

Е. С. Краско, И. Н. Лабутин, А. В. Омельченко

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ И НЕПОМЕЧЕННЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ЦИКЛОВ В ПОЛНЫХ k -ДОЛЬНЫХ ГРАФАХ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи перечисления гамильтоновых циклов в графах того или иного вида являются актуальными как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. Подобного рода задачи возникают, например, в теоретической физике [1], химии, биологии и биоинформатике [2], а также в теории алгоритмов. Например, гамильтоновы циклы и пути могут служить простыми моделями при исследовании термодинамики полимеров и анализе плотноупакованных глобулярных белков [3]. В физике интерес к гамильтоновым циклам возникает, например, при изучении магнитных систем с дополнительной симметрией [1]. Наконец, задачи точного перечисления гамильтоновых циклов могут быть полезными при разработке статистических алгоритмов, создающих случайные выборки из множества таких циклов.

Определение того, является ли граф гамильтоновым, является сложной (NP-полной) задачей. Ещё сложнее выяснить, сколько именно различных гамильтоновых циклов содержит граф. В силу трудности этой задачи подсчет количества гамильтоновых циклов существенным образом использует специфику тех или иных классов графов. При этом в ряде случаев удается получить точное решение, например с помощью метода трансфер-матриц [4]. Для некоторых других классов графов разрабатываются специализированные перечислительные алгоритмы [5]. Известно также большое число результатов, посвященных доказательству верхних и нижних оценок на количество гамильтоновых циклов [6–10]).

Ключевые слова: гамильтоновы циклы; полный n -дольный граф; хордовая диаграмма; линейная диаграмма; перечисление помеченных и непомеченных объектов.

Публикация подготовлена в результате проведения работы (грант No. 19-01-004) в рамках Программы “Научный фонд Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики” (НИУ ВШЭ)” в 2019 г. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации “5-100”.

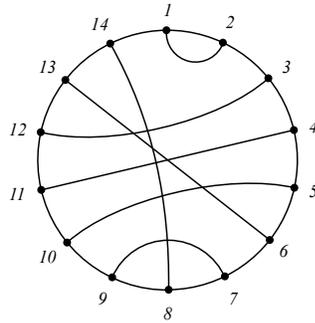


Рис. 1. Хордовая диаграмма.

Отдельно можно выделить класс задач перечисления гамильтоновых циклов в графах, относящихся к определенному параметризованному семейству и имеющих высокую степень симметрии. Для многих таких семейств известно, что они гамильтоновы, и основная задача стоит в определении точного числа гамильтоновых циклов. В представленной статье мы рассматриваем полные n -дольные графы $K_{d,d,\dots,d}$, имеющие d вершин в каждой доле. В случае $d = 2$ такие графы и гамильтоновы циклы в них оказываются тесно связаны с так называемыми хордовыми диаграммами (см. [11–13]). Хордовая диаграмма строится на $2n$ точках, расположенных равномерно по окружности и пронумерованных числами $1, 2, \dots, 2n$ по кругу; эти точки разбиваются хордами на пары (рис. 1). Говорят, что хорда является петлей, если она соединяет две соседние точки (как хорда $\{1, 2\}$ на рис. 1). Беспетлевая диаграмма — это диаграмма, не содержащая петлей.

В работе [13] была отмечена следующая биекция между гамильтоновыми циклами в n -мерных октаэдрах и беспетлевыми хордовыми диаграммами. Возьмем n -мерный октаэдр с выделенным гамильтоновым циклом (рис. 2(a)) и нарисуем его на плоскости так, чтобы этот цикл образовывал окружность (рис. 2(b)). Теперь удалим все ребра, не относящиеся к гамильтоновому циклу, и добавим ребра, которые в графе отсутствовали (рис. 2(c)). В результате мы получим хордовую диаграмму, которая обязательно является беспетлевой: двигаясь по гамильтонову циклу в исходном графе $K_{2,2,\dots,2}$, мы не можем перейти за один шаг от одной вершины какой-то доли к другой вершине этой же доли. Очевидно, такое преобразование обратимо.

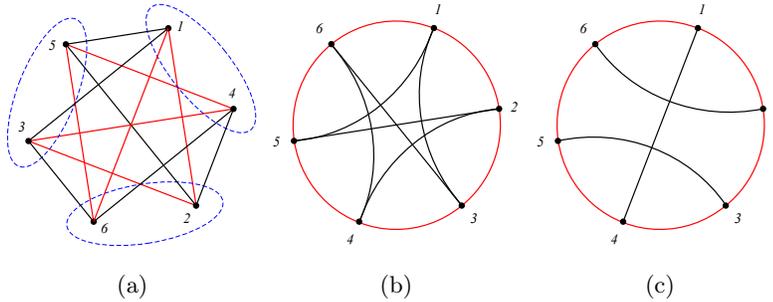


Рис. 2. Соответствие между гамильтоновыми циклами в октаэдрах и хордовыми диаграммами.

В общем случае полного n -дольного графа $K_{d,d,\dots,d}$, любому гамильтоновому циклу в таком графе можно однозначно сопоставить так называемую обобщенную хордовую диаграмму $B_n^{(d)}$, построенную на $n \cdot d$ вершинах (рис. 3(a)). В роли хорд здесь выступают подграфы, изоморфные K_d и соединяющие d точек на такой диаграмме (например, хорда $\{1, 5, 10\}$ на рис. 3(b)). Петлей в обобщенной хордовой диаграмме мы будем считать ребро некоторого подграфа K_d , соединяющее какие-то две соседние точки этой диаграммы. Уточним, что один подграф K_d может задавать несколько петель. Аналогично случаю $d = 2$, гамильтоновому циклу в произвольном графе $K_{d,d,\dots,d}$ будут отвечать обобщенные хордовые диаграммы, в которых должны отсутствовать петли.

В первой части данной статьи мы выводим явную формулу (1), выражающую число $b_n^{(d)}$ беспетлевых хордовых диаграмм $B_n^{(d)}$ в терминах количества $a_{n,k}^{(d)}$ так называемых обобщенных беспетлевых линейных диаграмм. В дополнение к этому, мы получаем рекуррентные соотношения (2)–(3) для этих чисел $a_{n,k}^{(d)}$.

Использование полученных рекуррентных соотношений оказывается вычислительно неэффективным: они представляют собой систему $n \cdot (d - 1)$ уравнений для заданного значения n . Используя дополнительные комбинаторные соображения, мы упрощаем эту систему и получаем систему (9), состоящую лишь из d уравнений.

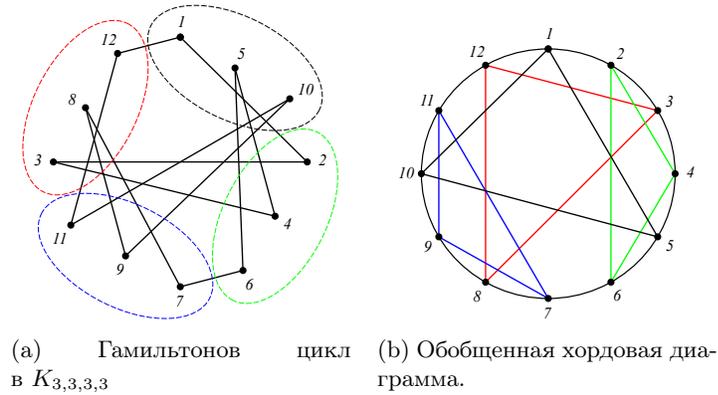


Рис. 3

В зависимости от того, какие диаграммы считать изоморфными, мы можем перечислять их либо с точностью до вращений, либо с точностью до всех симметрий: вращений и отражений. Классы изоморфных диаграмм в обоих случаях называют непомеченными диаграммами. Для непомеченных диаграмм мы получаем системы рекуррентных соотношений, позволяющие перечислить их, а значит, и гамильтоновы циклы в графах $K_{d,d,\dots,d}$, как с точностью до вращений, так и с точностью до всех симметрий.

§2. ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ХОРДОВЫХ ДИАГРАММ $B_n^{(d)}$

Вместо непосредственного перечисления хордовых диаграмм $B_n^{(d)}$ нам будет удобно вначале перечислить обобщенные линейные диаграммы. Для получения линейной диаграммы из хордовой, разрежем обобщенную хордовую диаграмму (рис. 4(a)) по дуге, соединяющей точки 1 и $n \cdot d$ — то есть перестанем считать эти точки соседними (рис. 4(b)). Заметим, что если исходная диаграмма $B_n^{(d)}$ была беспетлевой, то таковой будет и получившаяся линейная диаграмма $A_n^{(d)}$.

Введем числа $a_{n,k}^{(d)}$, равные количеству обобщенных линейных диаграмм $A_{n,k}^{(d)}$, построенных на $d \cdot n$ точках, состоящих из n полных подграфов K_d и имеющих k петель, $0 \leq k \leq n(d-1)$. Покажем, что количество $b_n^{(d)}$ обобщенных хордовых диаграмм без петель выражается

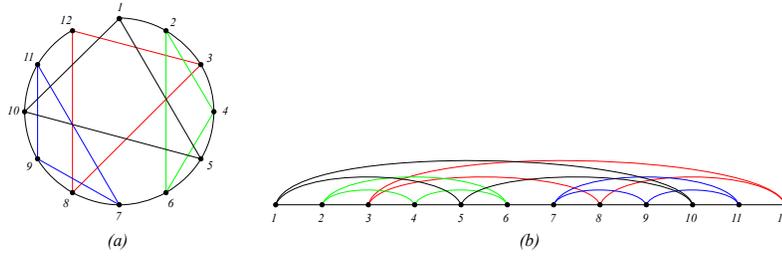


Рис. 4. Хордовая и соответствующая линейная диаграмма.

через числа $a_{n,k}^{(d)}$ по формуле

$$b_n^{(d)} = a_{n,0}^{(d)} - \sum_{k=0}^{d-2} \binom{d(n-1) - k - 1}{d-2-k} a_{n-1,k}^{(d)}. \quad (1)$$

Действительно, среди всех $a_{n,0}^{(d)}$ обобщенных линейных диаграмм $A_{n,0}^{(d)}$ без петель нас интересуют лишь те, у которых первая и последняя точки не соединены между собой дугой. Предположим, что при удалении содержащего такую дугу подграфа K_d в получающейся обобщенной линейной диаграмме образуется k петель. Подсчитаем количество способов получить обобщенную линейную диаграмму $A_{n,0}^{(d)}$ из произвольной обобщенной линейной диаграммы $A_{n-1,k}^{(d)}$. Заметим, что в диаграмме $A_{n-1,k}^{(d)}$ имеется $d(n-1) + 1$ позиций для расстановки вершин подграфа K_d . Нам нужно поставить на первую и последнюю позиции диаграммы по вершине, расставить k из оставшихся $(d-2)$ -х вершин полного подграфа K_d по k петлям, а затем распределить $d-2-k$ оставшихся вершин по оставшимся $d(n-1) - 1 - k$ позициям. Последнее мы можем сделать $\binom{d(n-1)-k-1}{d-2-k}$ количеством способов. Суммируя теперь $\binom{d(n-1)-k-1}{d-2-k} a_{n-1,k}^{(d)}$ по всем возможным k , мы и получаем количество всех возможных диаграмм $A_{n,0}^{(d)}$, у которых первая и последняя вершины соединены между собой дугой.

Итак, для подсчета чисел $b_n^{(d)}$ по формуле (1) нам нужны рекуррентные соотношения на числа $a_{n,k}^{(d)}$, $k = 0, \dots, d-2$. Нам будет легче вначале получить рекуррентные соотношения на числа $a_{n,k}^{(d)}$ для более широких значений параметра k . Именно, покажем, что для $k =$

$0, \dots, n(d-1)$ справедливы соотношения вида

$$a_{n,k}^{(d)} = \sum_{t=k-d+1}^{k+d-1} c_{n,k,t}^{(d)} \cdot a_{n-1,t}^{(d)}, \quad n > 0, \quad 0 \leq k \leq n(d-1), \quad (2)$$

$$c_{n,k,t}^{(d)} = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \binom{t}{t+i-k} \binom{d(n-1)-t}{d-2i-t+k-1}, \quad (3)$$

$$a_{0,0}^{(d)} = 1, \quad a_{n,k}^{(d)} = 0 \quad \text{для } n < 0, k < 0 \text{ и } k > n(d-1).$$

В основе доказательства соотношений (2)–(3) вновь лежит процедура удаления из обобщенной линейной диаграммы $A_{n,k}^{(d)}$ подграфа K_d , содержащего крайнюю правую точку этой диаграммы. Так как при удалении K_d мы можем добавить или удалить как максимум $d-1$ петлю, то после удаления K_d мы получаем некоторую обобщенную линейную диаграмму $A_{n-1,t}^{(d)}$ с t петлями, $t \in [k-(d-1), k+(d-1)]$.

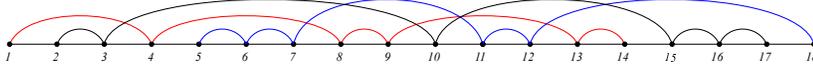


Рис. 5. Обобщенная линейная диаграмма $A_{3,8}^{(6)}$.

В качестве примера на рис. 5 показана обобщенная линейная диаграмма $A_{n,k}^{(d)}$, построенная для случая $n = 3$, $d = 6$ и $k = 8$. Удаление подграфа K_6 , содержащего крайнюю правую вершину 18 этой диаграммы, приводит к появлению обобщенной линейной диаграммы $A_{2,6}^{(6)}$.

Обратно, предположим, что у нас имеется некоторая диаграмма $A_{n-1,t}^{(d)}$. Подсчитаем количество способов сделать из нее диаграмму $A_{n,k}^{(d)}$, добавив к ней полный подграф K_d , содержащий правую точку диаграммы $A_{n-1,t}^{(d)}$. Обозначим через i количество петель, образованных соседними вершинами подграфа K_d при его добавлении к $A_{n-1,t}^{(d)}$ ($i = 3$ для подграфа K_5 , изображенного на рис. 5). Для того, чтобы в диаграмме $A_{n,k}^{(d)}$ после добавления K_d оказалось ровно k петель, нам в процессе добавления K_d нужно уничтожить $t+i-k$ петель ($t+i-k = 1$ для диаграммы $A_{2,6}^{(6)}$), поставив внутрь этих петель вершины подграфа K_d . Наконец, у нас остается $d(n-1)-t$ позиций, на которые мы можем поставить оставшиеся $d-i-1-(t+i-k)$ вершин подграфа K_d

(6 позиций для одной вершины для примера, показанного на рис. 5). Подсчитывая количество способов произвести эти комбинаторные действия, мы и приходим к формулам (2)–(3).

Отметим важные частные случаи соотношений (1)–(3). В случае $d = 2$ формула (1) превращается в формулу

$$b_n^{(2)} = a_n^{(2)} - a_{n-1}^{(2)}, \quad n \geq 2; \quad b_1^{(2)} = 0, \quad (4)$$

а формулы (2)–(3) переходят в

$$\begin{aligned} a_{n+1,k}^{(2)} &= a_{n,k-1}^{(2)} + (2n-k)a_{n,k}^{(2)} + (k+1)a_{n,k+1}^{(2)}, \\ a_{n,k}^{(2)} &= 0 \text{ если } k > n \text{ или } k < 0, \quad a_{0,0}^{(2)} = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Эти результаты согласуются с формулами (1) и (2) в [13]. В случае $d = 3$ выражение для $b_n^{(3)}$ принимает вид

$$b_n^{(3)} = a_{n,0} - (3n-4)a_{n-1,0}^{(3)} + a_{n-1,1}^{(3)},$$

а система (2)–(3) переписывается в виде

$$\begin{aligned} a_{n,k}^{(3)} &= a_{n-1,k-2}^{(3)} + 2(3(n-1) - (k-1))a_{n-1,k-1}^{(3)} \\ &\quad + \left(\binom{3(n-1)-k}{2} + 2k \right) a_{n-1,k}^{(3)} \\ &\quad + (k+1)(3(n-1) - (k+1))a_{n-1,k+1}^{(3)} + \binom{k+2}{2} a_{n-1,k+2}^{(3)}. \end{aligned}$$

§3. ЗАМКНУТАЯ СИСТЕМА ИЗ d РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ НА ЧИСЛА $a_{n,k}^{(d)}$

Как мы уже отмечали выше, рекуррентные соотношения (2)–(3), в принципе, позволяют получить нужные нам для вычисления $b_n^{(d)}$ значения параметров $a_{n,i}^{(d)}$, $i = 0, \dots, d-2$. Однако с вычислительной точки зрения этот подход является не самым лучшим – оптимальным вариантом для нас является получение системы соотношений только лишь для тех значений $a_{n,k}^{(d)}$, которые фигурируют в формуле (1). В случае $d = 2$ изложенный в [13] подход состоял в следующем: система (2)–(3) переписывалась на языке производящих функций, для последовательности $a_{n,k}^{(2)}$ получалась производящая функция $w(z, t)$, в нее подставлялось значение $z = 0$, и полученная в результате такой

подстановки производящая функция $\phi(t) = w(z, 0)$ описывала числа $a_{n,0}^{(2)} \equiv a_n^{(2)}$, необходимые для подсчета чисел $b_n^{(2)}$. Однако в случае $d > 2$ такой подход уже не работает. Альтернативный вариант состоит в попытке комбинаторного вывода требуемой системы рекуррентных соотношений. Такой вариант прекрасно работает в случае $d = 2$ (см. работы [12], [13]). Однако уже в случае $d = 3$ соответствующие комбинаторные рассуждения оказываются довольно громоздкими, а в случае $d > 3$ подобная задача оказывается практически невыполнимой.

Оказывается, однако, что в рассматриваемой задаче проходит смешанный вариант – использовать наряду с комбинаторными рассуждениями полученные выше рекуррентные соотношения (2)–(3) на числа $a_{n,k}^{(d)}$. При этом в результате мы можем получить замкнутую систему рекуррентных соотношений на числа $a_{n,k}^{(d)}$, $k = 0, \dots, d-1$, число которых лишь на единицу превосходит количество $a_{n,k}^{(d)}$, входящих в формулу (1). Именно, подставляя в формулу (2) значение $k = 0$, получаем рекуррентное соотношение вида

$$a_{n,0}^{(d)} = \sum_{t=0}^{d-1} c_{n,0,t}^{(d)} \cdot a_{n-1,t}^{(d)}. \quad (6)$$

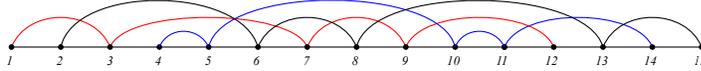


Рис. 6. Обобщенная линейная диаграмма $A_{3,2}^{(5)}$.

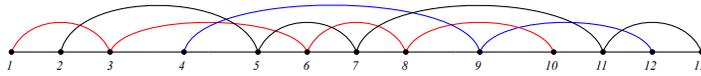


Рис. 7. Редуцированная линейная диаграмма.

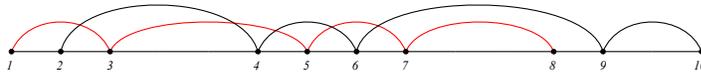


Рис. 8. Обобщенная линейная диаграмма $A_{2,2}^{(5)}$.

Для значений параметра k от 1 до $d-1$ соотношения для $a_{n,k}^{(d)}$ мы можем получить, используя комбинаторные рассуждения. Именно, рассмотрим произвольную обобщенную линейную диаграмму $A_{n,k}^{(d)}$, в которой k петель распределены по l подграфам, $1 \leq l \leq k < d$, изоморфным K_d . Разберемся вначале с простейшим случаем $l = 1$, при котором все k петель образованы одним подграфом K_d (рис. 6, на котором соответствующий подграф K_3 показан синим цветом).

Стягивая петли, мы из K_d получаем подграф K_{d-k} в редуцированной линейной диаграмме без петель (рис. 7). Удаляя такой подграф, мы получаем обобщенную линейную диаграмму $A_{n-1,m}^{(d)}$ с m петлями, $0 \leq m \leq d-k$ (см. рис. 8, отвечающий случаю $m = 2$). Обратное, возьмем диаграмму $A_{n-1,m}^{(d)}$ и поставим под m петлями по вершине подграфа K_{d-k} . Оставшиеся $d-k-m$ вершин подграфа K_{d-k} мы должны расставить на $d(n-1) + 1 - m$ позиций количеством способов, равным $\binom{d(n-1)+1-m}{d-k-m}$. Наконец, $d-k$ вершин подграфа K_{d-k} мы должны превратить в подграф K_d , заменив некоторые вершины одной или несколькими петлями — эта операция описывается числом сочетаний с повторениями $\binom{d-k}{k} = \binom{d-1}{k}$. Суммируя по всем m от 0 до $d-k$, получаем, что в случае $l = 1$ числа $a_{n,k,l=1}^{(d)}$ рассчитываются по формулам

$$a_{n,k,l=1}^{(d)} = \binom{d-1}{k} \sum_{m=0}^{d-k} \binom{d(n-1)+1-m}{d-k-m} a_{n-1,m}^{(d)}, \quad k = 1, \dots, d-1. \quad (7)$$

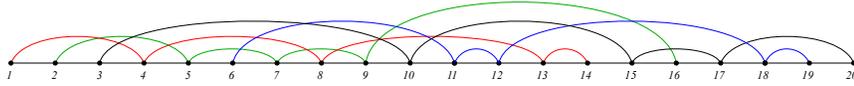


Рис. 9. Обобщенная линейная диаграмма $A_{4,3}^{(5)}$.

В случае $l > 1$ рассуждения становятся несколько сложнее. Действительно, пусть $d-r_i$, $i = 1, \dots, l$, есть количество петель в диаграмме $A_{n,k}^{(d)}$, принадлежащих i -му подграфу K_d , причем

$$\sum_{i=1}^l (d-r_i) = k, \quad 1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_l \quad (8)$$

(см. рис. 9, на котором изображена диаграмма $A_{4,3}^{(5)}$ с $l = 2$, $r_1 = 3$, $r_2 = 4$).

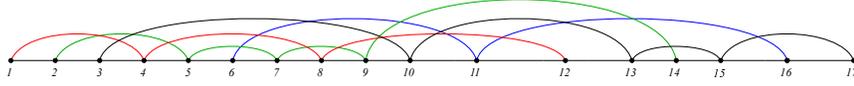


Рис. 10. Редуцированная линейная диаграмма.

Стягивая каждую из этих петель в точку, мы получаем редуцированную линейную диаграмму, в которой имеется $n - l$ подграфов K_d , а также l подграфов K_{r_i} (рис. 10).

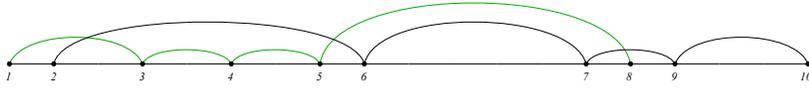


Рис. 11. Обобщенная линейная диаграмма $A_{2,4}^{(5)}$.

Предположим, что после удаления подграфов K_{r_i} у нас образовалась обобщенная линейная диаграмма $A_{n-l,m}^{(d)}$, $m = 0, \dots, ld - k$ (см. рис. 11, соответствующий диаграмме $A_{2,4}^{(5)}$). Посмотрим, сколько диаграмм $A_{n,k}^{(d)}$ с k петлями, распределенными по l подграфам K_{r_i} , можно получить из одной такой диаграммы $A_{n-l,m}^{(d)}$.

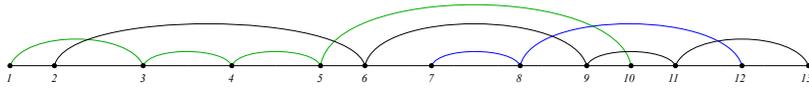


Рис. 12. Обобщенная линейная диаграмма $A_{2,4}^{(5)}$ с добавленным подграфом K_{r_1} .

Для этого возьмем диаграмму $A_{n-l,m_1}^{(d)}$, $m_1 \equiv m$, и добавим к ней в начале подграф K_{r_1} (рис. 12). В результате добавления такого подграфа часть имеющихся петель может оказаться разрушена вершинами подграфа K_{r_1} . Кроме того, в диаграмме могут появиться дополнительные петли, образованные соседними вершинами подграфа K_{r_1} .

Обозначим через s_1 число петель, которые будут разрушены подграфом K_{r_1} , а через j_1 – количество дополнительных собственных петель, образованных вершинами K_{r_1} ($s_1 = 2, j_1 = 1$ для диаграммы, показанной на рис. 12).

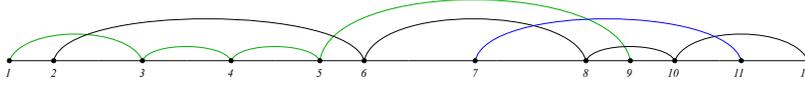


Рис. 13. Обобщенная линейная диаграмма $A_{2,4}^{(5)}$ с добавленным редуцированным подграфом K_{t_1} .

Рассмотрим тогда вместо K_{r_1} подграф K_{t_1} , $t_1 = r_1 - j_1$, полученный схопыванием j_1 собственных петель подграфа K_{r_1} (рис. 13). Поместить K_{t_1} на исходную диаграмму $A_{n-l,m_1}^{(d)}$ так, чтобы s_1 вершин подграфа K_{t_1} попало в петли диаграммы $A_{n-l,m_1}^{(d)}$, а оставшиеся $t_1 - s_1$ вершин распределились по $v_1 - m_1$ позициям, $v_1 := d(n - l) + 1$, свободным от петель, можно $\binom{m_1}{s_1} \binom{v_1 - m_1}{t_1 - s_1}$ количеством способов. Наконец, расщепить t_1 вершин подграфа K_{t_1} на r_1 вершин так, чтобы вершины получившегося подграфа K_{r_1} образовали на диаграмме j_1 дополнительных собственных петель, можно количеством способов, равным $\binom{t_1}{j_1} = \binom{r_1 - j_1}{j_1} = \binom{r_1 - 1}{j_1}$. Полученное на первом шаге количество способов

$$\binom{m_1}{s_1} \binom{v_1 - m_1}{r_1 - j_1 - s_1} \binom{r_1 - 1}{j_1}$$

нужно умножить на число

$$\binom{m_2}{s_2} \binom{v_2 - m_2}{r_2 - j_2 - s_2} \binom{r_2 - 1}{j_2}$$

способов добавить на $v_2 := v_1 + r_1$ позиций подграф K_{r_2} так, чтобы разрушить s_2 петлю линейной диаграммы с $m_2 = m_1 + j_1 - s_1$ петлями и добавить j_2 собственных петель.

Продолжая этот процесс далее, мы дойдем до последнего шага, на котором нам нужно будет к линейной диаграмме добавить подграф K_{r_l} . Особенность этого шага состоит в том, что после его добавления петли в диаграмме должны отсутствовать – напомним, что после добавления подграфов K_{r_1}, \dots, K_{r_l} мы должны получить редуцированную линейную диаграмму без петель (см. рис. 10). Как следствие,

на последнем шаге мы должны разрушить все петли, образовавшиеся на предпоследнем шаге (то есть положить $m_l = s_l$). Кроме того, и у самого подграфа K_{r_l} не должно быть никаких собственных петель (то есть $j_l = 0$).

С учетом сказанного выше мы можем окончательно записать следующую формулу для подсчета чисел $a_{n,k}^{(d)}$ в случае $l > 1$:

$$a_{n,k,l>1}^{(d)} = \sum_R \frac{\alpha_R}{\beta_1! \cdot \dots \cdot \beta_{d-1}!} \sum_{m=0}^{ld-k} p_{n,R,m} \cdot a_{n-l,m}^{(d)}. \quad (9)$$

Здесь R представляет собой упорядоченное мультимножество $\{r_1, \dots, r_l\}$, удовлетворяющее условиям (8), внешнее суммирование проходит по всем таким мультимножествам R ,

$$p_{n,R,m} := \sum_{j_1=0}^{r_1-1} \dots \sum_{j_{l-1}=0}^{r_{l-1}-1} \sum_{s_1=0}^{\min\{m_1, r_1-j_1\}} \dots \sum_{s_{l-1}=0}^{\min\{m_{l-1}, r_{l-1}-j_{l-1}\}} \prod_{i=1}^{l-1} \binom{m_i}{s_i} \binom{v_i - m_i}{r_i - j_i - s_i} \binom{r_i - 1}{j_i} \binom{v_l - m_l}{r_l - m_l},$$

$$m_{i+1} := m_i + j_i - s_i, \quad v_{i+1} := v_i + r_i, \quad i > 1; \quad m_1 := m, \quad v_1 := d(n-l) + 1,$$

$$\alpha_R := \prod_{i=1}^l \binom{r_i}{d - r_i} = \prod_{i=1}^l \binom{d-1}{r_i - 1}.$$

Сомножитель α_R в формуле (9) описывает количество способов превратить подграфы K_{r_i} в подграфы K_d . Коэффициент $1/(\beta_1! \cdot \dots \cdot \beta_{d-1}!)$ учитывает тот факт, что мы добавляем подграфы K_{r_i} не одновременно, а по порядку, то есть различаем все клики K_{r_i} с одинаковым числом петель. Как следствие, если мы имеем β_u экземпляров подграфов K_u среди всех клик K_{r_i} , то нам нужно поделить результат на $\beta_u!$.

Заметим, наконец, что в случае $l > 1$ в формуле (9) для $a_{n,k}^{(d)}$ появляются числа $a_{n-l,m}^{(d)}$, у которых $m \geq d$. Эти числа, однако, мы всегда можем последовательно исключить с помощью рекуррентного соотношения (2), переписанного в форме

$$a_{n-1,k+d-1}^{(d)} = \frac{a_{n,k}^{(d)} - \sum_{t=k-d+1}^{k+d-2} c_{n,k,t}^{(d)} \cdot a_{n-1,t}^{(d)}}{c_{n,k,k+d-1}^{(d)}}. \quad (10)$$

Так, например, подставляя в (10) вместо n значение $n - 1$, можно выразить числа $a_{n-2,d}^{(d)}$, $a_{n-2,d+1}^{(d)}$ и т.д. через числа $a_{n-1,k}^{(d)}$ и $a_{n-2,m}^{(d)}$, $0 \leq k, m \leq d - 1$. Затем аналогично можно будет выразить числа $a_{n-3,m}^{(d)}$, $a_{n-4,m}^{(d)}$ и т.д. вплоть до чисел $a_{n-1,m}^{(d)}$.

Проиллюстрируем описанный выше подход для частных случаев $d = 2$ и $d = 3$. Подставляя в формулу (6) значение $d = 2$, получаем рекуррентное соотношение вида

$$a_{n,0}^{(2)} = (2n - 2)a_{n-1,0}^{(2)} + a_{n-1,1}^{(2)}.$$

Как видно, в это соотношение наряду с $a_{n,0}^{(2)}$ вошли и числа $a_{n,1}^{(2)}$, описывающие количество $A_{n,1}^{(2)}$ линейных диаграмм с одной петлей. Для этих чисел мы можем использовать рекуррентное соотношение (7). Подставляя в него значения $k = 1$, $d = 2$, имеем

$$a_{n,1}^{(2)} = (2n - 1)a_{n-1,0}^{(2)} + a_{n-1,1}^{(2)}.$$

Выражая из полученных рекуррентных соотношений числа $a_{n,1}^{(2)}$, получаем известное рекуррентное соотношение второго порядка

$$a_{n+1,0}^{(2)} = (2n + 1)a_{n,0}^{(2)} + a_{n-1,0}^{(2)}; \quad a_{0,0}^{(2)} = 1, \quad a_{1,0}^{(2)} = 0$$

для количества беспетлевых линейных диаграмм.

Теперь рассмотрим чуть более содержательный пример $d = 3$. Подставляя в формулу (6) значение $d = 3$, имеем

$$a_{n,0}^{(3)} = \binom{3n-3}{2} a_{n-1,0}^{(3)} + (3n-4) a_{n-1,1}^{(3)} + a_{n-1,2}^{(3)}.$$

Соотношение для чисел $a_{n,1}^{(3)}$, а также рекуррентное соотношение для чисел $a_{n,2}^{(3)}$, отвечающее случаю, когда обе петли принадлежат одному и тому же подграфу K_3 , мы получаем из формулы (7):

$$a_{n,1}^{(3)} = 2 \left(\binom{3n-2}{2} a_{n-1,0}^{(3)} + (3n-3) a_{n-1,1}^{(3)} + a_{n-1,2}^{(3)} \right),$$

$$a_{n,2,l=1}^{(3)} = (3n-2) a_{n-1,0}^{(3)} + a_{n-1,1}^{(3)}.$$

Однако в данном случае, в отличие от случая $d = 2$, возможен вариант, при котором две петли в диаграмме $A_{n,2}^{(3)}$ относятся к двум различным подграфам K_3 . Для подсчета количества таких диаграмм нам следует воспользоваться формулой (9). В рассматриваемом частном случае

имеем

$$l = 2, \quad R = \{r_1, r_2\} = \{2, 2\}, \quad \alpha_R = 2 \cdot 2, \quad \beta_2 = 2!, \quad j_1 = j_2 = 1,$$

поэтому

$$a_{n,2,l=2}^{(3)} = \frac{2 \cdot 2}{2!} \sum_{m=0}^4 \sum_{j=0}^1 \sum_{s=0}^{\min(m, 2-j)} \binom{m}{s} \binom{3(n-2) + 1 - m}{2 - j - s} \times \binom{3(n-2) + 3 - m - j + s}{2 - m - j + s} a_{n-2,m}^{(3)}.$$

При этом входящие в последнюю формулу числа $a_{n-2,3}^{(3)}$ и $a_{n-2,4}^{(3)}$ выражаются через $a_{n-1,i}^{(3)}$ и $a_{n-2,j}^{(3)}$ с помощью соотношения (10):

$$a_{n-2,3}^{(3)} = \frac{a_{n-1,1}^{(3)} - \sum_{t=0}^2 c_{n-1,1,t}^{(3)} \cdot a_{n-2,t}^{(3)}}{c_{n-1,3,3}^{(3)}},$$

$$a_{n-2,4}^{(3)} = \frac{a_{n-1,2}^{(3)} - \sum_{t=0}^3 c_{n-1,2,t}^{(3)} \cdot a_{n-2,t}^{(3)}}{c_{n-1,2,4}^{(3)}}.$$

Полученную систему рекуррентных соотношений для случая $d = 3$ можно упростить, сведя ее к системе вида

$$\begin{aligned} a_{n,0}^{(3)} &= \binom{3n-3}{2} a_{n-1,0}^{(3)} + (3n-4)a_{n-1,1}^{(3)} + a_{n-1,2}^{(3)}, & a_{0,0}^{(3)} &= 1, & a_{1,0}^{(3)} &= 0; \\ a_{n,1}^{(3)} &= 2a_{n,0}^{(3)} + 2(3n-3)a_{n-1,0}^{(3)} + 2a_{n-1,1}^{(3)}, & a_{0,1}^{(3)} &= 0, & a_{1,1}^{(3)} &= 0; \\ a_{n,2}^{(3)} &= 2a_{n,0}^{(3)} + (9n-10)a_{n-1,0}^{(3)} + 5a_{n-1,1}^{(3)} + 2a_{n-2,0}^{(3)}, & a_{0,2}^{(3)} &= 0, & a_{1,2}^{(3)} &= 1. \end{aligned}$$

§4. ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ НЕПОМЕЧЕННЫХ ОБОБЩЕННЫХ ХОРДОВЫХ ДИАГРАММ

В этой части мы кратко изложим результаты, относящиеся к задаче перечисления гамильтоновых циклов в непомеченных графах $K_{d,d,\dots,d}$,

а точнее, к эквивалентной ей задаче перечисления непомеченных обобщенных хордовых диаграмм без петель. Количество $\widehat{b}_n^{(d)}$ таких диаграмм можно рассчитать с помощью леммы Бернсайда

$$\widehat{b}_n^{(d)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|. \quad (11)$$

Здесь $|\text{Fix}(g)|$ есть число помеченных диаграмм, остающихся неподвижными под действием элемента g группы G , которая задаёт на множестве диаграмм отношение изоморфизма. В нашем случае G будет либо циклической группой $C_{d \cdot n}$ вращений окружности с $d \cdot n$ точками, либо диэдральной группой $D_{d \cdot n}$ вращений и отражений.

Начнём с более простого случая циклической группы. Обозначим количество обобщённых хордовых диаграмм с $d \cdot n$ точками и n хордами через $\widetilde{b}_n^{(d)}$ и рассмотрим действие группы $C_{d \cdot n}$ на множестве таких диаграмм. Пусть m делитель $d \cdot n$, $\phi(m)$ — функция Эйлера. Всего в группе $C_{d \cdot n}$ есть ровно $\phi(m)$ элементов порядка m . Любой такой элемент оставляет неподвижными одинаковое число $f(d \cdot n, m)$ диаграмм. Назовём такие диаграммы m -симметричными. С учётом этого (11) можно переписать как

$$\widetilde{b}_n^{(d)} = \frac{1}{d \cdot n} \sum_{m | d \cdot n} \phi(m) f(d \cdot n, m). \quad (12)$$

Для подсчета чисел $f(d \cdot n, m)$ нам будет удобно перейти от m -симметричных обобщенных хордовых диаграмм к так называемым m -симметричным линейным диаграммам (рис. 14). Такие диаграммы на $d \cdot n$ точках получаются разрезанием окружности m -симметричной хордовой диаграммы на m дуг. На каждой дуге остается $v := d \cdot n / m$ точек: разрезы проводятся между точками v и $v + 1$, $2v$ и $2v + 1$, \dots , $m \cdot v$ и 1 . Как и ранее, разрез между точками i и $i + 1$ означает, что эти точки более не являются соседними, и наличие хорды, соединяющей их, не нарушает свойство диаграммы быть беспетлевой.

Заметим, что 1-симметричные линейные диаграммы — это рассмотренные ранее «обыкновенные» линейные диаграммы.

Обозначим через $A_{v,k}^{(m,d)}$ множество обобщенных m -симметричных линейных диаграмм, имеющих ровно k петель в каждом из m секторов.

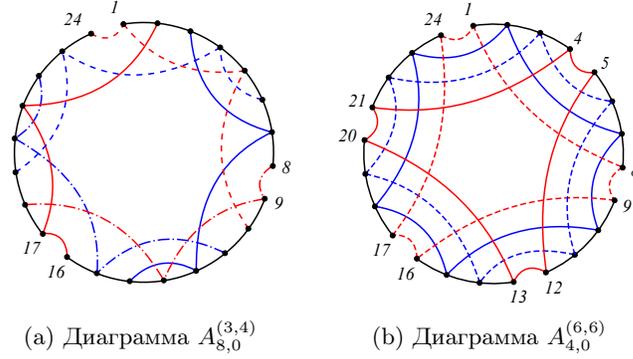


Рис. 14

Лемма 4.1. Числа $a_{v,k}^{(m,d)}$ обобщенных m -симметричных линейных диаграмм $A_{v,k}^{(m,d)}$ могут быть получены с помощью следующей системы рекуррентных соотношений:

$$a_{v,k}^{(m,d)} = \sum_{l|\gcd(m,d)} \sum_{t=k-d/l+1}^{k+d/l-1} c_{v,k,t}^{(m/l,d/l)} \cdot a_{v-d/l,t}^{(m,d)}, \quad (13)$$

$$a_{v,k} = 0 \text{ при } v \leq 0 \text{ или } k < 0, \text{ кроме } a_{0,0}^{(m,d)} = 1,$$

где

$$c_{v,k,t}^{(m,d)} = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \cdot \binom{t}{t+i-k} \cdot \frac{m^{t+i-k}}{\widehat{v}!} \cdot \widehat{p}_{\widehat{v}}^{(m,v-d-t,t+i-k)}, \quad (14)$$

$$\widehat{v} := d - 2i - t + k - 1,$$

$$\widehat{p}_k^{(m,v,l)} = \sum_{i=0}^k (-1)^i \cdot \frac{k!}{(k-i)!} \cdot q_{0,k-i}^{(m,v,l)} \text{ если } v \geq 0, l \geq 0;$$

$$\widehat{p}_k^{(m,v,l)} = 0 \text{ иначе,}$$

а числа $q_{k,t}^{(m,v,l)}$ выражаются из следующего рекуррентного соотношения:

$$\begin{aligned}
 q_{k,t}^{(m,v,l)} &= (2k-1+l-t)q_{k-1,t-1}^{(m,v,l)} + (t+1)(m-1)q_{k-1,t+1}^{(m,v,l)} \\
 &\quad + (m(v+k)+l(m-1)-(2k-2-t)-t(m-1))q_{k-1,t}^{(m,v,l)}, \\
 q_{0,0}^{(m,v,l)} &= 1, \quad q_{0,t}^{(m,v,l)} = 0 \text{ для } t \neq 0, \\
 q_{k,t}^{(m,v,l)} &= 0 \text{ для } k < 0 \text{ или } t < 0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Теорема 4.2. Числа $f(d \cdot n, m)$ могут быть выражены в терминах чисел $a_{v,k}^{(m,d)}$ обобщенных m -симметричных линейных диаграмм $A_{v,k}^{(m,d)}$ по формуле

$$\begin{aligned}
 f(d \cdot n, m) &= a_{v,0}^{(m,d)} - \sum_{l|\gcd(m,d)} \sum_{k=0}^{l-2} \frac{(m/l)^k}{(d/l-2-k)!} \\
 &\quad \times \tilde{p}_{d/l-2-k}^{(m/l, v-d/l-k, k)} \cdot a_{v-d/l, k}^{(m,d)}, \quad v := \frac{dn}{m},
 \end{aligned} \tag{16}$$

где

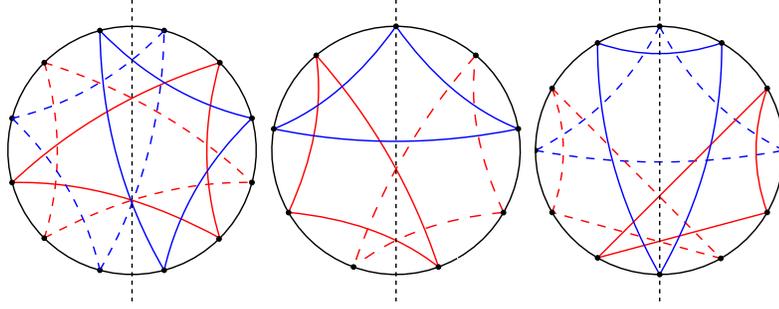
$$\tilde{p}_k^{(m,v,l)} = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} (-1)^{i+j} \cdot \frac{k!}{(k-i-j)!} \cdot q_{0, k-i-j}^{(m,v,l)}.$$

Доказательства этих утверждений принципиально не отличаются от доказательств, представленных в предыдущих частях, но при этом являются достаточно громоздкими. Мы опускаем их в этой статье.

Далее перейдем к задаче перечисления неизоморфных диаграмм под действием диэдральной группы $D_{d \cdot n}$. Обозначим количество обобщённых хордовых диаграмм с $d \cdot n$ точками и n хордами через $\bar{b}_n^{(d)}$. Лемма Бернсайда для данного случая может быть переписана как

$$\bar{b}_n^{(d)} = \frac{1}{2dn} \sum_{m|dn} \phi(m) f(dn, m) + \frac{h^{(0)}(n) + 2h^{(1)}(n) + h^{(2)}(n)}{2}, \tag{17}$$

где через $h^{(i)}(n)$ обозначено число хордовых диаграмм, симметричных относительно отражения, ось которого проходит через i точек диаграммы, и содержащих n подграфов K_d (см. рис. 15). Следующие результаты, посвященные получению формул для $h^{(i)}(n)$, $i = 0, 1, 2$, мы также приводим без доказательства.



(а) Диаграмма $H^{(0)}(4)$ (б) Диаграмма $H^{(1)}(3)$ (с) Диаграмма $H^{(2)}(4)$

Рис. 15

Теорема 4.3. Числа $h^{(0)}(n)$ при нечетном d совпадают с числами $a_{dn/2,0}^{(2,d)}$, а в случае четного d вычисляются по формулам

$$h^{(0)}(n) = a_{dn/2,0}^{(2,d)} - 2 \sum_{k=0}^{d/2-1} \alpha_k^{(1)} \cdot a_{d(n-1)/2,k}^{(2,d)} + \sum_{k=0}^{d-2} \alpha_k^{(2)} \cdot a_{d(n-2)/2,k}^{(2,d)} - \sum_{k=0}^{d/2-2} \alpha_k^{(3)} \cdot a_{d(n-2)/2,k}^{(2,d)},$$

где

$$\alpha_k^{(1)} := \binom{(n-1)d/2 - 1 - k}{d/2 - 1 - k},$$

$$\alpha_k^{(3)} := \binom{(n-1)d/2 - 1 - k}{d/2 - 2 - k},$$

$$\alpha_k^{(2)} := \sum_{j=0}^{d/2-1} \sum_{s=0}^{\min(k, d/2-1-j)} \binom{d/2-1}{j} \cdot \binom{k}{s} \cdot \binom{(n-2)d/2 - k}{d/2-1-j-s} \times \binom{(n-1)d/2 - 1 - (k+j-s)}{d/2-1-(k+j-s)}.$$

Теорема 4.4. Числа $h^{(1)}(n)$ выражаются через числа $a_{(n-1)d/2,k}^{(2,d)}$ по формуле

$$h^{(1)}(n) = \sum_{k=0}^{(d-1)/2} \binom{(n-1)d/2 - 1 - k}{(d-1)/2 - k} \cdot a_{(n-1)d/2,k}^{(2,d)}.$$

Теорема 4.5. Числа $h^{(2)}(n)$ в случае четного d могут быть получены по формуле

$$h^{(2)}(n) = \sum_{k=0}^{d/2-1} \alpha_k^{(1)} \cdot a_{(n-1)d/2,k}^{(2,d)}.$$

Для нечетного d числа $h^{(2)}(n)$ могут быть отличны от 0 только если n четно; в этом случае они равны

$$h^{(2)}(n) = \sum_{k=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{(d-1)/2} \sum_{s=0}^{\min(k, (d-1)/2-j)} \binom{(d-1)/2}{j} \binom{k}{s} \times \binom{(n-2)d/2 - k}{(d-1)/2 - j - s} \binom{(n-1)d/2 - 1 - (k+j-s)}{(d-1)/2 - (k+j-s)} \cdot a_{(n-2)d/2,k}^{(2,d)}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Окончательные результаты расчётов количества хордовых диаграмм и соответствующих им гамильтоновых циклов приведены в таблицах 1–4.

Таблица 1. Беспетлевые диаграммы по числу n графов K_3

n	Линейные, $a_n^{(3)}$	Хордовые помеченные, $b_n^{(3)}$	Непомеченные, $\tilde{b}_n^{(3)}$	Непомеченные, $\bar{b}_n^{(3)}$
1	0	0	0	0
2	1	1	1	1
3	29	22	4	4
4	1721	1415	126	83
5	163386	140343	9367	4848
6	22831355	20167651	1120780	562713
7	4420321081	3980871156	189565588	94810999
8	1133879136649	1035707510307	43154533233	21577786374
9	372419001449076	343866839138005	12735808866899	6367912802891
10	152466248712342181	141979144588872613	4732638168795171	2366319275431001
11	76134462292157828285	71386289535825383386	2163220895025390670	1081610451348718567
12	45552714996556390334921	42954342000612934599071	1193176166690983987122	596588083450068950934
13	32173493282909179882613934	30482693813120122213093587	781607533669746761791541	390803766837390136477505

Таблица 2. Беспетлевые диаграммы по числу n графов K_4

n	Линейные, $a_n^{(4)}$	Хордовые помеченные, $b_n^{(4)}$	Непомеченные, $\tilde{b}_n^{(4)}$	Непомеченные, $\bar{b}_n^{(4)}$
1	0	0	0	0
2	1	1	1	1
3	182	134	15	13
4	94376	75843	4790	2576
5	98371884	83002866	4151415	2081393
6	182502973885	158861646466	6619291247	3309962320
7	551248360550999	490294453324924	17510518983528	8755277273334
8	2536823683737613858	2292204611710892971	71631394311300461	35815698613833466
9	16904301142107043464659	15459367618357013402267	429426878302882412435	214713439275724149414
10	156690501089429126239232946	144663877588996810362218074	3616596939726424941979785	1808298469877117320495867

Таблица 3. Беспетлевые диаграммы по числу n графов K_5

n	Линейные, $a_n^{(5)}$	Хордовые помеченные, $b_n^{(5)}$	Непомеченные, $\tilde{b}_n^{(5)}$	Непомеченные, $\bar{b}_n^{(5)}$
1	0	0	0	0
2	1	1	1	1
3	1198	866	60	42
4	5609649	4446741	222477	112418
5	66218360625	55279816356	2211192688	1105696796
6	1681287695542855	1450728060971387	48357603758012	24178822553773
7	81644850343968535401	72078730629785795963	2059392303708166507	1029696155560021174
8	6945222145021508480249929	6235048155225093080061949	155876203880714141444480	77938101941693076258854

n	Линейные, $a_n^{(6)}$	Хордовые помеченные, $b_n^{(6)}$	Непомеченные, $\tilde{b}_n^{(6)}$	Непомеченные, $\bar{b}_n^{(6)}$
1	0	0	0	0
2	1	1	1	1
3	8142	5812	335	203
4	351574834	276154969	11508322	5765385
5	47940557125969	39738077935264	1324603148183	662305416760
6	16985819072511102549	14571371516350429940	404760320241653655	202380163158922023
7	13519747358522016160671387	11876790400066163254723167	282780723811372935744420	141390361908351519807928

Таблица 4. Беспетлевые диаграммы по числу n графов K_6

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. B. Nienhuis, *Exact critical point and critical exponents of $O(n)$ models in two dimensions*. — Phys. Rev. Lett. **49** (1982), 1062.
2. K. A. Dill, *Polymer principles and protein folding*. — Protein Sci. **8**, No. 6 (1999), 1166–80.
3. O. Bodroža-Pantić, B. Pantić, I. Pantić, M. Bodroža-Solarov, *Enumeration of Hamiltonian cycles in some grid graphs*. — Commun. Math. Comput. Chem. **70** (2013), 181–204.
4. E. Wynn, *Enumeration of nonisomorphic Hamiltonian cycles on square grid graphs*. Preprint [arXiv:1402.0545](https://arxiv.org/abs/1402.0545) [math.CO], 2014.
5. J. L. Jacobsen, *Exact enumeration of Hamiltonian circuits, walks and chains in two and three dimensions*. — J. Phys. A: Math. Theor. **40**, 14667.
6. C. Thomassen, *On the number of Hamiltonian cycles in bipartite graphs*. — Combinatorics, Probability and Computing **5** (1996), 437–442.
7. N. Alon, *The maximum number of Hamiltonian paths in tournaments*. — Combinatorica **10**, No. 4 (1990), 319–324.
8. Endre Szemerédi, G. N. Sarkozya, S. M. Selkova, *On the number of Hamiltonian cycles in Dirac graphs*. — Discrete Mathematics **265** (2003), 237–250.
9. A. J. Schwenk, *Enumeration of Hamiltonian cycles in certain generalized Petersen graphs*. — J. Combin. Theory Ser. B **47** (1989), 53–59.
10. E. Dixon, S. Goodman, *On the number of Hamiltonian circuits in the n -cube*. — Proceedings of the American Mathematical Society **50** (1975), 500–504.
11. D. Singmaster, *Hamiltonian circuits on the n -dimensional octahedron*. — J. Combin. Theory, Ser. B **19**, No. 1 (1975), 1–4.
12. M. Hazewinkel, V. V. Kalashnikov, *Counting Interlacing Pairs on the Circle*. Department of Analysis, Algebra and Geometry: Report AM. Stichting Mathematisch Centrum, 1995.
13. A. V. Omelchenko, E. S. Krasko, *Enumeration of chord diagrams without loops and parallel chords*. — The Electronic Journal of Combinatorics **24**, No. 3 (2017), P3.43.
14. R. J. Mathar, *A class of multinomial permutations avoiding object clusters*. [viXra:1511.0015](https://arxiv.org/abs/1511.0015).

Krasko E. S., Labutin I. N., Omelchenko A. V. Enumeration of labelled and unlabelled Hamiltonian cycles in complete k -partite graphs.

We enumerate labelled and unlabelled Hamiltonian cycles in complete n -partite graphs $K_{d,d,\dots,d}$ having exactly d vertices in each part (in other words, Turán graphs $T(nd, n)$). We obtain recurrence relations that allow us to find the exact values $b_n^{(d)}$ of such cycles for arbitrary n and d .

Национальный
исследовательский университет
“Высшая школа экономики”;
С.-Петербург, 190008, Россия

Поступило 18 ноября 2019 г.

E-mail: krasko.evgeniy, labutin.igor1, avo.travel@gmail.com