Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 488, 2019 г.

К. П. Кохась, А. С. Латышев, В. И. Ретинский

КЛИКИ И КОНСТРУКТОРЫ В ИГРЕ «HATS». II

§1. Введение

Игра "Hats" – это интересная математическая задача, которая привлекает внимание множества математиков в течение многих лет. В классическом варианте задачи рассматривают группу из $n \geqslant 2$ игроков (мудрецов), каждому из которых надевают шляпу одного из n различных цветов. Каждый мудрец видит шляпы остальных мудрецов, но не видит своей, и, основываясь на этой информации, делает попытку угадать цвет надетой на него шляпы. Цель мудрецов – гарантировать, что хотя бы один из них угадает свой цвет вне зависимости от расклада шляп. Мудрецам разрешено обсудить и зафиксировать стратегию до назначения шляп. После назначения любое общение запрещено. После того как все мудрецы одновременно высказали свои догадки, проверяется условие выигрыша: правда ли, что хотя бы один из мудрецов угадал. Вопрос задачи: могут ли мудрецы гарантировать себе выигрыш?

Ответ на вопрос – "да!" – обосновывается довольно изящно. Пронумеруем мудрецов, цвета шляп отождествим с остатками по модулю n. Каждый мудрец видит все шляпы, кроме своей. Пусть i-й мудрец назовет остаток, исходя из гипотезы, что сумма всех цветов, включая его собственный, по модулю n сравнима с i. Ясно, что вне зависимости от расклада шляп гипотеза ровно одного мудреца будет истинна, а значит, он угадает цвет своей шляпы.

Естественным обобщением этой задачи является игра, в которой мудрецы находятся в вершинах некоторого графа – "графа видимости", мудрец i видит цвет шляпы мудреца j тогда и только тогда, когда в графе есть ребро между вершинами i и j. Такое обобщение было впервые представлено в работе [1] и в дальнейшем исследовалось в ряде работ [2–4]. В своей диссертации [5] М. Фарник определил $HG(G)$ как максимальное количество цветов шляп, при котором мудрецы могут гарантировать себе победу. Он получил некоторые оценки на $HG(G)$,

Ключевые слова: игра, граф, детерминированная стратегия, угадывание цвета шляпы.

выраженные в терминах максимальной степени в графе и хроматического числа графа. В статье [6] Н. Алон и др. изучали $HG(G)$ для некоторых классов графов, используя, в основном, вероятностные методы. Связь $HG(G)$ с другими параметрами графа рассматривали Босек и др. [7].

В. Щечла [4] получил сложный результат о том, что в случае трех цветов мудрецы выигрывают на цикле из n вершин, только если n делится на 3 или при $n = 4$. Полный перечень графов, на которых мудрецы выигрывают в случае трех цветов, получен в [8].

В данной работе мы рассматриваем модификацию классической детерминированной игры на графе, в которой количество цветов шляп задается для каждого мудреца отдельно. Этот вариант игры изучен в [9], где полностью исследована игра на кликах и приведено много теорем-"конструкторов", позволяющих строить новые выигрышные/проигрышные игры. Данная статья является продолжением статьи [9].

Введем следующие обозначения.

$G = \langle V, E\rangle$ – граф, видимости, т.е. граф, в вершинах которого расположены мудрецы, мы часто будем отождествлять мудрецов с вершинами графа. Мы считаем, что мудрецы различают друг друга (знакомы), им известен граф и известно, кто в какой вершине находится.

$h\colon V \to \mathbb{N}$ – функция "шляпности", обозначающая сколько различных цветов шляп может получить каждый мудрец. Для мудреца $A \in V$ значение $h(A)$ будем называть *шляпностью* мудреца A. Поскольку мудрецы различают друг друга, можно считать, что у каждого мудреца есть публичный список разрешенных для него цветов шляп и тогда цвет шляпы у мудреца – это просто номер из его списка. Множество цветов шляп мудреца A мы будем часто отождествлять с множеством остатков по модулю $h(A)$.

Определение. Игрой "Hats" мы называем пару $\mathcal{HG} = \langle G, h\rangle$, где граф G – граф видимости, а h – функция шляпности. Итак, мудрецы находятся в вершинах графа видимости G и участвуют в *тесте*. Во время теста для каждой вершины v мудрец, находящийся в этой вершине, получает шляпу одного из $h(v)$ цветов. Как и раньше, мудрецы пытаются угадать цвет своей шляпы, и если хотя бы один из них справляется с этой задачей, то будем говорить, что мудрецы *выигрывают* или что игра выигрышная. Граф в этом случае мы тоже называем выигрышным, держа в уме, что это свойство зависит и от функции шляпности.

Игры, для которых не существует выигрышной стратегии мудрецов, назовем *проигрышными.*

Назначение мудрецам шляп мы называем *раскладом шляп.* Говоря формально, каждый расклад шляп – это функция $\varphi\colon V(G) \to \mathbb{Z}$, где $0 \leqslant \varphi(v) \leqslant h(v) - 1$ при всех $v \in V(G)$.

Во втором параграфе рассмотрена игра на полном графе. Мы приводим универсальную конструктивную стратегию, работающую во всех случаях, когда мудрецы выигрывают. Также обсуждается возможность выигрыша мудрецов на почти кликах.

В третьем параграфе обсуждается конструктор "произведение игр" из статьи [9]. Мы показываем, что для игр, полученных этим конструктором, значение функции шляпности в вершине A иногда может быть увеличено (с сохранением выигрышности), а также приводим варианты конструкторов для проигрышных игр.

В четвертом параграфе приведено несколько новых конструкторов, впрочем, достаточно громоздких.

§2. Явные стратегии на полных графах

В классической задаче, когда n мудрецов видят друг друга и количество цветов шляп у всех равно n, выигрыш достигается с помощью изящной стратегии, приведенной во введении. Это бросает вызов отыскивать красивые стратегии для других случаев.

Следующая теорема доказана в статье [9] не конструктивно, с помощью теоремы Холла. Мы даем конструктивное доказательство в духе стратегии из классической задачи.

Теорема 2.1 ([9])**.** *Пусть n мудрецов, расположенных в вершинах полного графа, получают шляпы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ цветов. Тогда мудрецы выигрывают в том и только том случае, если*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geqslant 1. \tag{1}$$

Доказательство. Необходимость условия (1) проверяется несложными вероятностными соображениями, см. [9]. Докажем достаточность. Обозначим через N наименьшее общее кратное чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n. Для k от 1 до n положим $d_k = N/a_k$. Будем отождествлять множество возможных цветов шляпы k-го мудреца с множеством $\{d_k, 2d_k, \ldots, a_k d_k\}$ остатков по модулю N. Опишем выигрышную стратегию мудрецов. Пусть k-й мудрец получил шляпу цвета $x_k d_k$, где $x_k \in \{1, 2, \ldots, a_k\}$

$(1 \leqslant k \leqslant n)$. Положим $S = x_1d_1 + x_2d_2 + \ldots + x_kd_k \pmod N$. Каждый мудрец, видя окружающих, знает все слагаемые этой суммы, кроме своего собственного. Делая предположение о цвете своей шляпы, он получает предполагаемое значение всей суммы. Пусть первый мудрец проверяет гипотезу $S \in \{1, 2, \ldots, d_1\}$; второй мудрец проверяет гипотезу $S \in \{d_1+1, d_1+2, \ldots, d_1+d_2\}$; $\ldots$; n-й мудрец проверяет гипотезу $S \in \{d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1} + 1, \ldots, d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1} + d_n\}$. Гипотеза k-го мудреца затрагивает d_k последовательных остатков, среди которых ровно один делится на d_k. Именно этот остаток и определяет цвет шляпы, который должен назвать k-й мудрец.

Заметим, что по определению чисел d_k и в силу (1) выполняется неравенство $d_1+d_2+\ldots+d_{n-1}+d_n \geqslant N$. Это значит, что в приведенной стратегии гипотезы мудрецов покрывают все возможные остатки по модулю N. Поэтому мудрецы выигрывают. $\square$

Определение. Граф, который получается из полного графа удалением одного ребра, будем называть *почти полным*, а в случае, когда он является подграфом в каком-либо графе – *почти кликой.*

Необходимое условие выигрышности мудрецов на почти полном графе выглядит следующим образом.

Следствие 2.1.1 ([9]). *Пусть граф G – это почти полный граф, он получается из полного графа K_n с вершинами A_1, A_2, $\ldots$, A_n удалением одного ребра $A_{n-1}A_n$. Пусть мудрецы получают шляпы a_1, a_2, $\ldots$, a_n цветов. Для того чтобы мудрецы выигрывали на графе G, необходимо выполнение условия*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}a_n} \geqslant 1. \tag{2}$$

Слагаемое $\frac{1}{a_i}$ в левой части неравенства (1) равно доле тех раскладов шляп от общего числа раскладов, на которых мудрец A_i угадывает свою шляпу (это верно в любом графе для любых стратегий мудрецов). Если для заданных a_1, a_2, $\ldots$, a_n неравенство (1) обращается в равенство, игра мудрецов на клике становится *точной* в том смысле, что на каждом раскладе шляп угадывает ровно один мудрец. Очевидно, точные игры возможны только на полных графах. Назовем игру на почти полном графе *почти точной*, если неравенство (2) обращается в равенство и при этом мудрецы выигрывают. В почти точной игре на $\frac{1}{a_{n-1}a_n}$ доле всех раскладов угадывают сразу два мудреца – A_{n-1} и A_n, на остальных раскладах угадывает лишь какой-то один мудрец.

Как отмечается в статье [9], почти точная игра возможна не для любого набора параметров, удовлетворяющих неравенству (2). Мы приведем одно необходимое условие почти точной игры.

Теорема 2.2. *Пусть граф G – это полный граф на n вершинах A_1, A_2, …, A_n, из которого удалили ребро $A_{n-1}A_n$, шляпности вершин равны a_1, …, a_n, и при этом игра почти точная, т.е. мудрецы выигрывают, и выполняется равенство*

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}a_n}=1. \tag{3}$$

Тогда $a_1a_2\ldots a_{n-2}$ делится на $a_{n-1}a_n$.

Доказательство. Слагаемые $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_{n-2}}$ имеют простой вероятностный смысл: $\frac{1}{a_i}$ – это доля числа раскладов шляп, на которых угадывает мудрец A_i, от общего числа раскладов.

Пусть X – множество раскладов шляп для первых $n-2$ мудрецов, т.е., иначе говоря, это множество наборов из $n-2$ цветов, где первый цвет – это возможный цвет шляпы мудреца A_1, второй цвет – мудреца A_2 и т.д., $(n-2)$-й цвет – мудреца A_{n-2}. Пусть $\alpha=a_1a_2\ldots a_{n-2}$, тогда $|X|=\alpha$. Обозначим через L_i $(i=1, 2, \ldots, a_{n-1})$ подмножества X, такие что если мудрец A_{n-1} видит расклад шляп из L_i, то он называет цвет i. Аналогично определим множества R_j $(j=1, 2, \ldots, a_n)$ для мудреца A_n. Пусть L_k – множество L_i минимальной мощности, $|L_k|=M\leqslant\frac{\alpha}{a_{n-1}}$. Теперь рассмотрим множества $R_j\setminus L_k$ $(j=1, 2, \ldots, a_n)$. В них суммарно $\alpha-M$ элементов, поэтому если $R_m\setminus L_k$ – минимальное по мощности, то $|R_m\setminus L_k|\leqslant\frac{\alpha-M}{a_n}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}|L_k\cup R_m|&=|L_k|+|R_m\setminus L_k|\leqslant M+\frac{\alpha-M}{a_n}=\frac{\alpha}{a_n}+M\left(1-\frac{1}{a_n}\right)\\&\leqslant\frac{\alpha}{a_n}+\frac{\alpha}{a_{n-1}}\left(1-\frac{1}{a_n}\right)=\alpha\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}a_n}\right)\\&=\alpha\left(1-\sum_{i=1}^{n-2}\frac{1}{a_i}\right)=\alpha-\frac{\alpha}{a_1}-\ldots-\frac{\alpha}{a_{n-2}}.\end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом, когда на мудреце A_{n-1} надета шляпа цвета k, на мудреце A_n – цвета m, а у остальных мудрецов реализован расклад шляп из $X \setminus (L_k \cup R_m)$, угадывать должен кто-то из мудрецов A_1, A_2, …, A_{n-2}, и доля числа раскладов, для которых происходит это событие, от общего числа раскладов не меньше чем $\rho = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{n-2}}$. Но ρ ограничивает сверху число раскладов, на которых могут выиграть мудрецы A_1, A_2, … A_{n-2}. Следовательно, оба неравенства (4) должны обращаться в равенство. Тогда $|L_k| = \frac{\alpha}{a_{n-1}}$ (и вообще $|L_i| = \frac{\alpha}{a_{n-1}}$ для всех i) и $|R_m \setminus L_k| = \frac{\alpha}{a_n} - \frac{\alpha}{a_{n-1}a_n}$. Аналогично $|R_j| = \frac{\alpha}{a_n}$, значит, $|R_m \cap L_k| = \frac{\alpha}{a_{n-1}a_n}$, и α делится на $a_{n-1}a_n$. □

Следствие 2.2.1 ([9, Замечание к следствию 2.1.1])**.** *При* $n = 4$ *граф со шляпностями вершин* $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = 3$, $a_4 = 6$ (*отсутствует ребро* A_1A_2) *является проигрышным, хотя и удовлетворяет равенству* (3).

Следующее утверждение в частности показывает, что условие теоремы 2.2 не является достаточным.

Лемма 2.3. *Пусть* G *– почти полный граф на вершинах* A_1, …, A_n, $n \geqslant 4$, *отсутствует ребро* $A_{n-1}A_n$. *При этом функция шляпности* h *удовлетворяет равенству 3. Тогда*

1) если $h(A_1) = 2$, *то мудрецы проигрывают;*

2) если $h(A_1) = 3$, $h(A_n) = 2$, *то мудрецы проигрывают.*

Доказательство. Пусть мудрецы пользуются какой-нибудь стратегией.

1) Выдадим мудрецам A_2, …, A_{n-2} произвольный набор шляп. Теперь посмотрим, какой цвет называет мудрец A_{n-1} по стратегии, если на мудреца A_1 надели шляпу цвета 0, и дадим A_{n-1} шляпу именно этого цвета. Аналогично посмотрим, какой цвет называет мудрец A_n по стратегии, если на мудреца A_1 надели шляпу цвета 1, и дадим A_n шляпу именно этого цвета. Мы выдали шляпы всем, кроме A_1. Посмотрим, что по стратегии говорит мудрец A_1, и наденем на него шляпу этого цвета. Теперь свой цвет угадали два мудреца, видящие друг друга. В почти точных играх это невозможно.

2) Выдадим мудрецам A_2, …, A_{n-2} какой-нибудь набор шляп. Рассмотрим три возможных цвета, которые могут быть надеты на A_1. Посмотрим, что по стратегии говорит мудрец A_n в каждом из трех случаев. В каких-то двух случаях он назовет один и тот же цвет, наденем шляпу этого цвета на него. Теперь, если остался случай, в котором A_n называет другой цвет, нежели мы на него надели, то мы смотрим,

что отвечает по стратегии A_{n-1} в этом случае, и наденем на A_{n-1} тот цвет, что он называет. Иначе мы наденем на A_{n-1} шляпу любого цвета. Таким образом, для любого цвета шляпы мудреца A_1 кто-то из последних двух мудрецов угадает свой цвет. Теперь наденем на мудреца A_1 шляпу того цвета, который он назовет, играя по стратегии. Таким образом, два видящих друг друга мудреца угадали свой цвет. Это невозможно. $\square$

Например, мудрецы проигрывают на почти полном графе на вершинах A, B, C, D (отсутствует ребро CD), где $h(A) = 2$, $h(B) = 10$, $h(C) = 4$, $h(D) = 5$.

Приведем напоследок пример, когда равенство (3) выполнено и почти точная игра возможна.

Лемма 2.4. *Пусть G – это почти полный граф на 4 вершинах A, B, C, D, ребро CD отсутствует. При этом $h(A) = 6$, $h(B) = 6$, $h(C) = 2$, $h(D) = 3$. Тогда мудрецы выигрывают.*

Доказательство. Будем интерпретировать цвета шляп A и B как вычеты по модулю 6, цвет C – как вычет по модулю 2, цвет D – как вычет по модулю 3. Обозначим цвета шляп мудрецов A и B через a и b. Пусть C и D называют свои цвета, исходя из предположений $c = (a + b) \bmod 2$, $d = (a + b) \bmod 3$. Если мудрецы C и D не угадали, выполняется равенство $a+b = c+1 \pmod 2$ и одно из равенств $a+b = d+1 \pmod 3$ или $a+b = d+2 \pmod 3$. Тогда пусть A вычисляет свой цвет в предположениях $a+b = c+1 \pmod 2$ и $a+b = d+1 \pmod 3$; а B – в предположениях $a+b = c+1 \pmod 2$ и $a+b = d+2 \pmod 3$. $\square$

Отметим, что этот результат легко получить с помощью конструктора [9, теорема 3.6].

§3. О конструкторе "произведение игр"

Определение ([9])**.** Пусть $A \in V(G)$. Будем говорить, что граф удовлетворяет *условию максимальности* в вершине A, если при увеличении шляпности A на 1 граф перестает быть выигрышным.

Будем называть игру $\mathcal{HG}_1 = \langle G_1, h_1\rangle$ *подыгрой* игры $\mathcal{HG}_2 = \langle G_2, h_2\rangle$, если G_1 является подграфом графа G_2, а также $h_1 = h_2\Big|_{V(G_1)}$. Выигрышную игру $\langle G, h\rangle$ будем называть *простой*, если она не содержит выигрышной подыгры $\langle G', h'\rangle$, где $G' \neq G$.

Пусть $\mathcal{HG}_1 = \langle G_1, h_1\rangle$ и $\mathcal{HG}_2 = \langle G_2, h_2\rangle$ – две игры, такие что $V(G_1)\cap V(G_2) = \{A\}$. Если нам требуется подчеркнуть, что граф G содержит вершину A, будем обозначать его G^A. Назовем *суммой графов* G_1, G_2 *по вершине* A граф $\langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2\rangle$. Такую сумму будем обозначать $G_1 +_A G_2$. *Произведением этих игр по вершине* A назовем игру $\mathcal{HG} = \langle G_1 +_A G_2, h\rangle$, где h совпадает с h_i на $V(G_i) \setminus \{A\}$ и равна $h_1(A)\cdot h_2(A)$ на вершине A (рис. 1). Такое произведение игр мы будем обозначать $\mathcal{HG}_1 \times_A \mathcal{HG}_2$.

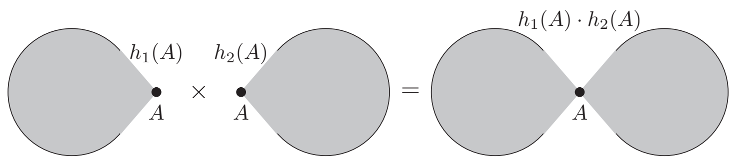

Рис. 1. Теорема о произведении игр.

Теорема 3.1 (О произведении игр, [9])**.** *Пусть* $\mathcal{HG}_1 = \langle G_1^A, h_1\rangle$ *и* $\mathcal{HG}_2 = \langle G_2^A, h_2\rangle$ *– две игры, такие что* $V(G_1)\cap V(G_2) = \{A\}$*. Если мудрецы выигрывают в игры* $\mathcal{HG}_1$ *и* $\mathcal{HG}_2$*, тогда выигрывают и в игру* $\mathcal{HG} = \mathcal{HG}_1 \times_A \mathcal{HG}_2$*.*

Таким образом, при склеивании двух выигрышных графов по вершине A, можно сильно увеличить шляпность вершины A, так что в результате будет получаться все еще выигрышный граф. При этом естественно предполагать, что исходные игры были простыми. Следующий пример показывает, что значение шляпности $h_1(A)h_2(A)$, вообще говоря, может быть еще больше увеличено с сохранением выигрышности, даже если склеиваемые графы удовлетворяли условию максимальности в вершине A (да и во всех остальных вершинах тоже).

Пусть графы G_1 и G_2 – это 5-клики со шляпностями вершин 4, 5, 5, 5, 6. По теореме 2.1 эти графы выигрышные. При увеличении шляпности любой из вершин нарушается неравенство (1), значит граф удовлетворяет условию максимальности во всех вершинах. Вершину шляпности 6 в обоих графах обозначим через A. Пусть $\mathcal{HG}_{37} = \langle G_1 +_A G_2, h\rangle$, где функция шляпности h на всех вершинах, кроме A, имеет те же значения, что и на исходных графах, а $h(A) = 37 = 6\cdot 6 + 1$ (рис. 2).

Теорема 3.2. *Мудрецы выигрывают в игре* $\mathcal{HG}_{37}$.

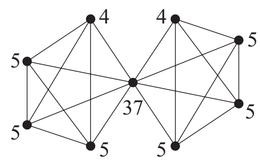

Рис. 2. Игра $\mathcal{HG}_{37}$ “Большой бантик”.

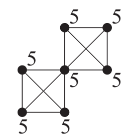

Рис. 3. Игра “Средний бантик”.

Доказательство. Рассмотрим вычеты по модулю $740 = 4{\cdot}5{\cdot}37$. Пусть цвета шляп мудреца шляпности k – вычеты, делящиеся на $\frac{740}{k}$. Тогда рассмотрим S_1 и S_2 – суммы вычетов-цветов в левой и в правой 5-кликах соответственно. Пусть левый мудрец шляпности 4 предполагает, что его шляпа такова, что $S_1 \in \{1, 2, \ldots, 185\}$. Из этого предположения он находит 185 подряд идущих вычетов для возможного значения цвета своей шляпы, среди которых ровно один делится на $185 = \frac{740}{4}$. Цвет, соответствующий этому вычету, мудрец и называет. Аналогично, три левых мудреца шляпности 5 предполагают, что S_1 лежит в множествах $\{186, \ldots, 333\}$, $\{334, \ldots, 481\}$, $\{482, \ldots, 629\}$ (эти множества содержат по $148 = \frac{740}{5}$ чисел). Остальные расклады шляп, для которых $S_1 \in \{630, \ldots, 740\}$, достаются мудрецу A (мудрецу со шляпностью 37, его цвета – это вычеты, делящиеся на 20), так что ему придется выбирать из не более чем $\lceil (740 - 630 + 1)/20 \rceil = 6$ подряд идущих цветов. Так же, но только работая с S_2, поступают правые мудрецы, и таким образом, мудрецу A предстоит сделать выбор шести вариантов цвета еще и для S_2. Чтобы все сработало, пусть мудрецы левой и правой клики по-разному конвертируют цвета мудреца A в вычеты. У мудреца A имеется 37 вариантов возможного цвета шляпы – фактически это вычеты по модулю 37 – но по нашему правилу цвета шляп мудреца A трактуются как вычеты по модулю 740, делящиеся на 20. Пусть мудрецы левой клики вычету $20x \bmod 740$ ставят в соответствие цвет $x \bmod 37$. При этом пусть мудрецы правой клики вычету $20x \bmod 740$ ставят в соответствие цвет $6x \bmod 37$ (отображение $x \mapsto 6x$ взаимно однозначно на множестве остатков при делении на

37). Как нетрудно проверить, любые два множества цветов-остатков по модулю 37 вида $\{x, x+1, \ldots, x+5\}$ и $\{6y, 6y+6, \ldots, 6y+30\}$ пересекаются не более чем по одному элементу. Пусть тогда стратегия мудреца A состоит в том, что он назовет цвет из пересечения этих множеств, либо назовет произвольный цвет, если пересечение пусто.

Итак, для любых значений сумм S_1 и S_2 либо A угадает обе суммы, либо угадает кто-то из мудрецов на левой или на правой клике. $\square$

Аналогично можно показать, что мудрецы выигрывают на графе "Средний бантик", рис. 3. Этот граф интересен тем, что опровергает гипотезы 4 и 6 из [7].

Опишем еще пару конструкторов по духу близких к теореме о произведении, но работающих с проигрышными графами.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathcal{HG} = \langle G, h\rangle$ – проигрышная игра, B – любая вершина графа G. Рассмотрим граф $G' = \langle V', E'\rangle$, получающийся добавлением к графу G новой висячей вершины A: $V' = V \cup \{A\}$, $E' = E \cup \{AB\}$. Тогда мудрецы проигрывают в игре $\langle G', h'\rangle$, где $h'(A) = 2$, $h'(B) = 2h(B) - 1$ и $h'(u) = h(u)$ для остальных вершин $u \in V$.*

Доказательство. Пусть мудрецы зафиксировали стратегию на графе G'. Построим проигрышный расклад шляп для этой стратегии. Стратегия мудреца A для каждого из $2h(B) - 1$ возможных цветов шляпы B предписывает назвать один из двух цветов. Какой-то из этих двух цветов называется не более чем $h(B) - 1$ раз. Дадим мудрецу A шляпу этого цвета, это фиксирует стратегию мудреца B на оставшемся графе G. Теперь, чтобы A не угадал, мы попытаемся дать B шляпу одного из оставшихся $h(B)$ цветов (если их осталось больше, оставим ровно $h(B)$). С этим ограничением нам удастся построить расклад шляп на графе G так, что никто на G не угадает, поскольку игра $\mathcal{HG}$ проигрышная. $\square$

Можно подцеплять новую вершину A сразу к нескольким вершинам проигрышного графа. Если сильно увеличить их шляпность, это аннулирует возможное преимущество от появления новой вершины и граф останется проигрышным. В следующей теореме мы ограничимся случаем двух вершин.

Теорема 3.4. *Пусть G – произвольный граф, B и C – две его вершины. Пусть функция шляпности такова, что $h(B) = h(C) = 2$ и при этом граф проигрышный. Добавим к графу новую вершину A,* *которая соединена только с B и C. Тогда мудрецы проигрывают на полученном графе, если $h(A) = 2$, $h(B) = 3$, $h(C) = 7$, а шляпности остальных вершин не изменились.*

Доказательство. Пусть мудрецы зафиксировали какую-то стратегию на новом графе. Стратегию мудреца A можно задать в виде таблицы 3×7: строки соответствуют цветам шляп мудреца B, столбцы – цветам шляп мудреца A. В клетке таблицы записывают номер цвета (0 или 1), который называет мудрец A, когда видит у B и C соответствующие цвета шляп.

В каждом столбце таблицы один из символов – 0 или 1 – встречается два раза. Отметим клетки, содержащие повторяющийся символ (если же символ встретился во всех трех клетках столбца, отметим любые две из них). Отмеченные клетки могут находится либо в первой и второй строках, либо во второй и третьей, либо в первой и третьей. Поскольку столбцов 7, по принципу Дирихле найдутся две строки, в которых отмеченные клетки занимают три столбца. В отмеченных клетках одного столбца может находиться два нуля или две единицы, следовательно, можно выбрать два столбца из трех, так, что в указанных столбцах в отмеченных клетках стоит одно и то же число.

Итак, мы выбрали в таблице две строки (для определенности i-ю и j-ю) и два столбца (для определенности k-й и ℓ-й), на пересечении которых стоит одно и то же число, для определенности 0. Теперь мы без проблем построим опровергающий расклад шляп на всем графе. Дадим мудрецу A шляпу цвета 1, мудрецу B будем подбирать шляпу i-го или j-го цвета, а мудрецу C – k-го или ℓ-го. При таком подходе к делу мудрец A заведомо не угадает свой цвет, так как в соответствии с таблицей назовет цвет 0. Что же касается назначения конкретных цветов мудрецам B и C, да и всем остальным, запустим игру на графе G: после фиксации цвета мудреца A стратегия остальных мудрецов на графе G определена однозначно, принятые ограничения на цвета шляп B и C позволяют полагать, что их шляпности теперь равны 2. Поскольку граф G проигрышный, мы сумеем предъявить на нем опровергающий расклад шляп. □

Приведенное доказательство опирается на рамсеевские соображения, утверждение может быть без проблем перенесено на случай большего числа новых вершин и тех вершин, к которым они подцепляются, но, по-видимому, подобные конструкции дают слишком завышенные значения шляпностей в проигрышных графах.

§4. Новые конструкторы

Следующий конструктор обобщает теорему 3.8 из [9] о том, что добавление висячей вершины, шляпность которой больше 2, не влияет на исход игры. Оказывается, если к проигрышному графу G_1 приклеить другой проигрышный граф G_2, склеив вершину шляпности 2 графа G_2 с любой вершиной графа G_1, получится проигрышный граф.

Теорема 4.1. *Пусть $G = G_1 +_A G_2$, где G_1 и G_2 – графы, у которых $V(G_1) \cap V(G_2) = \{A\}$, а игры $\mathcal{HG}_1 = \langle G_1, h_1\rangle$ и $\mathcal{HG}_2 = \langle G_2, h_2\rangle$ – проигрышные, и при этом $h_1(A) \geqslant h_2(A) = 2$. Тогда игра $\mathcal{HG} = \langle G_1 +_A G_2, h\rangle$ – проигрышная, где*

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x), & x \in V(G_1) \\ h_2(x), & x \in V(G_2) \setminus A. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть это не так, и f – выигрышная стратегия мудрецов в игре $\mathcal{HG}$. Обозначим через N_1 множество соседей вершины A в графе G_1. Для любого расклада шляп φ на вершинах графа G_1 определен ответ по стратегии f всех мудрецов из множества $V(G_1) \setminus A$. Покажем, что существуют два расклада шляп φ_1 и φ_2 на вершинах G_1, такие что $\varphi_1\big|_{N_1} = \varphi_2\big|_{N_1}$, $\varphi_1(A) \neq \varphi_2(A)$, и если мудрецы из G_1 будут играть по стратегии f, то в обоих раскладах ни один мудрец из множества $V(G_1) \setminus A$ не угадает цвет своей шляпы.

Предположим, что не нашлось двух таких раскладов. Значит, для каждого расклада шляп c на вершинах из N_1 существует не более одного цвета $\alpha(c)$ шляпы мудреца A, для которого можно так достроить расклад шляп $c \cup \alpha(c)$ на вершинах из $N_1 \cup A$ до расклада шляп на вершинах G_1, что ни один мудрец из множества $V(G_1) \setminus A$ не угадает свой цвет по стратегии f. Рассмотрим следующую стратегию для игры $\mathcal{HG}_1$: пусть все мудрецы из G_1, кроме A, играют по стратегии f, а мудрец A называет цвет $\alpha(c)$ (или 0, если $\alpha(c)$ не определено). Это выигрышная стратегия, так как если никто из $V(G_1) \setminus A$ не угадал, то на A надета шляпа $\alpha(c)$, и он угадывает. Противоречие.

Рассмотрим эти два расклада φ_1 и φ_2. Зафиксируем расклад шляп $c = \varphi_1\big|_{N_1} = \varphi_2\big|_{N_1}$ на N_1 и ограничимся лишь теми раскладами шляп на G_2, где мудрец A получает только шляпы цветов $\varphi_1(A)$ и $\varphi_2(A)$.

Тогда стратегия f задает действия мудрецов на графе G_2, т.е. в проигрышной игре $\mathcal{HG}_2$ (то, что мудрец A по этой стратегии может называть больше двух цветов, не способствует выигрышу). Значит, существует опровергающий расклад ψ. Если $\psi(A) = \varphi_1(A)$, то $\psi \cup \varphi_1\big|_{V(G_1)\setminus A}$ – опровергающий расклад на G, а если $\psi(A) = \varphi_2(A)$, то $\psi \cup \varphi_2\big|_{V(G_1)\setminus A}$ – опровергающий расклад на G. $\square$

Теорема 3.4 из [9] утверждает, что два выигрышных графа можно "сшить" друг с другом: в каждом из них можно взять произвольные множества вершин и соединить эти множества новыми ребрами как полный двудольный граф, увеличив шляпность вершин на 1. В результате получится выигрышный граф. Следующая теорема привносит "хирургическое" вмешательство в эту конструкцию: будем сшивать графы, соединяя соседей двух выбранных вершин шляпности 2, а сами эти вершины удалим.

Теорема 4.2. *Пусть G_1, G_2 – графы, содержащие вершины A и B соответственно, игры $\mathcal{HG}_1 = \langle G_1, h_1\rangle$ и $\mathcal{HG}_2 = \langle G_2, h_2\rangle$ – выигрышные, и при этом $h_1(A) = h_2(B) = 2$. Пусть N_A и N_B – множества соседей вершин A и B в графах G_1 и G_2 соответственно. Рассмотрим новый граф G (рис. 4):*

$$V(G) = (V(G_1)\setminus A) \cup (V(G_2)\setminus B),$$
$$E(G) = E(G_1)\big|_{V(G_1)\setminus A} \cup E(G_2)\big|_{V(G_2)\setminus A} \cup \{XY \mid X \in N_A, Y \in N_B\}.$$

Тогда игра $\mathcal{HG} = \langle G, h\rangle$ – выигрышная, где

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x), & x \in V(G_1)\setminus A,\\ h_2(x), & x \in V(G_2)\setminus B.\end{cases}$$

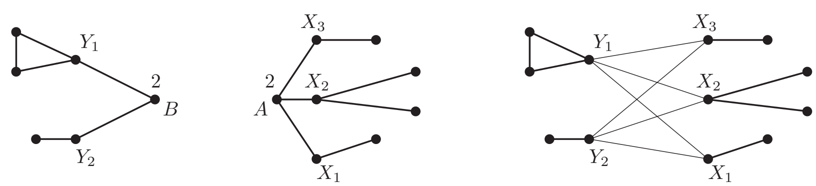

Рис. 4. "Сшиваем" графы по соседям вершин A и B.

Доказательство. Пусть f_1 и f_2 – выигрышные стратегии в играх $\mathcal{HG}_1$ и $\mathcal{HG}_2$. Построим выигрышную стратегию в игре $\mathcal{HG}$.

Пусть c_1 – произвольный расклад шляп на N_A. Каждому такому раскладу сопоставим цвет $g_1(c_1)$, который в этой ситуации назовет мудрец A по стратегии f_1. Аналогично каждому раскладу c_2 на N_B сопоставим g_2. Все мудрецы из N_A могут найти $g_2(c_2)$, все мудрецы из N_B могут найти $g_1(c_1)$.

Опишем выигрышную стратегию. Мудрецы из $V(G) \setminus (N_A \cup N_B)$ играют по своим старым стратегиям f_1 и f_2. Мудрецы из N_A также играют по стратегии f_1, но считая, что на мудреце A надета шляпа цвета $g_2(c_2)$. А мудрецы из N_B играют по стратегии f_2, считая, что на мудреце B (напомним, его шляпность равна 2) надета шляпа не цвета $g_1(c_1)$, обозначим этот цвет $\overline{g_1(c_1)}$.

Почему она выигрышная? Если $g_1(c_1) = g_2(c_2)$, то мы смоделировали игру $\mathcal{HG}_2$, где на B надета шляпа цвета $\overline{g_1(c_1)} = \overline{g_2(c_2)}$, все играют по стратегии f_2, но вот только B ничего не говорит. Но он и так по стратегии f_2 ошибается, и f_2 – выигрышная в игре $\mathcal{HG}_2$. Значит, кто-то из $V(G_2) \setminus B$ угадает цвет своей шляпы.

Аналогично, если $g_1(c_1) \neq g_2(c_2)$, то мы смоделировали игру $\mathcal{HG}_1$, где на A надета шляпа цвета $g_2(c_2) = \overline{g_1(c_1)}$, все играют по стратегии f_1, но вот только A ничего не говорит. Но он и так по стратегии f_1 ошибается, и f_1 – выигрышная в игре $\mathcal{HG}_1$. Значит, кто-то из $V(G_1) \setminus A$ угадает цвет своей шляпы. □

Следующий конструктор позволяет скреплять несколько графов G_i, отметив в каждом графе несколько вершин с теми же названиями, что и в графе G, и соединив их между собой так, как соответствующие вершины соединены в графе G.

Теорема 4.3. *Дана выигрышная игра $\langle G, h\rangle$, где $V(G) = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$. Также даны графы G_i $(i = 1, \ldots, k)$, в каждом из которых отмечено несколько вершин $B_{ij} \in V(G_i)$ (множества вершин $V(G_i)$ не пересекаются, в разных графах может быть отмечено разное количество вершин, см. рис.* 5*), при этом игры $\langle G_i, h_i\rangle$ – выигрышные. Рассмотрим граф $G' = (V(G'), E(G'))$, где*

$$V(G') = V(G_1) \cup \ldots \cup V(G_k),$$

$$E(G') = E(G_1) \cup \ldots \cup E(G_k) \cup \{B_{i_1 j_1} B_{i_2 j_2} \mid A_{i_1} A_{i_2} \in E(G)\}.$$

Тогда игра $\langle G', h' \rangle$ – выигрышная, где

$$h'(x) = \begin{cases} h_i(x), & \text{если } x \text{ лежит в каком-то} \\ & \text{из множеств} V(G_i) \setminus \{B_{i1}, B_{i2}, \ldots\}, \\ h_i(x) + h(A_i) - 1, & \text{если } x \text{ совпадает с какой-то} \\ & \text{из вершин } B_{ij}. \end{cases}$$

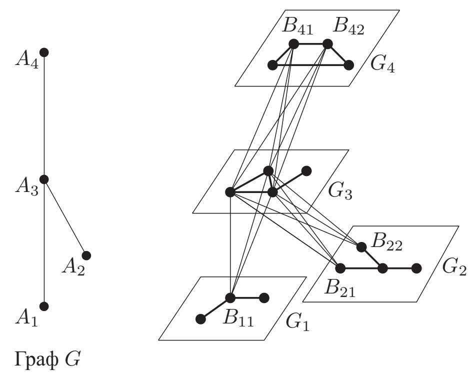

Рис. 5. Скрепление нескольких графов с помощью графа G.

Доказательство. Пусть f, f_1, $\ldots$, f_k – выигрышные стратегии для игр $\langle G, h \rangle$, $\langle G_1, h_1 \rangle$, $\ldots$, $\langle G_k, h_k \rangle$ соответственно. Будем считать, что у мудреца B_{ij} есть $h_i(B_{ij})$ старых цветов и $h(A_i) - 1$ новых. Назовем мегамудрецом M_i множество всех мудрецов $\{B_{ij}\}_{j=1,2,\ldots}$, на этом мудреце может быть надета одна мегашляпа либо цвета 0, либо одного из $h(A_i) - 1$ новых цветов. Скажем, что на мегамудреце M_i надет цвет 0, если на всех $B_{i1}, B_{i2}, \ldots$ надеты старые цвета, а иначе на нем надета шляпа с наибольшим номером нового цвета, встречающегося мудрецов у $B_{i1}, B_{i2}, \ldots$. Таким образом, каждый мегамудрец понимает, какие мегашляпы надеты на всех его соседей в графе G, и мегамудрецы могут играть по стратегии f. Если мегамудрец M_i должен назвать новый цвет, то пусть все соответствующие мудрецы называют этот цвет. Мудрецы из $V(G_i) \setminus \{B_{i1}, B_{i2}, \ldots\}$, а также $B_{i1}, B_{i2}, \ldots$, если M_i должен назвать 0, играют по стратегии f_i; если же какой-то из мудрецов видит новый цвет и поэтому не может играть по стратегии f_i, то он называет любой цвет.

Так как f выигрышная стратегия, то какой-то мегамудрец M_i верно угадает свой цвет. Если на нем один из новых цветов, то все мудрецы $\{B_{ij}\}_{j=1,2,\ldots}$ назовут этот цвет, и кто-то из них победит. Если же на M_i цвет 0, то и $V(G_i)\setminus\{B_{i1}, B_{i2}, \ldots\}$, и $B_{i1}, B_{i2}, \ldots$ играют по стратегии f_i, и так как она выигрышная, то кто-то из $V(G_i)$ угадает свой цвет. $\square$

Заметим, что если мы будем считать, что в каждой компоненте G_i отмечена лишь одна вершина B_i, то функция шляпности, для которой получается выигрышная игра, может быть сильно увеличена для вершин B_i. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 4.4. *Пусть игра $\langle G, h'\rangle$ выигрышная, $V(G) = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Возьмем n выигрышных игр $\langle G_i, h_i\rangle$, у которых множества вершин $V(G_i)$ не пересекаются, и отметим в каждом графе G_i одну вершину A_i. Построим на отмеченных вершинах граф G. В этом "суперграфе" зададим шляпность $h(A_i) = h'(A_i)h_i(A_i)$ (а у прочих вершин шляпность та же, что и в исходных графах). Тогда мудрецы выигрывают.*

Утверждение леммы сразу следует из теоремы 3.1 о произведении.

Следующий конструктор комбинирует идеи теорем о произведении и о подстановке [9, теорема 3.4] в единого монстра. Мы склеиваем несколько выигрышных графов по общей вершине O, и на соседях O создаем копию выигрышного графа G, соединяя их новыми ребрами. При надлежащем назначении шляпностей получается выигрышный граф.

Если шляпность мудреца A задается как произведение $h(A) = mn$, то удобно считать, что его цвет – это пара (c_1, c_2), где $0 \leqslant c_1 \leqslant m-1$, $0 \leqslant c_2 \leqslant n-1$. Будем говорить в этом случае, что вершина A имеет *композитный цвет.*

Теорема 4.5 (о "конусе" с вершиной O над графом G)**.** *Даны выигрышная игра $\mathcal{HG} = \langle G, h\rangle$, где $V(G) = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ и k выигрышных игр $\mathcal{HG}_i = \langle G_i, h_i\rangle$, $1 \leqslant i \leqslant k$, у которых множества вершин $V(G_i)$ попарно не пересекаются. В каждом графе G_i отмечена вершина O, а также отмечена одна вершина A_i, смежная с O. При этом $h_1(O) = h_2(O) = \ldots = h_k(O)$. Рассмотрим граф $G' = (V(G'), E(G'))$,* *где*

$$V(G') = (V(G_1) \setminus \{O\}) \cup \ldots \cup (V(G_k) \setminus \{O\}) \cup \{O\},$$
$$E(G') = E(G_1) \cup \ldots \cup E(G_k) \cup \{A_iA_j \mid A_iA_j \in E(G)\}.$$

Тогда игра $\langle G', h' \rangle$ *– выигрышная, где*

$$h'(x) = \begin{cases} h_i(x), & \text{если } x \text{ лежит в каком-то} \\ & \text{из множеств} V(G_i) \setminus \{A_i\}, \\ h_i(A_i)h(A_i), & \text{если } x \text{ совпадает с какой-то} \\ & \text{из вершин } A_i. \end{cases}$$

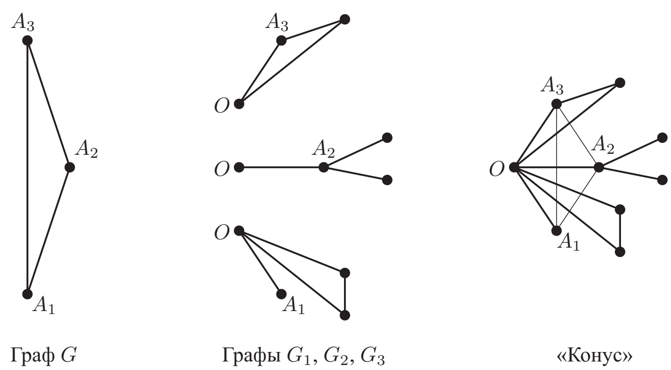

Рис. 6. “Конус” над графом G.

Доказательство. У мудрецов из вершин A_i композитный цвет, они отыгрывают сразу две стратегии – по одной компоненте стратегию игры $\mathcal{HG}_i$, по другой – стратегию игры $\mathcal{HG}$. Мудрецы из $V(G_k) \setminus \{O, A_i\}$ отыгрывают стратегию игры $\mathcal{HG}_i$, при этом соседи A_i обращают внимание только на G_i-компоненту его цвета.

Самая хитрая роль достается мудрецу O. Он видит всех мудрецов A_i, поэтому знает, кто из них угадал G-компоненту своего цвета, пусть для определенности это оказался мудрец A_j. Тогда O смотрит только на своих соседей из подграфа G_j и играет по стратегии h_j (при этом учитывает только G_j-компоненту цвета мудреца A_j). В результате кто-то на графе G_j угадает свой цвет (если это будет мудрец A_j, то он угадает обе компоненты своего цвета). □

Пример выигрышного графа, полученного применением теоремы, показан на рис. 7. Граф G – это 3-клика со шляпностями вершин 3, 3, 3; граф G_1 – это 5-цикл со шляпностями вершин 4, 2, 3, 3, 3; графы G_2 и G_3 – 4-циклы со шляпностями вершин 4, 2, 3, 3. Три последних графа выигрышные в силу [9, следствие 3.6.1]. В качестве вершин O взяты вершины шляпности 4.

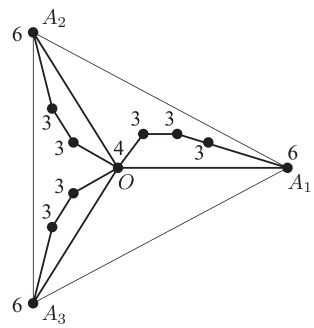

Рис. 7. Мудрецы выигрывают по теореме 4.5.

В доказательстве теоремы 4.5 мудрецу O определена роль “диспетчера” – глядя на мудрецов A_i, он выбирает, в каком графе G_i будет вестись выигрышная игра. Успешность этого выбора обеспечена тем свойством, что он видит весь граф G и тем самым знает, кто из мудрецов угадает. Рассмотрим случай, в котором мудрец O видит не все вершины графа G.

Зафиксируем граф G, функцию шляпности и стратегию мудрецов на графе G. Будем называть множество $S \subset V(G)$ *предсказуемым*, если оно обладает следующим свойством: для любого расклада шляп на графе G, глядя на расклад шляп только на множестве S, мы можем выбрать такого мудреца $A \in S$, что если кто-то из мудрецов из S угадал свой цвет, то один из этих угадавших – A.

Примером предсказуемого множества S (для стратегии из теоремы 3.2) может служить 5-клика, содержащаяся в графе Большой бантик, рис. 2. Действительно, стратегия мудрецов, расположенных в вершинах любой из 5-клик, предъявленная в доказательстве теоремы 3.2, состоит в том, что они проверяют некоторые гипотезы, касающиеся суммы шляп мудрецов на этой клике. Наблюдатель, который видит расклад шляп лишь на этой клике, в состоянии понять, угадал ли кто-либо из мудрецов, кроме центрального, и если да, то выбирает угадавшего мудреца. В случае, если никто, кроме центрального, не угадал, то угадавшим в этом множестве мудрецов (если он там есть) может быть только центральный мудрец, и следует выбрать его.

Более простой пример предсказуемых множеств – компоненты G_1 и G_2 из теоремы 3.1 (для стратегий из доказательства теоремы). Так, граф G (рис. 8, слева), в котором все шляпности равны 4, является произведением двух клик S_1 и S_2 с шляпностями 2, 4, 4, поэтому S_1 и S_2 – предсказуемые множества.

Возвращаясь к теореме "о конусе", заметим, что конструкция нового графа может быть обобщена на случай нескольких диспетчеров, если в совокупности они видят весь граф G и при этом каждый диспетчер видит предсказуемую часть графа G. Опишем это обобщение более точно.

Пусть дана выигрышная игра $\mathcal{HG}=\langle G,h\rangle$, где $V(G)=\{A_1,A_2,\ldots,A_k\}$, фиксирована выигрышная стратегия f в этой игре и множество вершин графа G представлено в виде объединения нескольких предсказуемых по отношению к стратегии f множеств: $V(G)=S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_m$. Множества S_j могут пересекаться, и если какая-то вершина A_ℓ лежит сразу в нескольких множествах S_j, будем считать одно из них (любое) "главным" для этой вершины, номер этого множества обозначим через j_ℓ. Например можно взять $j_\ell=\min\{j : A_\ell\in S_j\}$. Будем считать, что никакое из множеств S_j не лежит в объединении остальных. Пусть для каждого ℓ, $1\leqslant\ell\leqslant k$, задана выигрышная игра $\mathcal{HG}_\ell=\langle G_\ell,h_\ell\rangle$ (множества вершин $V(G_\ell)$ попарно не пересекаются), причем в каждом графе G_ℓ отмечена одна вершина A_ℓ и еще одна вершина, смежная с A_ℓ, которая обозначена как O_{j_ℓ}. Таким образом вершины из разных графов могут получить одинаковое обозначение O_j, при этом пусть для каждого j, $1\leqslant j\leqslant m$, шляпности всех вершин O_j одинаковы и равны o_j.

Рассмотрим граф $G' = (V(G'), E(G'))$, где $V(G') = \bigcup\limits_{\ell=1}^{k} V(G_\ell)$, причем в этом объединении отождествлены все вершины, которые одинаково обозначены (т.е. разные копии вершин O_j склеены),

$$E(G') = E(G_1) \cup \ldots \cup E(G_k) \cup E(G) \cup \{O_j A \mid 1 \leqslant j \leqslant m,\ A \in S_j\}.$$

Здесь последнее множество позволяет всем мудрецам O_j видеть все вершины множества S_j, даже те, для которых индекс j не является главным. Само объединение тоже понимается формально: если, скажем, множество $E(G_\ell)$ содержит ребро $A_\ell O_{j_\ell}$, то множество $E(G')$ тоже содержит ребро $A_\ell O_{j_\ell}$, поскольку в графе G' имеются вершины, обозначаемые A_ℓ и O_{j_ℓ}.

На рис. 8 показан пример этой конструкции. Здесь $j_1 = j_2 = j_3 = 1$, $j_4 = j_5 = 2$. В качестве графа G взят «малый бантик», в котором, как мы проверили, множества S_1 и S_2 являются предсказуемыми.

Определим функцию шляпности h' на графе G'.

$$h'(x) = \begin{cases} h_\ell(x), & \text{если } x \text{ лежит в каком-то} \\ & \text{из множеств} V(G_\ell) \setminus \{O_{j_\ell}, A_\ell\}, \\ o_j, & \text{если } x \text{ совпадает с какой-то из вершин } O_j, \\ h_\ell(A_\ell) h(A_\ell), & \text{если } x \text{ совпадает с какой-то из вершин } A_\ell. \end{cases}$$

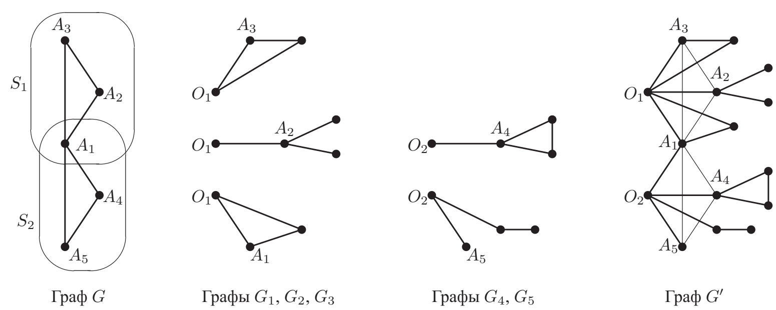

Рис. 8. “Конус” над графом G с двумя диспетчерами.

Следствие 4.5.1. *В указанных выше обозначениях игра $\langle G', h' \rangle$ – выигрышная.*

Доказательство. У каждого мудреца A_ℓ композитный цвет, он отыгрывает сразу две стратегии – по первой компоненте стратегию игры $\mathcal{HG}_\ell$, по второй – стратегию игры $\mathcal{HG}$. Мудрецы из $V(G_\ell) \setminus \{O_{j_\ell}, A_\ell\}$ отыгрывают стратегию игры $\mathcal{HG}_\ell$, при этом соседи A_ℓ обращают внимание только на G_ℓ-компоненту его цвета.

Что касается мудрецов O_j, каждый из них видит предсказуемую компоненту S_j графа G и поэтому знает, который из мудрецов в этой компоненте мог угадать G-компоненту своего цвета (если там такой есть). Пусть с точки зрения мудреца O_j таковым оказался мудрец A_ℓ. Если $j = j_\ell$, то O_j смотрит только на своих соседей из подграфа G_ℓ и играет по стратегии h_ℓ (при этом учитывает только G_ℓ-компоненту цвета мудреца A_ℓ). Если же $j \neq j_\ell$ или никто из мудрецов в компоненте S_j не угадал цвет, O_j может поступать произвольно.

Пусть теперь индекс ℓ обозначает любого из мудрецов на графе G, угадавших G-компоненту своего цвета. Тогда в игре на графе G_ℓ либо кто-то из мудрецов (но не A_ℓ) угадает свой цвет, либо A_ℓ угадает обе компоненты своего цвета. $\square$

§5. Заключение

Как показывает наша статья (вместе со статьей [9]), анализ рассматриваемого варианта игры Hats позволяет использовать многочисленные и довольно разнообразные комбинаторные подходы. Вместе с тем, вычислительная сложность препятствует выдвижению скоропалительных гипотез и надежно защищает игру от возможности проведения полного исследования.

Список литературы

1. S. Butler, M T. Hajiaghayi, R. D. Kleinberg, and T. Leighton, *Hat guessing games.* — SIAM review, **51** (2009), 399–413.
2. M. Gadouleau and N. Georgiou, *New constructions and bounds for winkler's hat game.* — SIAM J. Discr. Math., **29** (2015), 823–834. `https://doi.org/10.1137/130944680`
3. M. Gadouleau, *Finite dynamical systems, hat games, and coding theory.* — J. Discr. Math. SIAM **32**, No. 3 (2018), 1922–1945. `https://doi.org/10.1137/15m1044758`.
4. W. W. Szczechla, *The three colour hat guessing game on cycle graphs* . — Electronic J. Combinatorics, **26**, No. P1.37 (2017). `arXiv:1412.3435`.
5. M. Farnik, *A hat guessing game.* Jagellonian University (2015).
6. Noga Alon, Omri Ben-Eliezer, Chong Shangguan, Itzhak Tamo, *The hat guessing number of graphs* (2018). `arXiv:1812.09752`.

7. B. Bosek, A. Dudek, M. Farnik, J. Grytczuk, P. Mazur, *Hat Chromatic Number of Graphs*. — J. CoRR (2019). http://arxiv.org/abs/1905.04108v1.
8. К. П. Кохась, А. С. Латышев, *На каких графах мудрецы могут угадать цвет хотя бы одной шляпы*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **464** (2017). http://www.pdmi.ras.ru/znsl/2017/v464.html.
9. К. П. Кохась, А. С. Латышев, *Клики и конструкторы в игре "Hats"*. I. — Зап. научн. семин. ПОМИ. Наст. сборник (2019).

Kokhas K. P., Latyshev A. S., Retinskiy V. I. Cliques and constructors in "Hats" game. II.

We analyze the following general variant of deterministic "Hats" game. Several sages wearing colored hats occupy the vertices of a graph, kth sage can have hats of one of $h(k)$ colors. Each sage tries to guess the color of his own hat merely on the basis of observing the hats of his neighbours without exchanging any information. A predetermined guessing strategy is winning if it guarantees at least one correct individual guess for every assignment of colors.

We demonstarte here winning strategies fo the sages on complete graphs, and analyze the Hats game on almost complete graphs. We prove also a collection of theorems demonstrating how one can construct new graphs for which the sages win.

С.-Петербургский
государственный университет,
199034, С.-Петербург, Россия
E-mail: kpk@arbital.ru

Поступило 2 декабря 2019 г.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский университет ИТМО"
197101, г. С.-Петербург, Россия
E-mail: alex_700_95@mail.ru

Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"
E-mail: viretinskiy@gmail.com