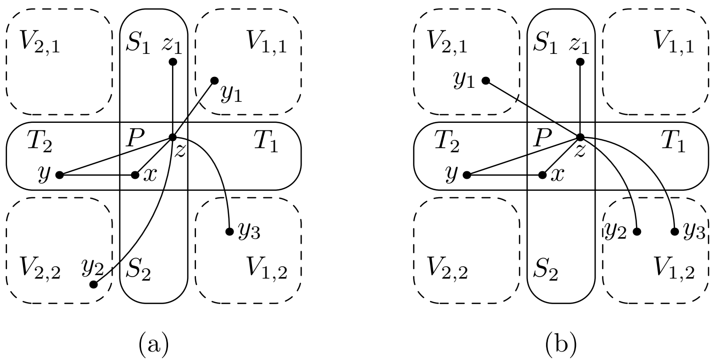


Рис. 5. (a) случай $y_1 \in V_{1,1}$; (b) случай $y_1 \in V_{2,1}$.

2.1. Пусть $y_1 \in V_{1,1}$ (см. рис. 5a). Тогда $N_G(z) \cap V_{2,1} = \varnothing$. Поскольку $N_G(z) \cap T_2 = \{y\}$ и $|N_G(z) \cap \mathrm{Int}(F_2)| = 2$ получаем $|N_G(z) \cap V_{2,2}| = 1$ (не умаляя общности, пусть $y_2 \in V_{2,2}$). Это означает, что части $G_{1,1}, G_{2,2} \in \mathrm{Part}(\{S,T\})$ непусты и их границы $R_{1,1}$, $R_{2,2}$ являются разделяющими множествами. Тогда, поскольку $|R_{1,1}| + |R_{2,2}| = 12$, имеем $R_{1,1}, R_{2,2} \in \mathfrak{R}_6(G)$ и множество $R_{1,1}$ относится к ребру xz. Применив следствие 3 к паре (x,z) и множеству $R_{1,1}$ получаем, что в $V_{1,1}$ должны быть хотя бы две вершины, смежные с z. Однако $N_G(z) \cap V_{1,1} = \{y_1\}$. Таким образом, данный случай невозможен.

2.2. Пусть $y_1 \in V_{2,1}$ (см. рис. 5b). Тогда $N_G(z) \cap V_{1,1} = \varnothing$. Поскольку $N_G(z) \cap T_1 = \varnothing$ и $|N_G(z) \cap \mathrm{Int}(F_1)| = 2$ получаем $\{y_2, y_3\} \subset V_{1,2}$. Это означает, что части $G_{2,1}, G_{1,2} \in \mathrm{Part}(\{S,T\})$ непусты и их границы $R_{2,1}$, $R_{1,2}$ являются разделяющими множествами. Тогда, поскольку $|R_{2,1}| + |R_{1,2}| = 12$, имеем $R_{2,1}, R_{1,2} \in \mathfrak{R}_6(G)$ и множество $R_{2,1}$ относится к ребру xz. Применив следствие 3 к паре (x,z) и множеству $R_{2,1}$

получаем, что в $V_{2,1}$ должны быть хотя бы две вершины, смежные с z. Однако $N_G(z) \cap V_{2,1} = \{y_1\}$. Таким образом, данный случай также невозможен.

3) Пусть $yu \in E(G)$, где $y \in Y$ и $u \in R$. Тогда, поскольку G – минимальный 6-связный граф, существует разрез $M \in \mathfrak{M}_1(G)$, такой, что $yu \in M$. Рассмотрим часть $H \in \mathrm{Part}(M)$, содержащую вершину y, и ее границу T. Заметим, что $y \in N_G(x) \setminus \{z\}$, следовательно, $d(y) > 6$. Но тогда $\mathrm{Int}(H) \neq \varnothing$, откуда $T \in \mathfrak{R}_6(G)$. Поскольку $y \in T \cap Y$, по пункту 2) данной теоремы получаем, что множества R и T независимы. Следовательно, найдется такая часть $F \in \mathrm{Part}(R)$, что $T \cap \mathrm{Int}(F) = \varnothing$. Но тогда и $V(M) \cap \mathrm{Int}(F) = \varnothing$, то есть разрез M не разделяет множество $\mathrm{Int}(F)$. Однако по лемме 2 каждая из вершин y и u смежна хотя бы с одной вершиной из $\mathrm{Int}(F)$. Следовательно, разрез M не может разделять вершины y и u. Противоречие. □

Замечание 11. Фактически в теореме 2 доказано, что любая двухвершинная компонента графа G_6 входит в конфигурацию, изображенную на рисунке 6.

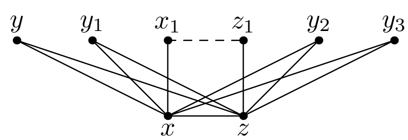


Рис. 6. Двухвершинная компонента графа G_6 и ее окрестность. Пунктиром проведено единственное возможное ребро между вершинами окрестности.

§3. Примеры минимальных и минимальных по стягиванию 6-связных графов

3.1. Операция присоединения треугольника. В основе нашей конструкции будет лежать описанная в работе [8] *операция присоединения треугольника* (в [8] эта операция называлась $(K_3, 6)$-*расширением* графа).

Определение 16. Пусть G – граф, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\} \subset V(G)$ и множество $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ не пересекается с $V(G)$. *Присоединением* *треугольника* $x_1x_2x_3$ к множеству Y мы будем называть операцию построения графа G', такого, что

$$V(G') = V(G) \cup X \quad \text{и} \quad E(G') = E(G) \cup E_x \cup E_{xy},$$

где $E_x = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1\}$ и

$E_{xy}=\{x_1y_1, x_1y_2, x_1y_3, x_1y_4, x_2y_3, x_2y_4, x_2y_5, x_2y_6, x_3y_5, x_3y_6, x_3y_1, x_3y_2\}$.

Вершины множества X и ребра множества $E_x \cup E_{xy}$ мы будем называть *присоединенными* в результате данной операции.

Замечание 12. Фактически операция присоединения треугольника заключается в добавлении к графу G трех новых вершин, которые соединяются друг с другом и с вершинами множества Y так, как показано на рисунке 7.

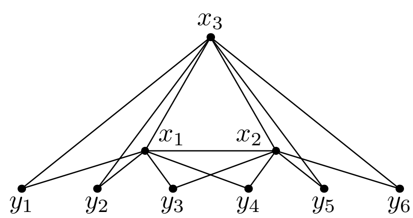


Рис. 7. Операция присоединения треугольника.

Замечание 13. Отметим, что операция присоединения треугольника обладает следующими свойствами (см. также [8])

(1) каждая присоединенная вершина имеет в графе G' степень 6;

(2) каждое присоединенное ребро инцидентно хотя бы одной присоединенной вершине;

(3) каждое присоединенное ребро входит в треугольник, третья вершина которого – присоединенная;

(4) любые две присоединенные вершины x_i, x_j вместе смежны со всеми вершинами множества Y (т. е. $Y \subset N_{G'}(\{x_i, x_j\})$).

Из свойств (1) – (3) непосредственно следует то, что как при удалении, так и при стягивании любого присоединенного ребра одна из присоединенных вершин будет иметь степень 5. То есть после любой из указанных выше операций получившейся граф заведомо не будет 6-связным. Кроме того, по свойству (4) любое множество, разделяющее Y, должно содержать как минимум две присоединенные вершины.

3.2. Вспомогательный граф H. Пусть $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$. Построим граф H_0 так, что $V(H_0) = Y$ и $E(H_0) = \varnothing$. Далее, последовательно присоединим к множеству Y три треугольника: $x_1x_2x_3$, $x_4x_5x_6$ и $x_7x_8x_9$. Обозначим получившийся граф через H (см. рис. 8). Отметим, что граф H в качестве вспомогательного графа использовался также и в [8], там он обозначался H_1 в случае $k = 6$.

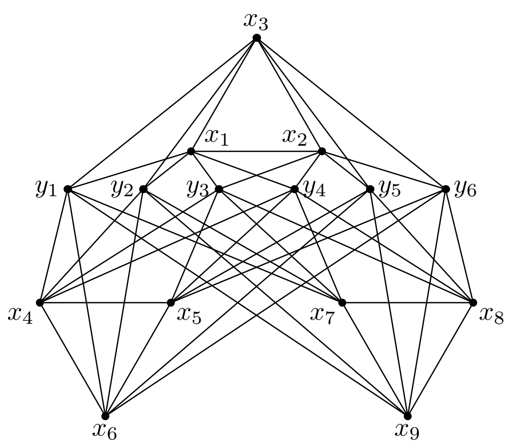


Рис. 8. Вспомогательный граф H.

Лемма 9 (см. [8, лемма 3])**.** *Граф H – минимальный и минимальный по стягиванию 6-связный граф. Кроме того, граф H – 6-регулярен.*

Доказательство. Достаточно доказать 6-связность графа H, поскольку его 6-регулярность очевидна, а минимальность и минимальность по стягиванию следуют из замечания 13. Пусть $T \subset V(H)$ и $|T| < 6$. Тогда множество T содержит не более одной вершины одного из присоединенных треугольников. Следовательно, по замечанию 13 множество T не может разделять Y. Также из замечания 13 легко следует, что T не может отделять от Y никакую вершину x_i. Таким образом, граф $H - T$ связен. □

3.3. Конструкция графа F_n. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n > 1$. Рассмотрим n копий графа H – графы $H_1, \ldots, H_n$. Вершины графа H_i, соответствующие вершинам x_j и y_k графа H, мы будем обозначать через x_{ij} и y_{ik} соответственно. Также рассмотрим $2n$ новых вершин z_{il}, где $1 \leqslant i \leqslant n$

и $1 \leqslant l \leqslant 2$. Нумерацию графов H_i мы будем считать циклической, т. е. их номера будут вычетами по модулю n. То же относится и к первым индексам в обозначениях вершин x_{ij}, y_{ik} и z_{il}.

Построим граф F_n следующим образом:

$$V(F_n) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigl(V(H_i) \cup \{z_{i1}, z_{i2}\}\bigr) \quad \text{и} \quad E(F_n) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigl(E(H_i) \cup E_i\bigr),$$

где

$$E_i = \{z_{i1}y_{i4}, z_{i1}y_{i5}, z_{i1}y_{i6}, z_{i1}y_{i+1,1}, z_{i1}y_{i+1,2}\} \cup \\ \cup \{z_{i2}y_{i5}, z_{i2}y_{i6}, z_{i2}y_{i+1,1}, z_{i2}y_{i+1,2}, z_{i2}y_{i+1,3}\} \cup \{z_{i1}z_{i2}, y_{i4}y_{i+1,3}\}.$$

Пример графа F_n для $n = 3$ изображен на рисунке 9.

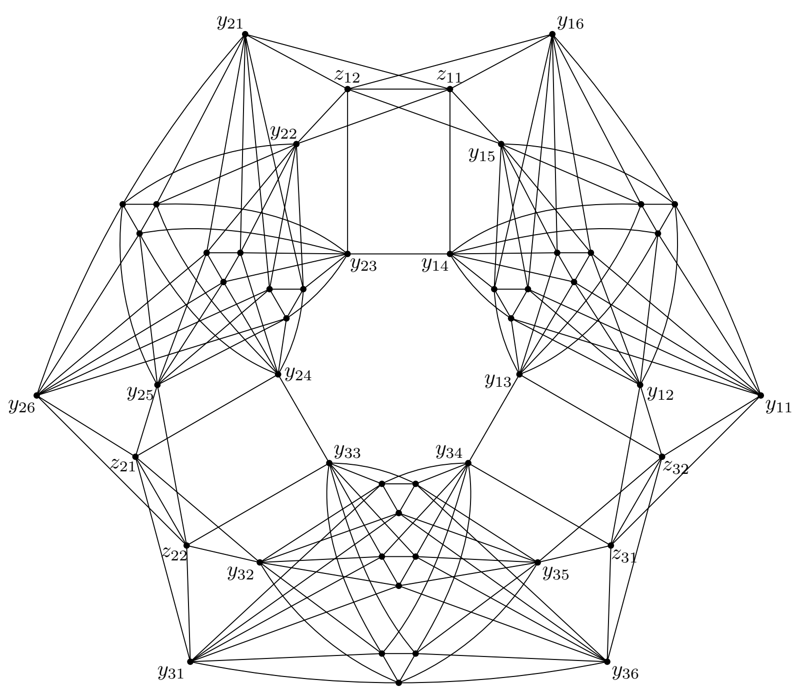


Рис. 9. Граф F_3.

Теорема 3. *При всех $n \geqslant 2$ граф F_n является минимальным и минимальным по стягиванию 6-связным графом. В этом графе $17n$ вершин, $11n$ из которых имеют степень 6 (это все вершины вида x_{ij} и z_{il}). Остальные вершины графа F_n (т. е. вершины вида y_{ik}) имеют степень 8.*

Доказательство. Утверждения про степени вершин графа F_n и их количества вытекают непосредственно из построения графа F_n.

Докажем, что граф F_n является 6-связным. Пусть $T \subset V(F_n)$ и $|T| < 6$. Тогда по лемме 9 множество T не может разделять ни одно из множеств $V(H_i)$. Также очевидно, что ни одна из компонент графа $F_n - T$ не может состоять только из вершин вида z_{il}.

Предположим, что граф $F_n - T$ несвязен. Из сказанного выше и циклической упорядоченности подграфов H_i следует, что найдутся как минимум два индекса i и j, таких, что T отделяет $V(H_i)$ от $V(H_{i+1})$ и $V(H_j)$ от $V(H_{j+1})$. Тогда заметим, что множества $V(H_i)$ и $V(H_{i+1})$ можно соединить тремя непересекающимися по вершинам путями: $y_{i4}y_{i+1,3}$, $y_{i5}z_{i1}y_{i+1,2}$ и $y_{i6}z_{i2}y_{i+1,1}$. Аналогично можно провести три непересекающихся пути из $V(H_j)$ в $V(H_{j+1})$, причем все шесть получившихся путей не будут иметь общих вершин. Но тогда множество T должно содержать хотя бы по одной вершине каждого из этих шести путей. То есть $|T| \geqslant 6$. Противоречие.

Итак, F_n – 6-связный граф. Докажем его минимальность. Очевидно, что 6-связность теряется при удалении любого ребра, инцидентного хотя бы одной вершине степени 6. То есть нам достаточно рассмотреть только те ребра, оба конца которых имеют степень более, чем 6. А это только ребра вида $y_{i4}y_{i+1,3}$. Заметим, что каждое такое ребро входит в разрез $\{z_{i1}, z_{i2}, y_{i4}y_{i+1,3}, y_{i+1,4}, z_{i+1,1}, z_{i+1,2}\}$, что и доказывает минимальность.

Наконец, докажем минимальность по стягиванию. Очевидно, что 6-связность теряется при стягивании любого ребра, входящего в треугольник, третья вершина которого имеет степень 6. Из замечания 13 и конструкции графа H вытекает, что все ребра подграфов H_i входят в такие треугольники. В множествах же E_i в такие треугольники входят ребра, соединяющие вершины z_{il} с их общими соседями (вершинами y_{i5}, y_{i6}, $y_{i+1,1}$, $y_{i+1,2}$). Остаются ребра $z_{i1}z_{i2}$, $z_{i1}y_{i4}$, $z_{i2}y_{i+1,3}$ и $y_{i4}y_{i+1,3}$. Заметим, что концы первых двух из этих ребер принадлежат разделяющему множеству $\{z_{i-1,1}, z_{i-1,2}, y_{i3}, y_{i4}, z_{i1}, z_{i2}\}$, концы третьего – множеству $\{z_{i1}, z_{i2}, y_{i+1,3}, y_{i+1,4}, z_{i+1,1}, z_{i+1,2}\}$, а концы четвертого – множеству $\{y_{i6}, y_{i5}, y_{i4}, y_{i+1,3}, y_{i+1,2}, y_{i+1,1}\}$. Таким образом, при стягивании любого из оставшихся ребер 6-связность также нарушается. □

Список литературы

1. Д. В. Карпов, *Блоки в k-связных графах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **293** (2002), 59–93.
2. Д. В. Карпов, *Разделяющие множества в k-связном графе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **340** (2006), 33–60.
3. Д. В. Карпов, *Дерево разрезов и минимальный k-связный граф.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **427** (2014), 22–40.
4. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *О структуре k-связного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 76–106.
5. С. А. Образцова, *О локальной структуре* 5 *и* 6*-связных графов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **381** (2010), 88–96.
6. С. А. Образцова, *О локальной структуре* 9 *и* 10*-связных графов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **391** (2011), 157–197.
7. С. А. Образцова, А. В. Пастор, *О локальной структуре 7 и 8-связных графов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **381** (2010), 97–111.
8. С. А. Образцова, А. В. Пастор, *О вершинах степени k минимальных и минимальных относительно стягивания k-связных графов: верхние оценки.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **391** (2011), 198–210.
9. А. В. Пастор, *О разбиении трехсвязного графа на циклически реберно-четырехсвязные компоненты.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **450** (2016), 109–150.
10. K. Ando, S. Fujita, K. Kawarabayashi, *Minimally contraction-critically* 6*-connected graphs.* — Discrete Mathematics **312** no. 3 (2012), 671–679.
11. K. Ando, T. Iwase, *The number of vertices of degree* 5 *in a contraction-critically* 5*-connected graph.* — Discrete Mathematics **311** (2011), 1925–1939.
12. K. Ando, C. Qin, *Some structural properties of minimally contraction-critically* 5*-connected graphs.* — Discrete Mathematics **311** (2011), 1084–1097.
13. M. Fontet, *Graphes 4-essentiels.* — C. R. Acad. Se. Paris, **287**, serie A (1978), 289–290.
14. R. Halin, *A theorem on n-connected graphs.* — J. Comb. Theory **7** (1969), 150–154.
15. W. Hohberg, *The decomposition of graphs into k-connected components.* — Discr. Math., **109** (1992), 133–145.
16. M. Li, X. Yuan, J. Su, *The number of vertices of degree* 7 *in a contraction-critical* 7*-connected graph.* — Discrete Mathematics **308** (2008), 6262–6268.
17. W. Mader, *Ecken Vom Gard n in minimalen n-fach zusammenhangenden Graphen.* (German), Arch. Math. (Basel) **23** (1972), 219–224.
18. W. Mader, *Zur Struktur minimal n-fach zusammenhängender Graphen.* (German), Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **49** (1979), 49–69.
19. N. Martinov, *A recursive characterization of the* 4*-connected graphs.* — Discrete Mathematics **84** (1990), 105–108.

20. W. T. Tutte, *A theory of* 3-*connected graphs.* — Indag. Math. **23** (1961), 441–455.
21. Q. Zhao, C. Qin, X. Yuan, M. Li, *Vertices of degree 6 in a contraction-critical 6 connected graph.* — J. Guangxin Norm. Univ. **25**, No. 2 (2005), 38–43.

Pastor A. V. On vertices of degree 6 of minimally and contraction critically 6-connected graph.

In this paper, we research vertices of degree 6 of minimally and contraction critically 6-connected graph, i.e. a 6-connected graph that will loose 6-connectivity after removing or contracting of any edge. We prove the following theorem. If x and z are adjacent vertices of degree 6 of such a graph and no other vertex of degree 6 is adjacent to x or z then x and z have at least 4 common neighbors. Moreover, in this case we give a detailed description of the neighborhood of the set $\{x, z\}$. Also, we construct an infinite series of examples of minimally and contraction critically 6-connected graphs, for which a fraction of vertices of degree 6 is $\frac{11}{17}$.

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН
наб. р. Фонтанки 27,
С.-Петербург, 191023

Поступило 25 ноября 2019 г.

С.-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ)
Россия, 195251, Санкт-Петербург,
ул. Политехническая, д.29
E-mail: avpastor@pdmi.ras.ru