Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 488, 2019 г.

К. П. Кохась, А. С. Латышев

КЛИКИ И КОНСТРУКТОРЫ В ИГРЕ “HATS”. I

§1. Введение

Игра “Hats” – это интересная математическая задача, которая привлекает внимание множества математиков в течение многих лет. В классическом варианте задачи рассматривают группу из $n \geqslant 2$ игроков (мудрецов), каждому из которых надевают шляпу одного из n различных цветов. Каждый мудрец видит шляпы остальных мудрецов, но не видит своей, и, основываясь на этой информации, делает попытку угадать цвет надетой на него шляпы. Цель мудрецов – гарантировать, что хотя бы один из них угадает свой цвет вне зависимости от расклада шляп. Игрокам разрешено обсудить и зафиксировать стратегию до назначения шляп. После назначения любое общение запрещено. После того как все мудрецы одновременно высказали свои догадки, проверяется условие выигрыша: правда ли, что хотя бы один из мудрецов угадал. Вопрос задачи: могут ли мудрецы гарантировать себе выигрыш?

Ответ на вопрос – “да!” – обосновывается довольно изящно. Пронумеруем мудрецов, цвета шляп отождествим с остатками по модулю n. Каждый мудрец видит все шляпы, кроме своей. Пусть i-й мудрец назовет остаток, исходя из гипотезы, что сумма всех цветов, включая его собственный, по модулю n равна i. Ясно, что вне зависимости от расклада шляп гипотеза ровно одного мудреца будет истинна, а значит, он угадает цвет своей шляпы.

Естественным обобщением этой задачи является игра, в которой каждый мудрец видит лишь некоторых из остальных мудрецов. Говоря формальнее, мудрецы находятся в вершинах некоторого графа – “графа видимости”, мудрец i видит цвет шляпы мудреца j тогда и только тогда, когда в графе есть ребро (i, j). Такое обобщение было впервые представлено в работе [1] и в дальнейшем исследовалось в ряде работ [2–4]. Так, например, в статье [3] была исследована связь такой

Ключевые слова: игра, граф, детерминированная стратегия, угадывание цвета шляпы.

игры “Hats” с конечными динамическими системами и теорией кодирования. В своей диссертации [5] М. Фарник определил $HG(G)$ как максимальное количество цветов шляп, при котором мудрецы могут гарантировать себе победу. Он получил некоторые оценки на $HG(G)$, выраженные в терминах максимальной степени в графе и хроматического числа графа. В статье [6] Н. Алон и др. изучали $HG(G)$ для некоторых классов графов, используя, в основном, вероятностные методы. Связь $HG(G)$ с другими параметрами графа рассматривали Босек и др. [7].

В. Щечла [4] получил сложный результат о том, что в случае трех цветов мудрецы выигрывают на цикле из n вершин, только если n делится на 3 или при $n = 4$. Полный перечень графов, на которых мудрецы выигрывают в случае трех цветов, получен в [8].

Кроме описанной выше, рассматривалось большое количество других вариантов игры “Hats”. Только в своей статье [9] М. Крживковски описал 36 вариантов правил игры, среди которых много вероятностных. Там же можно найти описание важных результатов и способов применения этой игры.

В данной работе мы рассмотрим модификацию классической детерминированной игры на графе, в которой количество цветов шляп задается для каждого мудреца отдельно. Такая модификация не только представляет собственный интерес, но и позволяет находить более простые стратегии в классической игре, где количество цветов у всех одинаково.

Введем следующие обозначения.

$G = \langle V, E\rangle$ – граф, видимости, т. е. граф, в вершинах которого расположены мудрецы, мы часто будет отождествлять мудрецов с вершинами графа.

$h\colon V \to \mathbb{N}$ – функция “шляпности”, обозначающая сколько различных цветов шляп может получить каждый мудрец. Для мудреца $A \in V$ значение $h(A)$ будем называть *шляпностью* мудреца A. Предполагается, что список цветов шляп, используемых в игре, заранее известен, и мудрец A со шляпностью $h(A)$ получит шляпу, цвет которой выбирается из первых $h(A)$ цветов в этом списке. Множество цветов шляп мудреца A мы будем часто отождествлять с множеством остатков по модулю $h(A)$.

Определение. Игрой “Hats” мы называем пару $\mathcal{HG} = \langle G, h\rangle$, где граф G – граф видимости, а h – функция шляпности. Итак, мудрецы находятся в вершинах графа видимости G и участвуют в *тесте*. Во время теста каждый мудрец v получает шляпу одного из $h(v)$ цветов. Как и раньше, мудрецы пытаются угадать цвет своей шляпы, и если хотя бы один из них справляется с этой задачей, то будем говорить, что мудрецы *выигрывают* или что игра выигрышная. Граф в этом случае мы тоже называем выигрышным, держа в уме, что это свойство зависит и от функции шляпности. Игры, для которых у мудрецов не существует выигрышной стратегии, назовем *проигрышными*.

Будем называть игру $\mathcal{HG}_1 = \langle G_1, h_1\rangle$ *подыгрой* игры $\mathcal{HG}_2 = \langle G_2, h_2\rangle$, если G_1 является подграфом графа G_2, а также $h_1 = h_2\Big|_{V(G_1)}$.

Мы используем стандартные обозначения теории графов: C_n – цикл из n вершин, P_n – путь из n вершин, $P_n(AB)$ – путь из n вершин с концами A и B, K_n – полный граф на n вершинах, $N(v)$ или $N_G(v)$ – множество соседей вершины v в графе G. Через G^A мы обозначаем граф, среди вершин которого есть вершина A. Такое обозначение нам иногда будет нужно, чтобы показать, что два вводимых графа имеют общую вершину A.

Игру на графе G, в которой функция шляпности постоянна и принимает единственное значение k, будем обозначать $\langle G, k\rangle$. Например, в первом абзаце этой статьи мы описали игру $\langle K_n, n\rangle$.

Во втором параграфе рассмотрена игра на полном графе. Основной результат представлен в виде симпатичной теоремы 2.1.

В третьем параграфе представлена “теория конструкторов” – набор теорем, позволяющих строить новые выигрышные графы из уже имеющихся.

В четвертом параграфе мы развиваем новый изящный подход к исследованию игры “Hats”. Для игры Hats на 4-цикле мы описываем эквивалентную игру “Шах ладьей”. Это расширяет арсенал комбинаторных соображений, которые можно применять для построения стратегий. Мы приводим полное исследование игры “Шах ладьей”, а также рассматриваем некоторые ее вариации.

В пятом параграфе мы приводим анализ игры Hats на циклах с произвольной функцией шляпности.

§2. Игра на полных графах

В этом разделе мы описываем игру на полном графе с вершинами $A_1, A_2, \dots, A_n$. Для функции шляпности h введем обозначения $a_i = h(A_i)$. Следующая теорема полностью решает вопрос о том, для каких шляпностей мудрецы выигрывают.

Теорема 2.1. *Пусть шляпности n мудрецов, расположенных в вершинах полного графа, равны $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогда мудрецы выигрывают в том и только том случае, если*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geqslant 1. \tag{1}$$

Доказательство. Так как i-й мудрец угадывает на $\frac{1}{a_i}$-й доле всех раскладов, то если сумма меньше 1, найдется расклад, где никто не угадает.

Докажем, что если сумма больше либо равна 1, мудрецы выигрывают. Мы докажем существование выигрышной стратегии с помощью теоремы Холла о паросочетаниях.

Зафиксируем i и разобьем множество всех раскладов шляп на подмножества по a_i элементов следующим образом. В каждом раскладе шляп удалим цвет c_i и для оставшегося набора

$$c = (c_1, \dots, c_{i-1}, \widehat{c_i}, c_{i+1}, \dots, c_n)$$

(шляпка означает, что цвет пропущен) положим

$$A_c^i = \{(c_1, \dots, c_{i-1}, \ell, c_{i+1}, \dots, c_n) : 0 \leqslant \ell \leqslant a_i - 1\}.$$

Множества A_c^i описывают “потенциально возможные” расклады шляп с точки зрения i-го мудреца: он видит цвета c_j остальных мудрецов и добавляет мысленно к ним возможный цвет ℓ своей шляпы. Имея в виду применение теоремы Холла, назовем множества A_c^i “девушками”, а расклады шляп – “юношами”. Будем говорить, что юноша и девушка знакомы, если расклад шляп является элементом множества A_c^i. Каждый юноша знаком с n девушками, при этом для каждого i каждый юноша знаком ровно с одной девушкой вида A_c^i. Каждая девушка A_c^i знакома ровно с a_i юношами.

Докажем, что существует паросочетание, сопоставляющее каждому юноше девушку. Для этого достаточно проверить условие теоремы, утверждающее, что каждые m юношей знакомы в совокупности с не менее чем m девушками. Рассмотрим произвольный набор из m юношей. Так как при каждом i девушка A_c^i знакома ровно с a_i юношами, m юношей для каждого i знакомы в сумме не менее чем с m/a_i девушками вида A_c^i. Суммируя по i, получаем, что общее число знакомых девушек не меньше $\frac{m}{a_1} + \frac{m}{a_2} + \ldots + \frac{m}{a_n} \geqslant m$. Условие теоремы Холла выполнено.

Итак, существует паросочетание, которое каждому раскладу шляп ставит в соответствие множество вида A_c^i. Отметим, что при выполнении равенства $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 1$ это паросочетание фактически отмечает один элемент в каждом множестве A_c^i. Если же выполняется неравенство $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} > 1$, то "останутся одинокие девушки", т. е. в некоторых множествах A_c^i может не оказаться ни одного отмеченного элемента.

Построенное паросочетание позволяет задать стратегию мудрецов. Пусть j-й мудрец действует по правилу: увидев шляпы других мудрецов, т. е. набор цветов $c = (c_1, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_n)$, он однозначно восстанавливает множество A_c^j, которое фактически состоит из всевозможных способов дополнить набор c до расклада шляп. Мудрец должен назвать тот цвет, который в множестве A_c^j отмечен нашим паросочетанием (а если отмеченного элемента нет, называет цвет произвольно). Поскольку выданный мудрецам расклад шляп отображается нашим паросочетанием как отмеченный элемент одного из множеств A_c^i, для этого расклада шляп i-й мудрец угадает цвет. □

Следствие 2.1.1. *Пусть граф G – это "почти клика", он получается из полного графа K_n с вершинами A_1, A_2, ..., A_n удалением одного ребра A_1A_2. Пусть мудрецы получают шляпы a_1, a_2, ..., a_n цветов. Для того чтобы мудрецы выигрывали на графе G, необходимо выполнение условия*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1 a_2} \geqslant 1. \tag{2}$$

Доказательство. Доля общего числа раскладов, на которых выигрывает A_1 или A_2, равна $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1 a_2}$. Действительно, зафиксируем цвета шляп мудрецов A_3, ..., A_n. Тогда ответы мудрецов A_1 и A_2 определены в соответствии со стратегией. Нетрудно видеть, что из $a_1 a_2$ возможных раскладов шляп для A_1 и A_2 ровно $a_1 + a_2 - 1$ раскладов отвечают случаям, когда кто-то из A_1 или A_2 (возможно, оба) угадывает. Что касается остальных мудрецов, каждый мудрец A_k

выигрывает на $\frac{1}{a_k}$-й части всех раскладов. Если неравенство (2) не выполнено, найдется расклад, где никто не угадает. □

В статье [8] авторы описали сведение задачи об отыскании выигрышных стратегий мудрецов на графах (вообще говоря, очень громоздкой) к задаче SAT (о выполнимости булевой функции). Это позволяет достаточно эффективно с помощью компьютера исследовать на выигрышность небольшие графы.

Замечание. *Условие* (2) *не является достаточным для выигрыша мудрецов на графах “клика без одного ребра”. Как показывает компьютерный счет, при $n = 4$ граф со шляпностями вершин $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = 3$, $a_4 = 6$ (отсутствует ребро A_1A_2) является проигрышным, хотя и удовлетворяет неравенству* (2) *(в этом случае имеет место равенство).*

Определение. Назовем стратегию мудрецов *точной*, если на каждом раскладе шляп угадывает ровно один мудрец.

Следствие 2.1.2. *Точные стратегии существуют тогда и только тогда, когда граф видимости – это полный граф, а функция шляпности удовлетворяет равенству*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 1. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть мудрецы действуют по некоторой стратегии. Если в графе имеются две несмежные вершины A и B, выдадим произвольный расклад шляп всем мудрецам, кроме A и B. Теперь ответы мудрецов A и B определены по стратегии. Выдадим им такие шляпы, чтобы они угадали. На построенном раскладе шляп A, B и, возможно, кто-то еще угадают. Следовательно, стратегия не является точной. То, что в случае полного графа существование точной стратегии эквивалентно равенству (3), следует из доказательства теоремы 2.1. □

Наконец, отметим еще одно забавное следствие доказанной теоремы. Зададимся вопросом, какое наибольшее число шляп можно дать одному мудрецу в игре на графе с n вершинами при фиксированном n так, чтобы мудрецы выигрывали. Для содержательности вопроса следует потребовать, чтобы функция шляпности превращала рассматриваемый граф в *простой* (т. е. чтобы мудрецы не могли бы выиграть ни на каком подграфе). Очевидно, достаточно найти максимальное количество шляп для полных графов.

Таким образом, этот вопрос эквивалентен следующему комбинаторно-числовому вопросу. При фиксированном n найти $\max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где натуральные числа a_n удовлетворяют соотношению (1). Ответ на этот вопрос известен: искомый максимум задается с помощью последовательности Сильвестра (s_n):

$$s_0 = 2, \qquad s_n = 1 + \prod_{i=0}^{n-1} s_i,$$

а именно, $\max(a_1, a_2, \ldots, a_n) = s_n - 1$. Доказательство этого утверждения можно посмотреть в заметке [10].

Последовательность s_n очень быстро растет: так, s_8 представляет собой 27-значное число. Таким образом, если в игре участвуют 8 мудрецов, одному из них можно дать 27-значное количество шляп! В популярном математическом фольклоре фразы “число 8” и “огромные числа” ассоциируются с историей об изобретателе шахмат, который попросил выдать ему в качестве награды $2^{64} - 1$ зерен пшеницы. Число $2^{64} - 1$ “всего лишь” 21-значное. Справедливости ради отметим, что обе последовательности растут как константа в степени n^2.

§3. Конструкторы

В этом разделе мы описываем несколько “конструкторов” – теорем, с помощью которых можно строить новые выигрышные игры, “скрепляя” несколько графов друг с другом.

3.1. Произведение.

Определение. Пусть $G_1 = \langle V_1, E_1\rangle$, $G_2 = \langle V_2, E_2\rangle$ – два графа с одной общей вершиной A. Назовем *суммой графов* G_1, G_2 *по вершине* A граф $\langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2\rangle$. Такую сумму будем обозначать $G_1 +_A G_2$.

Пусть $\mathcal{HG}_1 = \langle G_1, h_1\rangle$ и $\mathcal{HG}_2 = \langle G_2, h_2\rangle$ – две игры, такие что $V(G_1) \cap V(G_2) = \{A\}$. Назовем *произведением* этих игр *по вершине* A игру $\mathcal{HG} = \langle G_1 +_A G_2, h\rangle$, где h совпадает с h_i на $V(G_i) \setminus \{A\}$ и $h(A) = h_1(A) \cdot h_2(A)$ (рис. 1). Произведение игр мы будем обозначать $\mathcal{HG}_1 \times_A \mathcal{HG}_2$.

В такого рода конструкциях удобно считать, что цвет вершины A – это пара (c_1, c_2), где $0 \leqslant c_1 \leqslant h_1(A) - 1$, $0 \leqslant c_2 \leqslant h_2(A) - 1$. Будем говорить в этом случае, что вершина A имеет *композитный цвет.*

Теорема 3.1 (О произведении игр)**.** *Пусть* $\mathcal{HG}_1 = \langle G_1^A, h_1\rangle$ *и* $\mathcal{HG}_2 = \langle G_2^A, h_2\rangle$ *– две игры, такие что* $V(G_1) \cap V(G_2) = \{A\}$*. Если мудрецы*

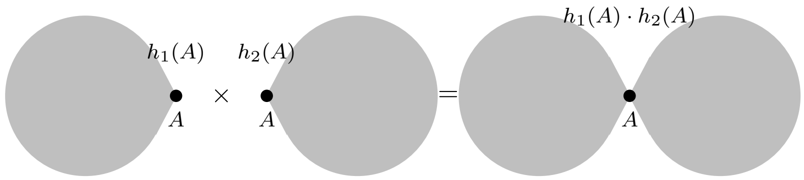


Рис. 1. Произведение игр.

выигрывают в играх $\mathcal{HG}_1$ и $\mathcal{HG}_2$, то они выигрывают и в игре $\mathcal{HG} = \mathcal{HG}_1 \times_A \mathcal{HG}_2$.

Доказательство. Пусть шляпа мудреца A имеет композитный цвет (c_1, c_2), где c_i – цвет шляпы A в игре $\mathcal{HG}_i$. Зафиксируем выигрышные стратегии для игр $\mathcal{HG}_1$ и $\mathcal{HG}_2$ и построим стратегию для игры $\mathcal{HG}_1 \times_A \mathcal{HG}_2$. Пусть все мудрецы из графа $G_i \setminus \{A\}$ играют по выигрышной стратегии для игры $\mathcal{HG}_i$ (при этом соседи A смотрят лишь на компоненту c_i цвета мудреца A). Что касается мудреца A, он будет играть сразу по обеим стратегиям: компоненту c_i своего цвета $(i = 1, 2)$ он найдет по выигрышной стратегии для игры $\mathcal{HG}_i$ (для вычисления этого ответа мудрец A смотрит только на своих соседей из графа G_i).

Построенная стратегия выигрышная, потому что либо кто-то из $G_1 \setminus \{A\}$ или из $G_2 \setminus \{A\}$ угадает цвет, либо A угадает обе компоненты своего цвета. $\square$

Следствие 3.1.1. *Пусть граф G – дерево, тогда мудрецы выигрывают в игре $\langle G, v \mapsto 2^{deg(v)} \rangle$.*

Доказательство. Мудрецы выигрывают в классической игре $\langle P_2, 2 \rangle$. Перемножив $|E(G)|$ экземпляров этой игры, получим требуемый результат. $\square$

Следствие 3.1.1 доказано в статье [7, теорема 11] рассуждением по индукции.

Введем обозначение для функций шляпности, значения которых почти на всем графе постоянны. Пусть A, B, C – некоторые вершины графа. Запись вида h_4^{A2B2C3} означает функцию шляпности, которая везде равна 4 (нижнему индексу) за исключением вершин A и B, шляпность которых равна 2 (как сообщает нам верхний индекс) и вершины C, шляпность которой равна 3.

Отметим частный случай предыдущего следствия.

Следствие 3.1.2. *Мудрецы выигрывают в игре* $\langle P_n(AB), h_4^{A2B2}\rangle$.

Заметим, кстати, что вместе с теоремой 3.1 это следствие является усиленным аналогом леммы о “проталкивания подсказки” из статьи [8, лемма 10]. А именно, если рассматривать шляпность 2 вершины A в графе G_1 как подсказку, которая ограничивает количество цветов у мудреца A (должно бы быть 4 цвета, но мы “упрощаем” этому мудрецу игру), то можно “протолкнуть” эту шляпность 2 вдоль пути AB, где у всех остальных мудрецов шляпность 4: в результате мы получаем, что в графе $G_1 +_A P_n(AB)$ эта шляпность 2 “переехала” из вершины A в вершину B.

3.2. Подстановка. Следующий конструктор убирает из графа вершину и вставляет на ее место другой граф.

Определение. Пусть G_1 и G_2 – два графа, не имеющие общих вершин. *Подстановкой* графа G_2 в граф G_1 *на место вершины* v назовем граф $(G_1 \setminus \{v\}) \cup G_2$ с дополнительными ребрами, которые соединяют каждую вершину G_2 с каждым соседом v, рис. 2. Такую подстановку будем обозначать $G_1[v := G_2]$

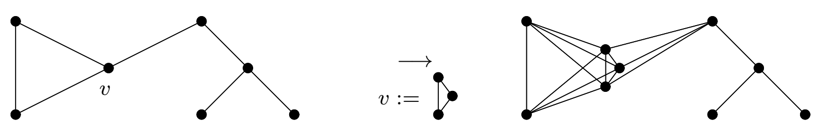


Рис. 2. Подстановка.

Теорема 3.2. *Пусть мудрецы выигрывают в игры* $\mathcal{HG}_1 = \langle G_1, h_1\rangle$ *и* $\mathcal{HG}_2 = \langle G_2, h_2\rangle$. *Для любой вершины* $v \in V(G_1)$ *положим* $G = G_1[v := G_2]$. *Тогда игра* $\mathcal{HG} = \langle G, h\rangle$ *выигрышная, где*

$$h(u) = \begin{cases} h_1(u) & u \in G_1 \\ h_2(u) \cdot h_1(v) & u \in G_2 \end{cases}$$

Доказательство. Пусть f_1 и f_2 – выигрышные стратегии игр $\mathcal{HG}_1$ и $\mathcal{HG}_2$ соответственно.

Пусть каждый мудрец u из подграфа G_2 графа G получает композитный цвет (c_1, c_2), где $0 \leqslant c_1 \leqslant h_1(v) - 1$, $0 \leqslant c_2 \leqslant h_2(u) - 1$. Мудрецы могут вычислять координаты своего цвета независимо, пусть они находят цвет c_1 по стратегии $f_1(v)$, а c_2 по стратегии f_2. В частности это означает, что все мудрецы из подграфа G_2 назовут одну и ту же первую компоненту.

Что касается остальных мудрецов из G, те из них, кто не является соседом v, играют по стратегии f_1. Мудрецы из G_1, являющиеся соседями мудреца v, после подстановки обнаружили, что вместо одного соседа v у них теперь имеется $|V(G_2)|$ соседей (вообще говоря, с разными шляпами). Эти мудрецы поступают следующим образом. Они видят все шляпы на подграфе G_2, знают стратегии мудрецов на этом подграфе, и значит, понимают, кто на подграфе G_2 угадает вторую компоненту своего цвета, обозначим этого игрока v_{new} (если угадавших несколько, они выбирают в качестве v_{new} одного, например, того, кто идет первым в заранее составленном списке). Тогда пусть каждый (бывший) сосед v смотрит только на v_{new}, точнее, на первую компоненту его цвета, и тоже играет по стратегии f_1.

В результате либо угадает кто-то из подграфа $G_1 \setminus \{v\}$, либо v_{new} угадает обе компоненты. □

Следствие 3.2.1. *Мудрецы выигрывают в играх, показанных на рис.* 3.

Доказательство. Применим теорему 3.2 к играм $\mathcal{HG}_1 = \langle P_2, 2\rangle$ и $\mathcal{HG}_2 = \langle P_n(AB), h_4^{A2B2}\rangle$. □

Отметим, что о выигрыше мудрецов на первом графе (рис. 3) нам известно из теоремы 2.1.

3.3. Добавление вершины шляпности 2. Следующие теоремы-конструкторы позволяют получать новые выигрышные графы, добавляя к имеющемуся графу небольшие конструкции.

Теорема 3.3. *Пусть $\langle G, h\rangle$ – выигрышная игра и пусть $B, C \in V(G)$. Тогда мудрецы выигрывают в игре $\langle G', h'\rangle$, где G' – граф, полученный из G добавлением к нему вершины A и ребер AB и AC (рис.* 4*), а*

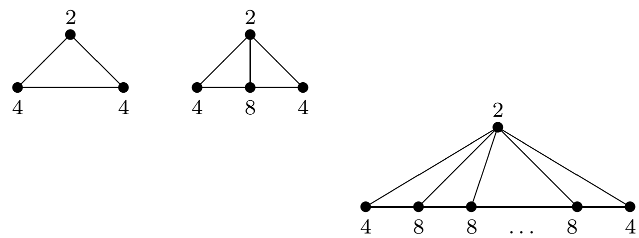


Рис. 3. Подстановка в игру $\langle P_2, 2\rangle$ игры $\langle P_n(AB), h_4^{A2B2}\rangle$.

шляпность задается формулой

$$h'(v) = \begin{cases} 2, & \textit{если } v = A, \\ h(v)+1, & \textit{если } v = B \textit{ или } C, \\ h(v), & \textit{иначе.} \end{cases}$$

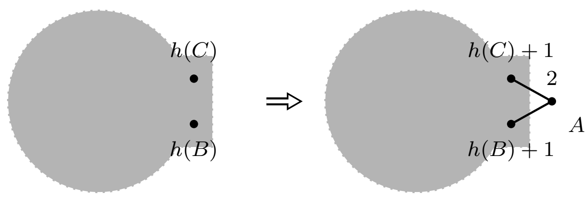


Рис. 4. Добавление вершины шляпности 2.

Доказательство. Опишем выигрышную стратегию. После применения конструктора у мудрецов B и C появилась шляпа нового цвета. Пусть мудрец A называет цвет 1, если видит у мудрецов B или C новый цвет, иначе называет 0. Мудрецы B и C, если видят на мудреце A цвет 0, то оба называют свой новый цвет. Таким образом, в случае, если мудрецу A во время теста дадут шляпу цвета 0, то кто-то из A, B и C тут же угадает. Если же мудрецу A дадут шляпу цвета 1, то мудрецы B и C могут считать, что у них не новый цвет (в этом случае A угадает), а следовательно, могут играть на своем графе G, как будто у них на один цвет меньше. В результате кто-то на графе G угадает цвет. $\square$

Следующая теорема является обобщением этого конструктора.

Теорема 3.4. *Пусть* $\langle G_1, h_1\rangle$, $\langle G_2, h_2\rangle$ *– две игры, в которых мудрецы выигрывают. Пусть* A_1, A_2, $\dots$, $A_k \in V_1$; B_1, B_2, $\dots$, $B_m \in V_2$. *Рассмотрим граф* $G' = \langle V', E'\rangle$, *получающийся добавлением к графу* $G_1 \cup G_2$ *всех ребер* A_iB_j: $V' = V_1 \cup V_2$, $E' = E_1 \cup E_2 \cup \{A_iB_j, i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, m\}$ *(рис. 5). Тогда мудрецы выигрывают в игре* $\langle G', h'\rangle$, *где*

$$h'(u) = \begin{cases} h_1(u), & u \in G_1 \setminus \{A_1, A_2, \dots, A_k\},\\ h_2(u), & u \in G_2 \setminus \{B_1, B_2, \dots, B_m\},\\ h_1(u)+1, & u \in \{A_1, A_2, \dots, A_k\},\\ h_2(u)+1, & u \in \{B_1, B_2, \dots, B_m\}. \end{cases}$$

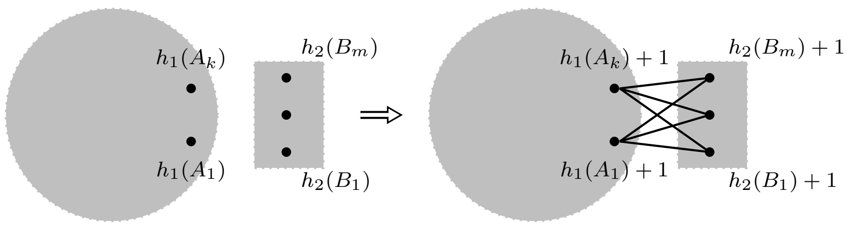


Рис. 5. “Сшиваем” два графа, $k = 2$, $m = 3$.

Доказательство. Аналогично теореме 3.3. По сравнению с исходными графами у мудрецов A_i и B_j добавился один новый цвет, будем считать, что этот цвет – красный. Пусть для каждого i мудрец A_i, если видит на ком-нибудь из B_j красный цвет, говорит “красный”, иначе он смотрит лишь на своих соседей в G_1 и играет по выигрышной стратегии в G_1. Пусть для каждого j мудрец B_j, если видит на ком-нибудь из A_i красный цвет, то смотрит лишь на своих соседей в G_2 и играет по стратегии для G_2, иначе называет “красный”. Нетрудно видеть, что эта стратегия выигрышная. □

Следствие 3.4.1. *Пусть граф* G *– это цикл* C_n $(n \geqslant 4)$, B, A *и* C *– три последовательные вершины цикла. Тогда мудрецы выигрывают в игре* $\langle G, h_4^{A2B3C3}\rangle$.

Доказательство. По следствию 3.1.2 мудрецы выигрывают на графе $P_{n-1}(CB)$ с шляпностями $24\dots42$. С помощью конструктора 3.3 добавим к этому графу вершину A. □

Это следствие усиливает лемму “о подсказке $A-1$ для цикла” [8, лемма 9] и к тому же не опирается на громоздкие технические вычисления.

Следующий конструктор показывает, что если в теореме 3.3 вершины B и C соединены ребром, то количество цветов шляп у этих вершин можно сильно увеличить.

Теорема 3.5. *Пусть мудрецы выигрывают в игре $\langle G, h\rangle$, B и C – произвольные вершины графа G, соединенные ребром. Тогда мудрецы выиграют еще и в игре $\langle G', h'\rangle$, где граф G' получен из графа G добавлением к нему вершины A и ребер AB и AC. Новая функция шляпности h' задается формулой:*

$$h'(v) = \begin{cases} 2 & \textit{если } v = A \\ 2h(v) & \textit{если } v = B \textit{ или } v = C \\ h(v), & \textit{иначе} \end{cases}$$

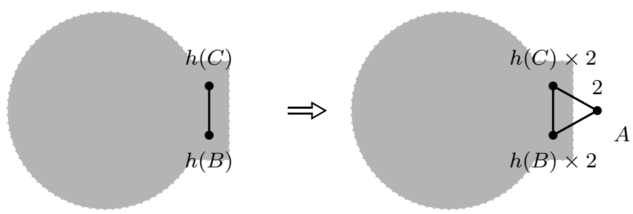


Рис. 6. Добавление вершины шляпности 2 к ребру BC.

Доказательство. Будем считать, что у мудрецов B и C композитные цвета шляп (c, ϵ), где c – возможный цвет шляпы в игре $\langle G, h\rangle$, $\epsilon \in \{0, 1\}$. Пусть мудрец A называет цвет $\epsilon_B + \epsilon_C \pmod 2$. Мудрецы B и C видят своих соседей в графе G, и цвета, которые определяет выигрышная стратегия в игре $\langle G, h\rangle$, – это первые компоненты их ответов. Видя шляпу мудреца A, а также шляпы друг друга, мудрецы B и C могут вычислить, при каких значениях ϵ_B и ϵ_C мудрец A не угадал цвет – их они возьмут в качестве второй компоненты. Мудрецы выиграли. □

3.4. Добавление вершин шляпностей 2 и 3, соединенных ребром. Прикрепить к графу новый фрагмент с помощью двух независимых “перемычек”, видимо, трудно. Нам это удалось только для совсем маленького фрагмента.

Теорема 3.6. *Пусть $\mathcal{HG} = \langle G, h\rangle$ – выигрышная игра, Z и C – произвольные вершины графа G. Пусть граф G' получается из G добавлением двух новых вершин A и B и ребер ZA, AB, BC (рис. 7). Тогда мудрецы выигрывают в игре $\mathcal{HG}' = \langle G', h'\rangle$, где*

$$h'(v) = \begin{cases} 2, & \text{если } v = A, \\ 3, & \text{если } v = B, \\ 2h(v), & \text{если } v = Z, \\ h(v) + 1, & \text{если } v = C, \\ h(v), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

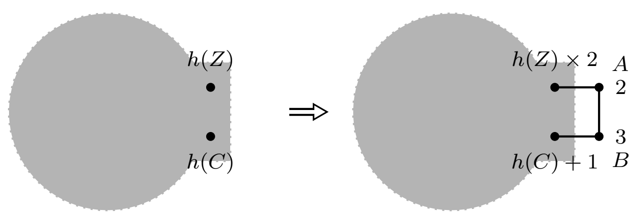


Рис. 7. Добавление двух вершин шляпностей 2 и 3, соединенных ребром.

Доказательство. Обозначим через c_x цвет шляпы, которую получил мудрец x. Цвет вершины Z будем считать композитным: $c_Z = (\epsilon_Z, C)$, где бит $\epsilon_Z \in \{0, 1\}$, а цвет C – один из $h(Z)$ цветов игры $\mathcal{HG}$.

Опишем выигрышную стратегию.

- Пусть мудрец A, в случае $c_B \neq 2$, называет цвет, который видит на мудреце B, а иначе называет бит ϵ_Z.
- Мудрец B, в случае если видит на мудреце C шляпу нового цвета, говорит “2”, иначе говорит $1 - c_A$.
- Мудрец C называет новый цвет, если $c_B \neq 2$, если же $c_B = 2$, мудрец C играет по стратегии для игры $\mathcal{HG}$.
- Мудрец Z выбирает бит $\epsilon_Z \neq c_A$, а вторую компоненту своего цвета находит по стратегии для игры $\mathcal{HG}$.

- Мудрец из графа $G \setminus \{C, Z\}$ играют по стратегии игры $\mathcal{HG}$. При этом мы считаем, что соседи мудреца Z из графа $G \setminus \{Z\}$ смотрят лишь на вторую компоненту цвета Z, а соседи мудреца C из графа $G \setminus \{C\}$ не отличают новый цвет C от цвета 0.

Теперь разберем все варианты пар цветов (c_A, c_B) и проверим, что стратегия выигрышная.

В случаях $(0,0)$ и $(1,1)$ угадывает мудрец A.

В случаях $(0,1)$ и $(1,0)$ угадает B или C.

В случаях $(0,2)$ и $(1,2)$ мудрец A угадает, если $c_A = \epsilon_Z$, а мудрец B угадает, только если у мудреца C новый цвет. В остальных случаях все мудрецы на графе G играют по выигрышной стратегии для игры $\mathcal{HG}$, и угадает кто-то из них. □

Следствие 3.6.1. *Пусть граф G – это цикл C_n $(n \geqslant 4)$, A, B, C – три последовательные вершины цикла. Тогда мудрецы выигрывают в игру $\langle G, h_4^{A2B3C3} \rangle$.*

Доказательство. Применим конструктор 3.6 к пути $P_{n-2}(ZC)$ с шляпностями $24\dots42$ (эта игра выигрышная по следствию 3.1.2). □

3.5. Добавление висячей вершины большой шляпности. Наш последний конструктор замечателен тем, что работает как для выигрышных игр, так и для проигрышных. Он утверждает, что добавление к графу висячей вершины, шляпность которой больше 2, не влияет на результат игры.

Определение. Дана игра $\mathcal{HG} = \langle G, h \rangle$. Назовем *игрой $\mathcal{HG}$ с подсказкой A^** следующую игру. Мудрецы играют на графе G с функцией шляпности h, но **во время теста** к мудрецу A подойдет чертик и произнесет истинное утверждение “я тебе только что надел шляпу одного из двух цветов c_1 или c_2”. Мудрецы во время совещания знают о том, что чертик собирается сделать подсказку, но не знают, какие именно цвета он назовет. Поэтому мудрецы определяют стратегии всех, кроме A, как обычно, а мудрец A получает набор из $C^2_{h(A)}$ стратегий – по одной на каждую возможную подсказку.

В статье авторов [8] приведена “теория игры Hats с подсказками” для случая когда шляпности всех мудрецов равны 3. Следующая лемма из [8] практически без изменений переносится на случай произвольных шляпностей. Мы приводим здесь ее доказательство для самодостаточности изложения.

Лемма 3.7. *Подсказка A^* не влияет на исход игры.*

Доказательство. Допустим, что мудрецы выигрывают с подсказкой A^*. Зафиксируем для всех мудрецов, кроме A, стратегии, которые они используют при игре с подсказкой A^*, и покажем, как можно задать стратегию f_A мудреца A, чтобы с этим набором стратегий мудрецы выигрывали без подсказки.

Допустим, что при назначении мудрецу A шляпы цвета x нашелся расклад шляп ℓ_x на всем графе, в котором мудрец A получил цвет x, соседи мудреца A получили цвета $u, v, w, \ldots$, остальные мудрецы тоже получили какие-то цвета, и при этом никто из мудрецов (исключая A) не угадал. Тогда мы хотим, чтобы в этой ситуации мудрец A угадал свой цвет, т. е. его стратегия должна удовлетворять требованию $f_A(u, v, w, \ldots) = x$.

Эти требования, полученные для разных раскладов ℓ_x, не противоречат друг другу. Действительно, если бы существовал еще один расклад ℓ_y, где у соседей по-прежнему цвета $u, v, w, \ldots$, а мудрец A получил другой цвет y, то мудрецы не могли бы выиграть с подсказкой A^* , поскольку, имея эти два расклада, можно сообщить мудрецу A, что цвет его шляпы x или y, после чего реализовать тот из этих двух раскладов, для которого он не угадывает цвет своей шляпы. □

Теорема 3.8. *Пусть $\mathcal{HG}_1 = \langle G_1, h_1\rangle$, B – произвольная вершина графа G_1, $G_2 = G_1 +_B P_2(AB)$. Пусть $\mathcal{HG}_2 = \langle G_2, h_2\rangle$, где $h_2\Big|_{V(G_1)} = h_1$, $h_2(A) \geqslant 3$. Игра $\mathcal{HG}_1$ выигрышная тогда и только тогда, когда игра $\mathcal{HG}_2$ выигрышная.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно. Если игра без висячей вершины выигрышная, то с висячей вершиной тоже (мудрецы выиграют на подграфе).

Докажем, что если игра $\mathcal{HG}_2$ выигрышная, то и игра $\mathcal{HG}_1$ выигрышная. Для этого проверим, что если мудрецы выигрывают в игре $\mathcal{HG}_2$, то они смогут выиграть и в игре $\mathcal{HG}_1$ с подсказкой B^*.

Пусть f_2 – выигрышная стратегия игры $\mathcal{HG}_2$. Построим выигрышную стратегию игры $\mathcal{HG}_1$ с подсказкой B^*. Для этого, во первых, нужно задать стратегии мудрецов из $V(G_1) \setminus \{B\}$ – пусть они пользуются стратегией f_2. Во вторых, для каждой пары различных цветов (b_1, b_2), которые могут появиться в подсказке, нужно задать стратегию мудреца B. Поскольку $h_2(A) \geqslant 3$, для каждой пары (b_1, b_2) можно подобрать цвет a, который мудрец A заведомо не назовет, если увидит у мудреца B цвет b_1 или b_2. Пусть мудрец B, получив подсказку (b_1, b_2), называет цвет, который рекомендует назвать стратегия f_2, когда он видит у мудреца A цвет a, а цвета остальных соседей заданы текущим раскладом шляп. Построенная стратегия выигрышная, потому что когда в игре $\mathcal{HG}_2$ мы даем мудрецу A *во время теста* шляпу цвета a и следим, чтобы он не угадал (не выдавая B какие-то шляпы), то для мудреца B остаются возможными помимо прочего цвета b_1 и b_2, и на графе G_1 всегда кто-то угадывает. Значит, мудрецы угадывают с подсказкой B^*. Тогда по лемме 3.7 они выигрывают и в $\mathcal{HG}_1$. □

§4. Шахматы вслепую

В этом разделе мы описываем игру, являющуюся частным случаем игры "Hats" на 4-цикле. Эта игра открывает перед нами целый класс новых игр по коллективному угадыванию. Все, что требуется – это изменить целевую функцию угадывания: вместо угадывания отмеченного элемента в множестве (цвета шляпы) мудрецы будут пытаться поставить шах невидимому королю! Точно так же мудрецы могли бы пытаться совершать любые действия, для которых при отсутствии информации не гарантирован стопроцентный успех.

Шах ладьей. Игра "*Шах ладьей*". Два шахматиста $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ сидят друг напротив друга, на стене за спиной у каждого закреплена "его" шахматная доска так, что каждый шахматист не видит свою доску, но видит доску соперника. Судья ставит на каждую из досок черного короля. Таким образом, шахматисты видят короля на "чужой" доске, но не видят короля на своей доске. После этого каждый шахматист независимо от другого должен указать на одну клетку своей шахматной доски и судья ставит на эту клетку белую ладью. Если хотя бы один из королей оказался под боем ладьи (или ладья поставлена на клетку, где стоит король), шахматисты выиграли, в противном случае они проиграли.

Шахматные доски игроков могут быть произвольного и неодинакового размера, который известен заранее. Как и в игре "Hats", шахматисты заранее вырабатывают публичную детерминированную стратегию. Судья знает эту стратегию и играет против шахматистов.

Поясним, каким образом игра “Шах ладьей” сводится к игре “Hats”. Пусть граф G – это 4-цикл $ABCDA$, а шляпность задается функцией h. На самом деле, граф G – это полный двудольный граф $K_{2,2}$ с долями $\{A, C\}$ и $\{B, D\}$. Назовем пару игроков A, C шахматистом $\mathcal{L}$ и дадим ему доску $h(A) \times h(C)$, а пару B, D – шахматистом $\mathcal{R}$, его доска имеет размеры $h(B) \times h(D)$. Цвета шляп, выданных мудрецам A и C, можно интерпретировать как координаты клетки, на которую ставят короля. Поскольку эти два мудреца не видят друг друга, они оба ничего не знают о расположении своего короля. Пытаясь угадать цвета шляп, A и C называют по одному цвету. Пара названных цветов однозначно интерпретируется как *крест*, состоящий из одной горизонтали и одной вертикали на шахматной доске, или, что то же самое, как выставление шахматной ладьи в центр этого креста. Очевидно, один или оба шахматиста угадывают свой цвет в том и только том случае, когда король стоит на одной из клеток креста, т. е. под боем ладьи. Для B и D интерпретации аналогичны.

Таким образом, игра “Hats” на цикле $ABCDA$ с функцией шляпности h эквивалентна игре “Шах ладьей” на досках $L(h(A) \times h(C))$ и $R(h(B) \times h(D))$. Разумеется, исход игры не зависит от того, которую из досок мы назначим левой, а которую правой.

Игру “Шах ладьей” можно определить и для случая, когда n шахматистов находятся в вершинах произвольного графа: в этом случае у каждого шахматиста имеется собственная шахматная доска, каждый шахматист видит доски своих коллег, находящихся в смежных с ним вершинах, и по-прежнему не видит свою собственную доску. Требуется, чтобы после выставления ладей хотя бы на одной доске король оказался под шахом. Такой вариант игры эквивалентен игре “Hats” на, так сказать, “удвоенном” графе. Здесь мы не будем изучать эту игру.

Вернемся к случаю, когда шахматистов двое. Пусть игра идет на досках $L(a \times c)$ и $R(b \times d)$. Введем *стандартные обозначения*, с помощью которых будем описывать стратегии мудрецов.

Пронумеруем клетки доски $L(a \times c)$ слева направо сверху вниз, рис. $8a$, для примера мы используем доски $L(2 \times 3)$ и $R(3 \times 4)$. Стратегию шахматиста $\mathcal{R}$ будем задавать таблицей: в клетках доски $R(b \times d)$ поставим ac меток вида r_i, где индекс i пробегает номера клеток доски $L(a \times c)$ (на одной клетке может стоять сразу несколько меток r_i). Метка r_i означает, что шахматист $\mathcal{R}$, увидев, что король напарника стоит на i-й клетке доски $L(a \times c)$, поставит ладью на клетку доски $R(b \times d)$ с меткой r_i (рис. 8b.).

Стратегию шахматиста $\mathcal{L}$ тоже зададим с помощью доски $b \times d$, см. рис. 8c. Здесь в каждой клетке доски $R(b\times d)$ поставлено число от 1 до ac – номер какой-то клетки доски $L(a\times c)$. В каждой клетке стоит ровно одно число, некоторые из чисел от 1 до ac могут отсутствовать в этой таблице, некоторые могут повторяться. Когда шахматист $\mathcal{L}$ видит, что на доске $R(b\times d)$ король стоит в клетке с меткой k, он поставит ладью на клетку номер k доски $L(a \times c)$.

Чтобы избежать недоразумений в обозначениях, для шахматиста $\mathcal{R}$ мы используем метки вида "буква r с индексом", а для шахматиста $\mathcal{L}$ – метки вида "число". Линии на доске L мы называем строками и столбцами, а на доске R – вертикалями и горизонталями.

1	2	3
4	5	6

a) Разметка доски L

r_4	r_5		
r_6			r_3
		r_2	r_1

b) Стратегия шахматиста $\mathcal{R}$

1	3	3	5
2	1	4	5
2	6	6	4

c) Стратегия шахматиста $\mathcal{L}$

Рис. 8. Способ задавать стратегии шахматистов.

Определение. Пусть король стоит в какой-либо клетке i доски $L(a\times c)$. Клетки доски $L(a \times c)$, с которых ладья не может побить этого короля, назовем *i-слабыми.* Например, клетки 5 и 6 доски $L(2 \times 3)$ на рис. 8a – 1-слабые.

Лемма 4.1. *Пусть игра идет на досках $L(a\times c)$ и $R(b\times d)$. Стратегия шахматистов выигрышная в том и только том случае, если при всех i, $1 \leqslant i \leqslant ac$, все клетки доски $R(b\times d)$, помеченные номерами i-слабых клеток, находятся в кресте с центром r_i.*

Доказательство. Пусть клетка ℓ доски $L(a \times c)$ является i-слабой, а судья поставил королей на клетку i доски $L(a \times c)$ и на клетку доски $R(c \times d)$, помеченную числом ℓ. Тогда шахматист L поставит ладью на клетку ℓ доски $L(a \times c)$, и она не дает шах королю. В то же время, шахматист $\mathcal{R}$ поставит ладью на клетку доски $R(c \times d)$ с меткой r_i, и, чтобы шахматисты выигрывали в этом случае, эта ладья должна давать шах. Значит, клетка, помеченная числом ℓ, лежит в кресте с центром r_i. $\square$

Из леммы следует, что для любой выигрышной стратегии выполняется свойство: если клетка ℓ доски $L(a \times c)$ одновременно является i-слабой, j-слабой и т. д., то все клетки доски $R(b \times d)$, помеченные числом ℓ, (если такие есть) лежат в пересечении крестов с центрами r_i, r_j и т. д. Например, для стратегий на рис. 8 (ниже мы докажем, что они выигрышные) обе клетки с меткой 1 на доске $R(3 \times 4)$ лежат в пересечении крестов r_5 и r_6, поскольку клетки 5 и 6 доски $L(2 \times 3)$ – 1-слабые. (Пересечение крестов r_5 и r_6 подкрашено на рис. 8*b*.)

Приведем сводку результатов, дающих исчерпывающее исследование игры “Шах ладьей” для двух шахматистов. Мы считаем, что самую короткую из имеющихся сторон имеет левая доска, и доски всегда расположены так, что число горизонталей у них не превосходит числа вертикалей.

Теорема 4.2. *В игре “Шах ладьей” шахматисты выигрывают на следующих парах досок*

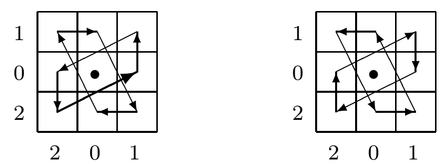
Win1) *одна из досок имеет размер* $1 \times k$, k *– любое;*
Win2) $L(2 \times k)$ *и* $R(2 \times m)$, *где* k *и* m *– любые;*
Win3) $L(3 \times 3)$, $R(3 \times 3)$;
Win4) $L(2 \times 3)$, $R(3 \times 4)$;
Win5) $L(2 \times 4)$, $R(3 \times 3)$;
Win6) $L(2 \times 2)$, $R(k \times m)$, *где* $\min(k, m) \leqslant 4$.
На следующих парах досок шахматисты проигрывают
Lose1) $L(2 \times 3)$, $R(4 \times 4)$;
Lose2) $L(2 \times 3)$, $R(3 \times 5)$;
Lose3) $L(2 \times 4)$, $R(3 \times 4)$;
Lose4) $L(2 \times 5)$, $R(3 \times 3)$;
Lose5) $L(3 \times 3)$, $R(3 \times 4)$;
Lose6) $L(2 \times 2)$, $R(5 \times 5)$.

Для прочих размеров досок применима логика “мажоризации”. Например, шахматисты проигрывают на досках $L(3 \times 4)$, $R(3 \times 4)$, потому что они проигрывают даже в более простом случае Lose3. Шахматисты выигрывают на досках $L(2 \times 3)$, $R(3 \times 3)$, потому что они выигрывают даже, когда одна из досок крупнее, как в Win3.

Доказательство теоремы. Win1) Тривиально.

Win2) На языке шляп в соответствующем 4-цикле шляпность двух соседних мудрецов равна 2, эти мудрецы обеспечат выигрыш, не глядя на остальных.

Win3) Это утверждение – пересказ на язык игры “Шах ладьей” известного утверждения о том, что мудрецы выигрывают на 4-цикле, если всем дают шляпы трех цветов ([2, 4]). Например, стратегия мудрецов, описанная в [11], на шахматном языке выглядит следующим образом. Если шахматист видит, что король напарника стоит в центре, он ставит ладью в центр. В противном случае он ставит ладью на ту клетку, куда показывает стрелка, ведущая от короля (на вспомогательной диаграмме для этого шахматиста), см. рис. 9. Координаты клеток на рисунке соответствуют номерам цветов шляп из [11]. Так, шахматист $\mathcal{L}$, увидев, что король напарника стоит на клетке $(2, 2)$, ставит свою ладью на клетку $(1, 0)$ (этот случай соответствует более жирной стрелке на левом рис. 9).



Стратегия $\mathcal{L}$ Стратегия $\mathcal{R}$

Рис. 9. Вокруг непрозрачного баобаба стоят четыре мудреца...

Win4), Win5) Пусть стратегии шахматистов заданы на рис. 8 и 10. Непосредственным перебором проверяется утверждение леммы 4.1 для этих стратегий. Поэтому шахматисты выигрывают.

1	2	3	4
5	6	7	8

a) Разметка доски L

r_5		r_6
	$r_1 r_2$ r_3	
r_8	r_4	r_7

b) Стратегия шахматиста $\mathcal{R}$

3	5	4
8	6	8
2	7	1

c) Стратегия шахматиста $\mathcal{L}$

Рис. 10. Выигрышная стратегия для игры $L(2 \times 4)$, $R(3 \times 3)$.

Win6) На языке шляп этот случай означает, что цикл содержит путь P_3 с шляпностями вершин 2, x, 2, где $x \leqslant 4$. На таком пути мудрецы выигрывают по следствию 3.1.2.

Lose1) Докажем, что у шахматистов нет выигрышной стратегии.

Пусть зафиксирована стратегия шахматиста $\mathcal{R}$, см. для примера рис. 11b. Попробуем понять, как может быть устроена стратегия шахматиста $\mathcal{L}$, а именно, где на доске $R(4 \times 4)$ могут находиться клетки с метками 1, 2, и 3. По лемме 4.1 клетки с меткой 1 лежат в пересечении крестов r_5 и r_6, клетки с меткой 2 – в пересечении крестов r_4 и r_6, а клетки с меткой 3 – в пересечении r_4 и r_5.

1	2	3
4	5	6

a) Разметка доски L

r_4		r_5	
			r_3
		r_2	
r_6	r_1		

b) Стратегия шахматиста $\mathcal{R}$

Рис. 11

Заметим, что объединение попарных пересечений любых трех крестов (возможно, совпадающих) на доске $R(4 \times 4)$ содержит не более 8 клеток. Действительно, разберем случаи.

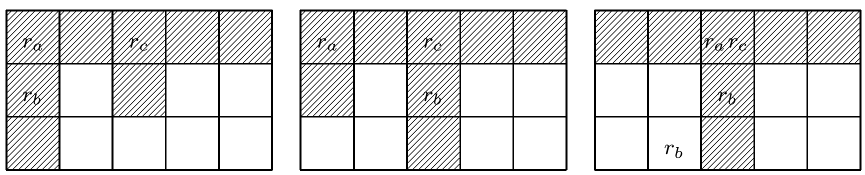
1. Если центры крестов лежат в разных вертикалях и горизонталях, то каждое попарное пересечение состоит из двух клеток – см. пример на рис. 11b, где закрашено пересечение крестов r_5 и r_6 – итого не более 6 клеток.

2. Если центры никаких двух крестов не совпадают и при этом два центра лежат на одной горизонтали или вертикали (как например r_4 и r_5 на рис. 11b, то пересечение этих двух крестов содержит 4 клетки и добавление третьего креста может дать в объединение попарных пересечений еще 4 клетки, только если центр этого креста лежит на одной линии с одним из первых двух центров (как r_4 и r_6 на рис. 11b. В этом случае получается 8 клеток, при этом 7 из них лежат в одном кресте (в рассматриваемом примере – в кресте r_4).

3. Если центры двух крестов совпадают, то пересечение этих крестов содержит 7 клеток. При любом положении третьего центра множество попарных пересечений не увеличится.

Итак, для клеток с метками 1, 2, 3 на доске $R(4 \times 4)$ имеется не более 8 позиций, аналогично для клеток с метками 4, 5, 6 тоже не более 8 позиций. Поскольку доска $R(4 \times 4)$ содержит 16 клеток, мы имеем 8 позиций для меток 1, 2, 3 и 8 позиций для меток 4, 5, 6. Но, как установлено в переборе, 8 позиций реализуются только в виде множества “целый крест плюс одна клетка”. Осталось заметить, что двумя крестами и двумя дополнительными клетками невозможно накрыть всю доску $R(4 \times 4)$.

Lose2) Как и в п. Lose1), убеждаемся, что объединение попарных пересечений любых трех крестов (возможно, совпадающих) на доске $R(3 \times 5)$ содержит не более 8 клеток; случаи, в которых это объединение содержит 7 или 8 клеток, показаны на рис. 12 – это случаи, когда центры двух крестов лежат в одной вертикали или горизонтали (в том числе, когда центры лежат в одной клетке). Во всех вариантах объединение попарных пересечений трех крестов занимает одну горизонталь полностью, а в каждой из двух других горизонталей оно занимает меньше половины клеток. Это значит, что объединение двух таких множеств не может составлять всю доску.



8 клеток 8 клеток 7 клеток

r_b – в любом месте

Рис. 12. Объединение попарных пересечений трех крестов на доске $R(3 \times 5)$.

Lose3) Это рассуждение сообщил нам Олег Чемокос. Зафиксируем какие-нибудь стратегии шахматистов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ и проверим, что найдутся положения королей, где оба короля избегают шаха.

В стандартных обозначениях каждая клетка i доски $L(2 \times 4)$ определяет три i-слабые клетки (рис. $10a$). При этом в роли слабых клеток могут оказаться любые три клетки одной строки.

Стратегию шахматиста $\mathcal{L}$ задаем расстановкой меток на доске $R(3{\times}4)$. Клетки с метками, соответствующими первой строке доски $L(2 \times 4)$, покрасим в белый цвет, остальные в черный. Не умаляя общности можем считать, что клеток белого цвета не меньше, чем черного. Следующие два случая охватывают все возможности, которыми может быть реализовано это “не меньше”.

1. Одна из горизонталей доски $R(3{\times}4)$ (для определенности первая) содержит три белые клетки u_1, u_2, u_3 и еще одна горизонталь (вторая)

– две белые клетки u_4 и u_5. Тогда в первой строке доски $L(2 \times 4)$ можно выбрать такую клетку ℓ, что метка ℓ встречается в первых двух горизонталях доски $R(3 \times 4)$ не более одного раза, причем если встречается, то в первой горизонтали, скажем, в клетке u_1. Остальные клетки первой строки доски $L(2\times 4)$ являются $(\ell+4)$-слабыми, и тогда по лемме 4.1 клетки u_2, u_3, u_4 и u_5 лежат в одном кресте, что неверно.

2. Каждая горизонталь доски $R(3 \times 4)$ содержит две белые клетки. Выберем в первой строке доски $L(2 \times 4)$ такую клетку ℓ, что метка ℓ встречается на доске $R(3\times 4)$ не более одного раза (для определенности в третьей горизонтали). Остальные клетки первой строки доски $L(2\times 4)$ являются $(\ell + 4)$-слабыми, и соответствующие метки в первых двух горизонталях доски $R(3 \times 4)$ опять не лежат в одном кресте.

Полученное противоречие доказывает, что стратегии не могут быть выигрышными.

Lose4) Разметим доску L как на рис. 13 a), стратегия шахматиста $\mathcal{L}$ задается выписыванием в каждую клетку доски $R(3 \times 3)$ числа от 1 до 10 – номера клетки доски $L(2 \times 5)$. Поскольку на доске $L(2 \times 5)$ всего две строки, найдутся две горизонтали доски $R(3 \times 3)$ и две такие клетки в каждой из них, что метки, записанные в этих клетках, соответствуют четырем клеткам доски $L(2 \times 5)$ (возможно, среди них есть совпадающие), лежащим в одной строке. Пусть j – номер клетки из второй строки, являющийся i-слабым сразу по отношению ко всем этим клеткам.

Например, пусть на доске $R(3 \times 3)$ стоят метки 1, 2, 3, 4, как на рис. 13 b). Тогда 1-, 2-, 3- и 4-слабым одновременно является номер 10. Это значит, что ладья на клетке r_{10} доски $R(3 \times 3)$ держит под боем клетки с метками 1, 2, 3 и 4. Но это невозможно: чтобы бить метки 1 и 2, она должна находиться в верхней горизонтали доски $R(3 \times 3)$, а чтобы бить 3 и 4 – в нижней.

По той же причине невозможен и общий случай: клетка r_j должна оказаться сразу в двух горизонталях $R(3 \times 3)$.

Lose5) Допустим, что у шахматистов существует выигрышная стратегия. Пронумеруем клетки доски $L(3 \times 3)$ числами от 1 до 9. Тогда стратегия шахматиста $\mathcal{R}$ задается выставлением на доску $R(3 \times 4)$ девяти символов – r_1, r_2, $\ldots$, r_9, а стратегия шахматиста $\mathcal{L}$ задается выписыванием в каждой клетке доски $R(3 \times 4)$ меток от 1 до 9.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

a) Разметка доски L

1	2	
3	4	

b) Стратегия шахматиста $\mathcal{L}$

Рис. 13. Ищем стратегию для игры $L(2 \times 5)$, $R(3 \times 3)$.

			a
b			$r_1 r_2$
$r_7 r_8$	$\times$	$\times$	

Рис. 14. Стратегия для случая Lose5.

Утверждение 1. Если клетки u, v, w занимают три разные строки и три столбца доски $L(3 \times 3)$, то символы r_u, r_v и r_w находятся в трех разных горизонталях доски $R(3 \times 4)$.

Действительно, каждая клетка доски $L(3 \times 3)$ является u-слабой, v-слабой или w-слабой. Следовательно, по лемме 4.1 каждая метка на доске $R(3 \times 4)$ лежит в r_u-, r_v- или r_w-кресте. Это может быть, только если символы r_u, r_v и r_w находятся в разных горизонталях.

Утверждение 2. Для расположения символов $r_1, r_2, \ldots, r_9$ на доске $R(3 \times 4)$ возможны два случая: 1) либо символы r_1, r_2, r_3 стоят в одной горизонтали доски $R(3 \times 4)$, символы r_4, r_5, r_6 стоят в другой горизонтали, а символы r_7, r_8, r_9 – в третьей;

2) либо символы r_1, r_4, r_7 стоят в одной горизонтали доски $R(3 \times 4)$, символы r_2, r_5, r_8 стоят в другой горизонтали, а символы r_3, r_6, r_9 – в третьей.

Утверждение 2 доказывается умеренно противным перебором с помощью утверждения 1.

Поставим ладей на все клетки r_i доски $R(3 \times 4)$ (в клетку ставим столько ладей, сколько в ней символов r_i). Каждая клетка i доски $L(3 \times 3)$ определяет четыре i-слабые клетки, которые расположены в двух строках и двух столбцах.

Утверждение 3. Любую клетку на доске $R(3\times 4)$ (пусть в ней стоит метка i) можно побить ладьей с каждой из клеток r_j, где j – i-слабый номер, причем две из этих четырех ладей находятся в одной горизонтали, и еще две – в другой.

Действительно, такое расположение ладей навязано утверждением 2. Оно означает, что в некоторых клетках стоит по нескольку ладей.

Докажем теперь, что выигрышных стратегий с таким обширным набором свойств не существует. По утверждению 2 в первой горизонтали доски $R(3\times 4)$ стоит не более трех символов r_i, значит, в первой горизонтали имеется “пустая” клетка, т. е. клетка, не содержащая ни одного символа r_i. Пусть она для определенности находится в четвертой вертикали и содержит метку a. (рис. 14). По утверждению 3 на эту клетку направлено четыре ладейных удара, причем две из этих четырех ладей находятся в одной горизонтали, и еще две – в другой. Это значит, что в одной из клеток четвертой вертикали заведомо стоят две ладьи. Пусть для определенности это клетка находится во второй горизонтали. По утверждению 2 всего во второй горизонтали стоят три ладьи и, как мы установили, две из них находятся в одной клетке. Значит, во второй горизонтали есть две “пустые” клетки. Выберем ту из них, над которой в первой горизонтали стоит не более одной ладьи. Пусть эта клетка для определенности находится в первой вертикали и содержит метку b. На выбранную клетку тоже направлено четыре ладейных удара от двух пар ладей, стоящих в двух горизонталях. Одна пара ладей расположена, очевидно, во второй же горизонтали, а другая пара может находиться только в третьей горизонтали (потому что в первой горизонтали над клеткой b стоит не более одной ладьи). Теперь мы видим, что одна из клеток третьей горизонтали – во второй или третьей вертикали – “пустая”, и она не может собрать на себя четыре ладейных удара из двух разных горизонталей. Противоречие.

Lose6) Допустим, что у шахматистов существует выигрышная стратегия. В стандартных обозначениях стратегия шахматиста $\mathcal{R}$ задается выставлением на доску $R(5\times 5)$ четырех символов r_1, r_2, r_3, r_4. На доске $R(5\times 5)$ найдется клетка Q, не лежащая ни в одном из четырех крестов, определяемых этими символами. Стратегия шахматиста $\mathcal{L}$ задается выписыванием в каждой клетке доски $R(5\times 5)$ метки – числа от 1 до 4. Не умаляя общности в клетке Q написана метка 1. Пусть судья поставит королей: на доске $R(5\times 5)$ в клетку Q, а на доске $L(2\times 2)$ – в клетку 4. Тогда игрок $\mathcal{L}$ поставит ладью на клетку 1 доски

$L(2\times 2)$, а игрок $\mathcal{R}$ поставит ладью на клетку r_4 доски $R(5\times 5)$. Ни одна из ладей не ставит шах. Шахматисты проиграли.

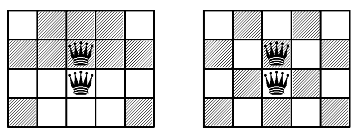
Теорема доказана. □

Шах ферзем. Рассмотрим вариант игры, в котором оба шахматиста выставляют на доску не ладью, а ферзя. Будем называть эту игру "Шах ферзем".

Лемма 4.3. *В игре "Шах ферзем"* $L(4\times 5)$, $R(4\times 5)$ *шахматисты выигрывают.*

Доказательство. Покрасим клетки обеих досок, как на рис. 15 a). Пусть оба шахматиста выставляют своих ферзей только на клетки, помеченные ферзями, причем пусть первый шахматист действует из предположения "Короли стоят на клетках одинакового цвета", а второй – из предположения "Короли стоят на клетках разного цвета". □

Впрочем, на столь небольшой доске работает несколько неожиданный эффект: ферзь, стоящий на клетке $c2$, держит под боем все клетки того же цвета в шахматной раскраске! Поэтому вместо "экзотической" раскраски можно использовать обычную шахматную, рис. 15 b).



a) b)

Рис. 15. "Шах ферзем" на досках 4×5.

Как показывают вычисления на компьютере, в игре "Шах ферзем" $L(4\times 4)$, $R(5\times 5)$ шахматисты выигрывают, а в игре на досках $L(3\times 4)$, $R(7\times 7)$ и на досках $L(4\times 5)$, $R(5\times 5)$ шахматисты проигрывают.

Отметим в заключение еще одно утверждение, которое подсказал нам С. Берлов. Оно обобщает рассуждение из предыдущей леммы.

Лемма 4.4. *Рассмотрим вариант игры "Шах ферзем", в котором пять шахматистов расположены так, что каждый из них видит доски всех остальных, но не видит свою собственную. Все доски имеют размер* 11×11. *Тогда шахматисты выигрывают.*

Доказательство. На доске 11×11 можно расставить 5 ферзей, которые держат под боем все клетки (например, $b4$, $d10$, $f6$, $h2$ и $j8$). Пронумеруем ферзей числами от 0 до 4, в каждой клетке доски поместим номер любого из ферзей, который держит под боем эту клетку. Будем считать, что на всех досках нанесена указанная разметка. Номер, стоящий в клетке, на которую поставлен король, будем называть весом короля. Стратегия шахматистов следующая: k-й шахматист проверяет гипотезу "сумма весов всех королей дает остаток k по модулю 5". Шахматист видит всех королей, кроме своего, он вычисляет, какой вес должен иметь его король, чтобы гипотеза оказалась верной, и ставит ферзя, пробивающего все клетки этого веса. □

Шах другими фигурами. В играх "Шах слоном" или "Шах конем" сам факт объявления шаха означает, что шахматист угадал цвет клетки, на которой стоит его король. Это значит, что выигрыш шахматистов в такой игре может иметь место только для совсем небольших досок, где клетки каждого цвета "простреливаются" из одной точки.

Рассмотрим игру "Шах королем" (судья ставит на доску "доброго короля", а шахматист выставляет "злого короля", который должен поставить доброму шах).

Теорема 4.5. *Пусть в игре "Шах королем" $L(a \times b)$, $R(c \times d)$ число ℓ – размер максимального множества клеток на доске $L(a \times b)$, никакие две из которых не бьются одним королем. Аналогично определяется число r для доски R. Игра выигрышная тогда и только тогда, когда $\ell = r = 2$ или одно из чисел ℓ, r равно 1.*

Доказательство. Выберем множество S_ℓ клеток на доске L, никакие две из которых не бьются одним королем. Аналогично выберем множество S_r. Пусть судья упростит шахматистам задачу, пообещав, что будет ставить королей только на клетки множеств S_ℓ и S_r. Поскольку шахматисты не могут побить сразу две клетки в этих множествах, можно считать, что они просто пытаются угадать клетку, где стоит король, а это то же самое, что пытаться угадать цвет шляпы на графе P_2 с шляпностями вершин ℓ, r, что возможно, только когда $\ell = r = 2$ или одно из чисел ℓ, r равно 1..

Осталось показать, что в указанных случаях шахматисты выиграют. При $\ell = 1$ или $r = 1$ это очевидно. В случае $\ell = r = 2$ максимальная возможная доска – это доска 3×6 (потому что никакие два угла доски 4×4, а также никакие две из трех клеток с первой координатой 0, 3, 6 доски 3×7 не пробиваются одним королем). На доске 3×6 шахматисты с легкостью выигрывают, угадывая половину (3×3) доски (ставя в ее центр короля). □

§5. Анализ игры Hats на цикле

По результатам В. Щечлы [4], мудрецы испытывают некоторые затруднения в игре на цикле C_n уже в случае, когда все шляпности равны 3, а именно, выигрыш мудрецов возможен только при $n = 4$, либо при n, делящемся на 3. В этой ситуации дальнейшее увеличение шляпностей ведет к проигрышу мудрецов [4, следствие 8].

Следующая теорема дает список игр на циклах с вершиной шляпности 2, в которых мудрецы выигрывают.

Теорема 5.1. *Пусть граф G – цикл C_n, функция шляпности h такова, что $2 \leqslant h(v) \leqslant 4$ для любой вершины v, а также существует вершина $A \in V(G)$, такая что $h(A) = 2$. Тогда в каждом из следующих случаев игра $\mathcal{HG} = \langle G, h\rangle$ – выигрышная.*

(1) $n = 3$
(2) *В графе содержится вершина, помимо A, имеющая шляпность* 2.
(3) *Соседи вершины A имеют шляпность* 3.
(4) *Сосед вершины A, а также следующая за ним вершина, имеет шляпность* 3.

Доказательство. Если $h_1(v) \leqslant h_2(v)$ при всех $v \in V(G)$, то выигрышность $\langle G, h_2\rangle$ влечет за собой выигрышность $\langle G, h_1\rangle$, и, что то же самое, проигрышности $\langle G, h_1\rangle$ влечет за собой проигрышность $\langle G, h_2\rangle$. Это очевидно, так как для игры $\langle G, h_1\rangle$ мы можем использовать выигрышную стратегию из игры $\langle G, h_2\rangle$, в которой вместо "несуществующих" цветов мудрецы будут говорить любой "существующий". Следовательно, для доказательства выигрышности игры достаточно проверить выигрышность для случаев, когда функция шляпности "максимальная".

Для каждого из утверждений теоремы ниже приведены максимальные функции шляпности и доказательства, почему мудрецы выигрывают.

(1) На цикле C_3 со шляпностями 2, 4, 4, мудрецы выигрывают по следствию 3.2.1.

(2) Игра $\langle C_n, h_4^{A2B2}\rangle$, выигрышная, так как содержит путь с шляпностями $24\ldots42$, на котором мудрецы выигрывают по следствию 3.1.2.
(3) Игра $\langle C_n, h_4^{A2B3C3}\rangle$, где B и C – соседи A, выигрышная по следствию 3.4.1.
(4) Игра $\langle C_n, h_4^{A2B3C3}\rangle$, где A, B, C – три последовательные вершины, выигрышная по следствию 3.6.1. □

Гипотеза 5.2. *Пусть граф G – цикл C_n, функция шляпности h такова, что $2 \leqslant h(v) \leqslant 4$ для любой вершины v, а также существует вершина $A \in V(G)$, такая что $h(A) = 2$. Тогда игра $\mathcal{HG} = \langle G, h\rangle$ выигрышная только в случаях, перечисленных в теореме 5.1.*

Для доказательства гипотезы достаточно доказать проигрышность следующих двух игр.

(1) $\langle C_n, h_3^{A2B4C4}\rangle$ $(n \geqslant 4)$, где мудрецы B и C – соседи мудреца A. Проигрышность этой игры при $n = 4$ доказана в теореме 4.2, п. Lose1 на шахматном языке. При $n \leqslant 7$ проигрышность была проверена на компьютере методом сведения к задаче выполнимости булевой формулы, описанным в статье [8]. Это позволяет предположить, что и при $n \geqslant 8$ игра проигрышная, но доказательства этого факта у нас нет.
(2) $\langle C_n, h_3^{A2B4C3D4}\rangle$ $(n \geqslant 4)$, где мудрецы B и C – соседи мудреца A, мудрец D – сосед мудреца C отличный от A. Проигрышность этой игры при $n = 4$ доказана в теореме 4.2, п. Lose3. При $n \leqslant 7$ проигрышность была проверена вычислением на компьютере. Это позволяет предположить, что и при $n \geqslant 8$ игра проигрышная, но доказательства этого факта у нас тоже пока нет.

§6. Заключение

Как показывает наша статья, рассмотренный вариант игры Hats является настоящей жемчужиной комбинаторики. Фейерверк идей, возникающий при рассмотрении разных подходов к игре, завораживает и будит воображение. Вместе с тем, вычислительная сложность препятствует выдвижению скоропалительных гипотез и надежно защищает игру от возможности проведения полного исследования.

Список литературы

1. S. Butler *et al.*, *Hat guessing games.* — SIAM review **51** (2009), 399–413.
2. M. Gadouleau, N. Georgiou, *New constructions and bounds for Winkler's Hat Game.* — SIAM J. Discrete Math. **29**, No. 2 (2015), 823–834.
3. M. Gadouleau, *Finite dynamical systems, Hat Games, and coding theory.* — SIAM J. Discrete Math. **32**, No. 3 (2018), 1922–1945.
4. W. W. Szczechla, *The three colour hat guessing game on cycle graphs.* — The Electronic Journal of Combinatorics **26**, 2017.
5. M. Farnik, *A hat guessing game.* PhD thesis, Jagiellonian University 2015.
6. N. Alon *et.al*, *The hat guessing number of graphs.* `arXiv:1812.09752`, 2018.
7. B. Bosek *et.al*, *Hat chromatic number of graphs.* — CoRR, `http://arxiv.org/abs/1905.04108v1` 2019.
8. К. П. Кохась, А. С. Латышев, *На каких графах мудрецы могут угадать цвет хотя бы одной шляпы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **464** (2017).
9. M. Krzywkowski, *On the hat problem, its variations, and their applications.* — Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia Mathematica **9**, No. 1 (2010).
10. K. Soundararajan, *Approximating 1 from below using n Egyptian fractions.* `arXiv:math/0502247v1` (2005).
11. С. Л. Берлов и др., *Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2016 года.* МЦНМО, Москва (2017).

Kokhas K. P., Latyshev A. S. Cliques and constructors in "Hats" game. I.

We analyze the following general variant of deterministic "Hats" game. Several sages wearing colored hats occupy the vertices of a graph, k-th sage can have hats of one of $h(k)$ colors. Each sage tries to guess the color of his own hat merely on the basis of observing the hats of his neighbours without exchanging any information. A predetermined guessing strategy is winning if it guarantees at least one correct individual guess for every assignment of colors.

For complete graphs and for cycles we solve the problem of describing fuctions $h(k)$ for which the sages win. We develop "theory of construcors", that is a collection of theorems demonstrating how one can construct new graphs for which the sages win. We define also new game "Check by rook" which is equivalent to Hats game on 4-cycle and give complete analysis of this game.

С.-Петербургский
государственный университет,
199034, С.-Петербург, Россия
E-mail: `kpk@arbital.ru`

Поступило 21 ноября 2019 г.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский университет ИТМО"
197101, г. С.-Петербург, Россия
E-mail: `alex_700_95@mail.ru`