

Д. В. Карпов

ОБ ИЗОБРАЖЕНИИ 2-ПЛАНАРНОГО ГРАФА НА ПЛОСКОСТИ

§1. Введение

1.1. Основные определения и обозначения. Мы будем рассматривать графы без петель. Кратные рёбра в некоторых случаях будут допускаться. В работе будут использоваться стандартные обозначения. Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, множество рёбер – через $E(G)$, для количества вершин и рёбер будем использовать обозначения $v(G)$ и $e(G)$ соответственно.

Для двух графов G и H через $G \cup H$ будем обозначать граф на множестве вершин $V(G) \cup V(H)$ с множеством рёбер $E(G) \cup E(H)$.

Через $d_G(x)$ обозначим степень вершины x в графе G .

Граф называется *рёберно k -связным*, если он связан, и его нельзя сделать несвязным, удалив менее чем k рёбер.

Говоря об изображении графов на плоскости, мы всегда будем подразумевать, что вершины изображаются точками, а рёбра – ломаными. Изображение каждого ребра содержит только две вершины – его концы. Мы будем считать, что в каждой *точке пересечения* пересекаются ровно два ребра (если в изображении графа через какую-то точку проходит более двух рёбер, несложно исправить изображение так, чтобы этого избежать). Мы наложим на изображение графа на плоскости еще одно условие: если A – точка пересечения двух рёбер e и f , то любая достаточно маленькая окружность с центром в A пересекает каждое из этих рёбер дважды, причем точки пересечения с e и f на окружности чередуются (если это условие не выполнено, несложно подправить изображение так, чтобы пересечение в точке A исчезло, см. рисунок 1).

Напомним, что граф называется *планарным*, если его можно так изобразить на плоскости, что рёбра не пересекаются во внутренних точках. Следующее определение обобщает широко известное понятие планарного графа.

Ключевые слова: 2-планарный граф, плоское изображение графа.

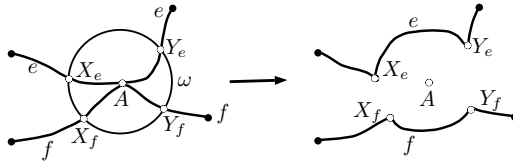


Рис. 1. Окрестность точки пересечения рёбер.

Определение 1. Граф G называется k -планарным, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы каждое ребро пересекало не более чем k других.

Граф можно по-разному изобразить на плоскости. Чтобы избежать путаницы, мы будем обозначать конкретное изображение графа G другим шрифтом: \mathcal{G} .

Изображение планарного графа на плоскости называется *плоским графом*. Части, на которые плоский граф G разбивает плоскость, называются *гранями*.

В этой статье мы будем рассматривать только такие изображения k -планарных графов на плоскости, в которых каждое ребро пересекает не более чем k других.

1.2. Основные результаты и история вопроса. О плоском изображении планарного графа известно очень многое. Так, теорема Фари-Вагнера (1936 год) утверждает, что в таком изображении можно сделать все рёбра отрезками [1, 2].

Позже появился интерес к 1-планарным графам (см., например статью 1965 года [3]). В изображении 1-планарного графа рёбра могут пересекаться, что затрудняет работу с такими графами. Так, не всегда все рёбра 1-планарного графа можно сделать отрезками. Однако, несложно добиться того, чтобы каждые два пересекающихся ребра пересекались ровно в одной точке (подойдет изображение с минимальным числом точек пересечения).

Даже про 2-планарные графы (и тем более про k -планарные графы при $k \geq 3$) известно гораздо меньше. То, что вполне очевидно для 1-планарных графов, оказывается совсем не очевидным уже для 2-планарных графов. В первую очередь, это касается существования изображения, в котором каждое ребро пересекает любое другое ребро

не более чем в одной точке. Нашим первым результатом будет теорема об изображении 2-планарного графа.

Теорема 1. *Пусть G – 2-планарный граф, а \mathcal{G} – его изображение с минимальным числом точек пересечения рёбер. Тогда любые два пересекающихся (то есть, имеющих общую внутреннюю точку) ребра в изображении \mathcal{G} пересекаются ровно в одной точке, а никакие два ребра с общим концом не пересекаются.*

Для k -планарных графов мы можем предложить лишь более слабый результат, причем при дополнительном условии.

Теорема 2. *Пусть $k \geq 2$ – натуральное число, G – рёберно $(2k + 1)$ -связный k -планарный граф, а \mathcal{G} – его изображение с минимальным числом точек пересечения рёбер. Тогда любые два пересекающихся (то есть, имеющих общую внутреннюю точку) ребра в изображении \mathcal{G} пересекаются ровно в одной точке.*

Немного огорчает дополнительное условие рёберной $(2k + 1)$ -связности. Вопрос о существовании изображения без двойных пересечений рёбер даже для произвольного 3-планарного графа остается открытым.

Далее мы сконцентрируемся на 2-планарных графах. В [5] доказано, что для любого 1-планарного графа H существует 1-планарный надграф G с тем же множеством вершин, который можно изобразить так, что каждая пара пересекающихся рёбер будет парой диагоналей в грани-четырёхугольнике некоторого плоского графа. Мы постараемся обобщить этот результат на 2-планарные графы.

В [4] построены примеры 1- и 2-планарных графов с максимальным возможным числом рёбер. Серия примеров 1-планарных графов делается из плоских графов, в которых все грани – четырёхугольники, добавлением двух диагоналей в каждой грани (и пары пересекающихся рёбер оказываются как раз парами добавленных диагоналей). В то же время, любой 1-планарный граф имеет надграф, у которого каждая пара пересекающихся рёбер – диагонали грани-четырёхугольника плоского графа.

Серия примеров максимальных 2-планарных графов получается из плоских графов, все грани которых – пятиугольники, добавлением всех пяти диагоналей в каждой грани. К сожалению, с 2-планарными графами все гораздо сложнее – если пара пересекающихся рёбер в изображении 1-планарного графа не может пересекать других рёбер,

то в изображении 2-планарного графа каждое ребро может пересекать уже два других, поэтому, в компоненте связности графа пересечений может быть сколь угодно много рёбер, совсем не обязательно пять. Однако, мы докажем, что пересекающиеся рёбра можно изобразить в виде диагоналей граней плоского графа. Начнем с определений.

Определение 2. Назовем ребро изображения \mathcal{G} *простым*, если оно не пересекает других рёбер и *непростым* в противном случае. Обозначим через $E'(\mathcal{G})$ множество всех простых рёбер изображения \mathcal{G} , а через $P(\mathcal{G})$ – граф на $V(\mathcal{G})$ с рёбрами из $E'(\mathcal{G})$. Будем называть $P(\mathcal{G})$ *плоским графом* изображения \mathcal{G} .

Очевидно, граф $P(\mathcal{G})$ – планарный, мы всегда будем рассматривать его плоское изображение, получающееся из \mathcal{G} удалением непростых рёбер.

Для удобства, мы в некоторых случаях разрешим в графах кратные рёбра. Назовем два кратных ребра в изображении \mathcal{G} *параллельными*, если оба они – простые и в одной из частей, на которые образованный ими цикл делит плоскость, нет вершин графа.

Мы допустим наличие в изображении графа кратных непараллельных простых рёбер. Кратные параллельные простые рёбра и кратные рёбра, хотя бы одно из которых – непростое, запрещены.

Определение 3. 1) В плоском изображении графа для каждой вершины x можно упорядочить по часовой стрелке *выходы* рёбер из этой вершины. Два выхода назовём *соседними*, если между ними хотя бы с одной стороны нет других выходов рёбер.

2) Назовем граф G' *2-диагональным*, если его можно изобразить на плоскости так, что каждое ребро пересекает не более чем два других, а для любой вершины x среди любых трёх последовательных выходов рёбер из x есть выход хотя бы одного простого ребра.

3) Говоря об *изображении* \mathcal{G}' 2-диагонального графа G' на плоскости, мы всегда будем подразумевать, что оно удовлетворяет свойству из определения. Плоский граф $G = P(\mathcal{G}')$ мы будем называть *плоским графом* 2-диагонального графа G' .

Рассмотрим 2-диагональный граф G' и его плоский граф G . Для каждой его вершины $v \in V(G')$ между двумя соседними выходами простых рёбер выходит не более двух непростых рёбер, которые являются диагоналями граней G , мы будем называть эти рёбра просто *диагоналями*. Каждая диагональ пересекает не более двух других.

Очевидно, любой 2-диагональный граф является 2-планарным. Для произвольного 2-планарного графа мы докажем существование 2-диагонального надграфа.

Теорема 3. *Любой 2-планарный граф H имеет 2-диагональный надграф H' на том же множестве вершин (то есть, с $V(H') = V(H)$).*

§2. ИЗОБРАЖЕНИЕ БЕЗ ДВОЙНЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ

Начнем с определений и леммы.

Точки пересечения и концы делят рёбра на части – также ломаные. Если A и B – две точки на ребре e (возможно, его концы), то через AeB мы будем обозначать участок ребра между этими точками.

Определение 4. Пусть e и f – два ребра в изображении \mathcal{G} графа G , а X и Y – две их общие точки (точки пересечения или концы), причем участки XeY и XfY не пересекаются друг с другом и в одной из областей, ограниченной ими, нет вершин графа G . Мы будем называть такую ситуацию *зацеплением* рёбер e и f .

Лемма 1. *Пусть \mathcal{G} – изображение k -планарного графа G с минимальным числом точек пересечения. Тогда \mathcal{G} не имеет зацеплений.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть X_1Y_1, \dots, X_nY_n – все зацепления рёбер за ребро $e = xy$, причем X_i – конец, ближний к x , а Y_i – конец, ближний к y . Рассмотрим минимальное по включению зацепление X_jY_j , пусть оно образовано ребром f , $f_j = X_jfY_j$ и $e_j = X_jeY_j$. По определению, замкнутая ломаная, образованная e_j и f_j , делит плоскость на две области так, что в одной из них (пусть это внутренняя область W) нет вершин графа G .

Предположим, что ребро f' пересекает e_j . Войдя в не содержащую вершин область W через ребро e_j , ребро f' должно из нее выйти. Если в этот момент f' пересечет e_j , то f' дважды пересекает ребро e между X_j и Y_j и образует зацепление, что противоречит минимальности X_jY_j . Следовательно, ребро f' выходит из области W , пересекая f_j . Таким образом, все рёбра, пересекающие e_j , пересекают и f_j , причем имеют на f_j не меньше точек пересечения.

Если X_j и Y_j отличны от концов ребра, то нарисуем путь e'_j с концами на ребре f вдоль ребра e (очень близко к участку e_j) вне W (см. рисунок 2а) и заменим участок ребра f между концами пути e'_j на e'_j . Если одна из точек X_j и Y_j (скажем, X_j) – общий конец ребер e и f , то

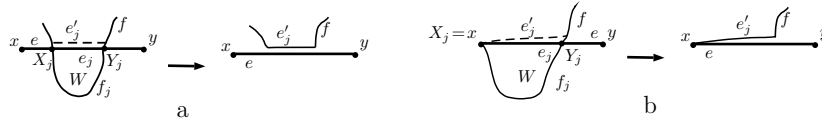


Рис. 2. Зацепление.

Y_j не может быть концом этих ребер. В этом случае нарисуем путь e'_j от $x = X_j$ до пересечения с ребром f вдоль ребра e (очень близко к участку e_j) вне W (см. рисунок 2b) и заменим участок ребра f между концами пути e'_j на e'_j . По доказанному выше, в результате замены не появилось точек пересечения f с отличными от e рёбрами, а количество точек пересечения f и e уменьшилось как минимум на 1 (исчезло пересечение в точке Y_j). Если ребро f в результате замены стало самопересекающимся, удалим его лишнюю часть. Так как остальные рёбра мы не меняли, получилось изображение графа G с меньшим числом пересечений, противоречие. \square

Начнем с доказательства более простой теоремы.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим изображение \mathcal{G} графа G с минимальным числом точек пересечения. По лемме 1, \mathcal{G} не имеет зацеплений. Предположим, что рёбра e и f пересекаются в \mathcal{G} не менее двух раз. Пусть, скажем, X и Y – две точки пересечения этих рёбер, соседние по f (эти точки не являются общими концами рёбер e и f !).

Очевидно, участки XfY и XeY не пересекаются и образуют замкнутую ломаную C (см. рис. 3). Обозначим через D_1 и D_2 две области, на которые C делит граф. На цикле C нет вершин графа G . Пусть V_i – множество вершин графа G , лежащих в области D_i . По лемме 1, $V_1 \neq \emptyset$ и $V_2 \neq \emptyset$.

Пусть E' – множество всех рёбер, отличных от f и пересекающих e , а F' – множество всех рёбер, отличных от e и пересекающих f . Тогда $|E'| \leq k - 1$ и $|F'| \leq k - 1$. Очевидно, $E' \cup F'$ содержит все рёбра, пересекающие цикл C . Так как на цикле C нет вершин графа G , множество рёбер $E' \cup F' \cup \{e, f\}$ отделяет V_1 от V_2 , что невозможно в рёберно $(2k + 1)$ -связном графе, противоречие. \square

Далее до конца раздела – доказательство теоремы 1, в котором мы для удобства читателя выделили несколько утверждений.

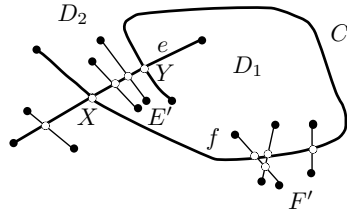


Рис. 3. Двойное пересечение рёбер e и f .

Доказательство теоремы 1. Напомним, что G – это 2-планарный граф, а \mathcal{G} – его изображение с минимальным числом точек пересечения.

Утверждение 1. Пусть A и B – две общие точки непростых рёбер e и f . Тогда на участках AeB и AfB есть хотя бы по одной точке пересечения с другими рёбрами.

Доказательство. Так как в изображении \mathcal{G} нет кратных непростых рёбер, можно считать, что точка A не является общим концом рёбер. Предположим, что на AeB нет пересечений с другими ребрами. Пусть x – ближний к A конец ребра f . Пройдем по f участок от x до A и отметим на нем точку A' очень близко к A . От A' проведем ломаную ℓ вдоль участка AeB (очень близко к нему) до точки B (см. рисунок 4а). Заменяя участок $A'fB$ на ℓ , мы получим новое изображение ребра f , в котором нет точки пересечения A с ребром e , а новые точки пересечения f с e и другими рёбрами не появились (так как участок AeB не пересекается с отличными от f рёбрами). Если на f появились точки самопересечения, от них несложно избавиться. В результате получилось изображение с меньшим числом точек пересечения, противоречие. \square

Утверждение 2. Если два непростых ребра e и f имеют хотя бы две общие точки, то никакое ребро r не может пересекать их оба.

Доказательство. Предположим противное, пусть r пересекает оба ребра e и f , которые имеют две точки пересечения A и B (возможно, и другие). Можно считать, что A не является общим концом рёбер e и f . Никакое из ребер e и f не может пересекаться с ребром, отличным от e , f и r по свойствам изображения 2-планарного графа. Пусть

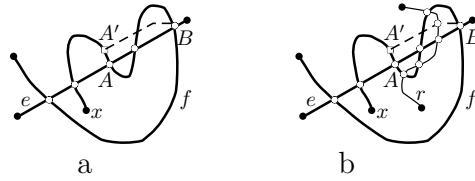


Рис. 4. Пересечения рёбер e и f в точках A и B .

на участке AeB не больше пересечений с ребром r , чем на AfB . Тогда построим точку A' , а также соединяющую её с B ломаную ℓ как в доказательстве утверждения 1 и аналогично изменим изображение ребра f (см. рисунок 4b). В результате количество пересечений f с r не увеличится, а никаких других пересечений не появится. При этом, исчезнет как минимум одно пересечение e и f (в точке A), противоречие с минимальностью числа точек пересечения в изображении \mathcal{G} . \square

Утверждение 3. *Не существует таких непростых рёбер e, f, f' , что каждое из рёбер f и f' имеет с e не менее двух общих точек.*

Доказательство. Предположим противное. Так как между любыми двумя общими точками e с одним из рёбер f и f' по утверждению 1 есть точка пересечения с другим, общие точки с f и f' на e чередуются. Поскольку у тех, и других хотя бы по две, можно найти такие четыре последовательные точки A_1, B_1, A_2, B_2 на e , что A_1 и A_2 – общие точки с f , B_1 и B_2 – общие точки с f' , а других общих точек с f или f' на участке A_1eB_2 нет. Очевидно, общих точек с отличными от f и f' рёбрами на этом участке также нет (их нет на ребре e). Конфигурация участков A_1fA_2 и $B_1f'B_2$ может быть разной (два примера приведены на рисунке 5, возможны и другие), а доказательство для всех случаев будет общим. Отметим, что B_1 и A_2 – точки пересечения e с f и f' , а не общие концы этих рёбер.

Участки B_1eB_2 и $B_1f'B_2$ образуют замкнутую ломаную Z , которая делит плоскость на две области: $U_1 \ni A_1$ и U_2 . Так как f и f' по утверждению 2 не пересекаются, несложно понять, что участок A_1fA_2 лежит в области U_1 . Если идти по ребру f по направлению от A_1 к A_2 , то в точке A_2 мы перейдем из U_1 в U_2 .

Отметим на ребре f' около B_1 точку B'_1 в области U_1 и соединим B'_1 и B_2 ломаной ℓ_B вдоль ребра e близко к нему. Участок B_1eB_2 пересекает только одно ребро (а именно, f), причем ровно один раз – в

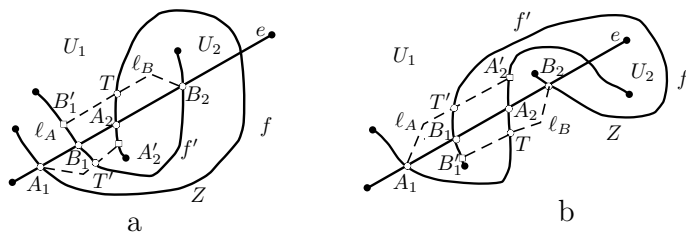


Рис. 5. Два ребра имеют по две общие точки с e .

точке A_2 . Следовательно, ℓ_B также пересекает только ребро f и только один раз – в точке T около A_2 , причем T лежит на участке A_1fA_2 (так как и T , и A_1 лежат в области U_1). Изменим изображение ребра f' , заменив $B_1f'B_2$ на ℓ_B . Отметим, что убранный участок $B_1f'B_2$ содержит весь участок $B_1f'B_2$.

В результате замены исчезло пересечение f' и e в точке B_1 , но появилось пересечение f' и f – в точке T на участке A_1fA_2 . Отметим около A_2 на f точку A_2' в области U_2 . Тогда A_2 лежит между A_2' и T на ребре f , а значит, участок A_1fA_2' содержит A_1fA_2 и, в частности, точку T . Мы изменим изображение ребра f , заменив A_1fA_2' на ломаную ℓ_A , проходящую вдоль e (см. рис 5). Теперь новые изображения ребер f и f' не пересекаются. В изображении \mathcal{G} участок A_1eA_2 пересекает только одно ребро (а именно, f'), причем ровно один раз – в точке B_1 . Следовательно, ℓ_A в изображении \mathcal{G} также пересекает только ребро f' и только один раз – в точке T' около B_1 . Так как $A_1 \in U_1$ и $A_2' \in U_2$, ломаная ℓ_A должна пересекать замкнутую ломаную Z , отделяющую U_1 от U_2 . Следовательно, T' лежит на участке $B_1f'B_2$, которого нет в новом изображении.

Таким образом, в новом изображении исчезло пересечение f и e в точке A_2 , исчезло пересечение f' и e в точке B_1 , и никаких пересечений не добавилось. Противоречие с минимальностью количества точек пересечения в \mathcal{G} . \square

Утверждение 4. Любые два ребра e и f имеют не более чем две общие точки.

Доказательство. Предположим противное, пусть e и f имеют хотя бы три общие точки. Тогда эти ребра непростые. Рассмотрим три последовательные по f общие точки A_1, A_2 и A_3 (занумерованные в

порядке следования по ребру e). По утверждению 1, на обоих участках A_1eA_2 и A_2eA_3 должны быть точки пересечения e с отличным от f ребром. Такое ребро может быть только одно, а значит, это ребро имеет с e хотя бы две общие точки. Противоречие с утверждением 3. \square

Вернемся к доказательству теоремы. Предположим, что непростые рёбра $e = x_1x_2$ и $f = y_1y_2$ имеют в \mathcal{G} не менее двух общих точек. Тогда по утверждению 4 общих точек ровно две, обозначим их через A и B , пусть порядок указанных точек на ребре e – это x_1ABx_2 , а на ребре f – это y_1ABy_2 . Одна из точек A и B может быть общим концом рёбер, пусть возможно совпадение $A = x_1 = y_1$.

Очевидно, участки AfB и AeB не пересекаются и образуют замкнутую ломаную C (см. рис. 6а). Обозначим через D_1 и D_2 две области, на которые C делит граф. По утверждению 1, участок AeB пересекает ребро $e' = z_1z_2$, которое не имеет других общих точек с e по утверждению 3 и не пересекает f по утверждению 2. Значит, e' пересекает C ровно один раз и можно считать, что $z_1 \in D_1$ и $z_2 \in D_2$. Аналогично, участок AfB пересекает ребро $f' = v_1v_2$, которое пересекает C ровно один раз, пусть $v_1 \in D_1$ и $v_2 \in D_2$. По утверждению 2 мы имеем $f' \neq e'$. Если A не является общим концом рёбер e и f , то x_1 и y_1 лежат в одной области относительно C (так как ломаные x_1eA и y_1fB не разделены C). Пусть $x_1, y_1 \in D_1$.

Построим две “копии” замкнутой ломаной C : замкнутую ломаную C_1 в области D_1 и замкнутую ломаную C_2 в области D_2 . (Обе копии изображены очень близко к C , см. рис. 6а. Если $A = x_1 = y_1$, то C_1 проходит через A и не имеет других общих точек с C). Пусть Z_1 и Z_2 – точки пересечения e' с C_1 и C_2 соответственно, а V_1 и V_2 – точки пересечения f' с C_1 и C_2 соответственно. Обозначим через X_1 и Y_1 точки пересечения x_1A и y_1A с C_1 соответственно (если $A = x_1 = y_1$, то $X_1 = Y_1 = A$). Аналогично, два других конца x_2 и y_2 рёбер e и f лежат в одной области относительно C , и здесь мы рассмотрим два случая: это может быть область D_2 или область D_1 .

1. $x_2, y_2 \in D_2$.

Тогда мы обозначим через X_2 и Y_2 точки пересечения x_2B и y_2B с C_2 соответственно.

Изучим циклический порядок точек X_1, Y_1, Z_1, V_1 на C_1 . Нас этот порядок интересует с точностью до замены на обратный. Если $X_1 = Y_1 = A$, то при такой постановке вопроса циклический порядок трёх

точек A, Z_1, V_1 только один, тогда мы можем вписать на место точки A точки X_1 и Y_1 в нужном нам порядке.

Далее считаем, что $X_1 \neq Y_1$. Точки X_1 и Y_1 очевидно, должны быть соседними. Пусть V – точка пересечения рёбер f и f' . Ребра e и f' пересекают Y_1fB в точках A и V соответственно. Так как ребро e' не пересекает AfB , точки X_1 и V_1 – соседние в циклическом порядке X_1, Y_1, Z_1, V_1 на C_1 , см. рис. 6а. Аналогично, Z_1 и Y_1 – соседние. Теперь понятно, что X_1, Y_1, Z_1, V_1 расположены на C_1 именно в таком порядке. Аналогично, циклический порядок на C_2 в исходном изображении таков: X_2, Y_2, Z_2, V_2 . Еще раз подчеркнем, что мы определяем циклический порядок точек на замкнутой ломаной с точностью до замены на обратный.

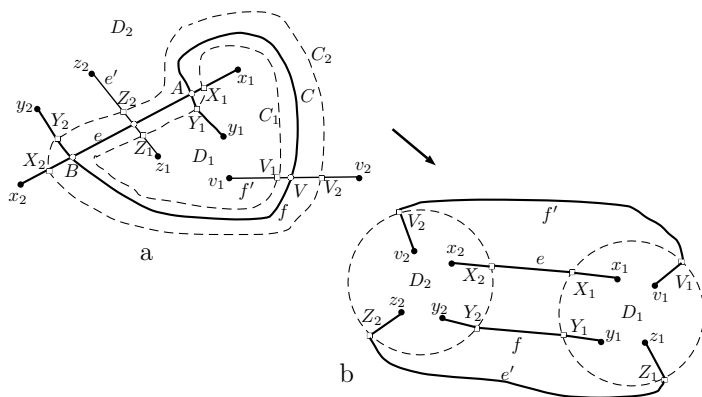


Рис. 6. Двойное пересечение рёбер e и f , случай 1.

Перерисуем отдельно друг от друга замкнутые ломаные C_1 и C_2 так, чтобы изображение внутри C_1 не изменилось, а внешнюю область замкнутой ломаной C_2 сделаем внутренней, сохранив изображение в ней изоморфным исходному изображению внешней области, а циклический порядок интересующих нас точек оставим исходным. Напомним, что выше мы рассматривали циклический порядок точек с точностью до замены на противоположный, а теперь нам нужно зафиксировать и направление обхода. Сделаем это так, чтобы обходы цикла C_1 в порядке X_1, Y_1, Z_1, V_1 и цикла C_2 в порядке X_2, Y_2, Z_2, V_2 имели противоположную ориентацию (см. рис. 6б, при необходимости несложно

изменить рисунок внутри C_2 так, чтобы порядок обхода C_2 сменился на противоположный). Теперь можно провести ломаные X_1X_2 , Y_1Y_2 , Z_1Z_2 и V_1V_2 так, что никакие две из них не будут пересекаться во внутренней точке. Очевидно, получено изображение графа G с меньшим числом точек пересечения, чем у \mathcal{G} , что невозможно. Противоречие завершает разбор случая.

2. $x_2, y_2 \in D_1$.

Тогда переименуем x_2 и y_2 в x'_1 и y'_1 соответственно и обозначим через X'_1 и Y'_1 точки пересечения x'_1B и y'_1B с C_1 (см. рис. 7а).

На этот раз на C_2 расположены только две интересующих нас точки: Z_2 и F_2 , их циклический порядок единственен. Намного сложнее с C_1 . Докажем, что циклический порядок точек $X_1, Y_1, Z_1, Y'_1, X'_1, V_1$ на C_1 именно такой. Пары точек X_1, Y_1 и X'_1, Y'_1 очевидно, в этом порядке соседние. Как и в первом случае, мы будем считать, что $X_1 \neq Y_1$ (иначе мы можем написать эту пару соседних точек в любом нужном нам порядке, что только облегчает задачу). Сначала рассмотрим только 4 точки X_1, Y_1, Y'_1, X'_1 . В их порядке точки Y_1 и Y'_1 – соседние, так как ребро f в точках A и B дважды пересекает ребро X'_1eX_1 , а участки AfY_1 и BfY'_1 расположены внутри C (см. рис. 7а). Значит, порядок точек X_1, Y_1, Y'_1, X'_1 на C_1 именно таков. Остается заметить, что ребро e' пересекает AeB , а значит, и участок C_1 между Y'_1 и Y_1 (не содержащий X_1). Следовательно, Z_1 расположена в циклическом порядке интересующих нас 6 точек между Y'_1 и Y_1 . Аналогично, V_1 расположена в циклическом порядке интересующих нас 6 точек между X_1 и X'_1 .

Перерисуем отдельно друг от друга замкнутые ломаные C_1 и C_2 так, чтобы изображение внутри C_1 не изменилось, а внешнюю область замкнутой ломаной C_2 сделаем внутренней, сохранив изображение в ней изоморфным исходному изображению внешней области (см. рис. 7б). На новом изображении проведем ломаные Z_1Z_2 и V_1V_2 так, чтобы они не пересекались. Остается провести ломаные $X_1X'_1$ и $Y_1Y'_1$ – сделаем это, как на рисунке. В результате появятся точки пересечения ребер e и f' , а также f и e' , которых не было раньше, но количество точек пересечения, очевидно, будет меньше чем в изображении \mathcal{G} . Нужно лишь проверить выполнение условий 2-планарности для измененных ребер e, f, e', f' . Для ребер e и f все очевидно – по построению, каждое из них теперь пересекает ровно одно ребро. Рассмотрим ребро e' . В изображении \mathcal{G} оно пересекало e , причем ровно в одной точке, расположенной на AeB (в силу утверждений 1 и 3). В новом изображении

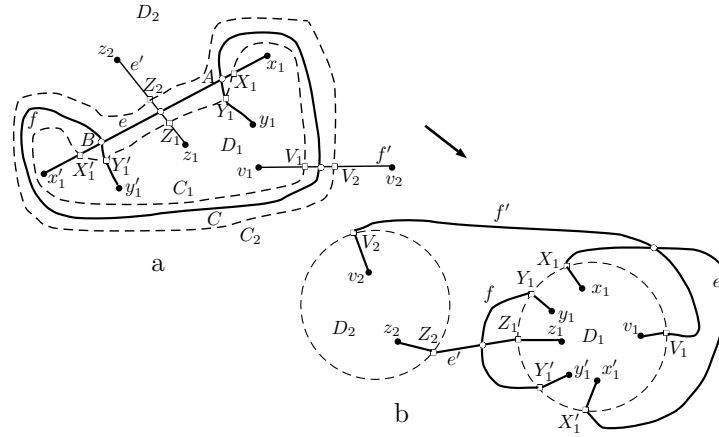


Рис. 7. Двойное пересечение рёбер e и f , случай 2.

эта точка пересечения исчезла, а вместо нее появилась точка пересечения с f , то есть, условие по-прежнему выполнено. Аналогично для f' . Таким образом, получено корректное изображение 2-планарного графа с меньшим числом точек пересечения, чем у \mathcal{G} , что невозможно. Противоречие завершает доказательство теоремы. \square

§3. ПОСТРОЕНИЕ 2-ДИАГОНАЛЬНОГО НАДГРАФА

Далее до конца работы мы будем иметь дело с 2-планарными графами и их изображениями. Мы будем рассматривать только изображения, в которых любые два пересекающихся ребра имеют ровно одну точку пересечения, а рёбра с общим концом не пересекаются (такое изображение у любого 2-планарного графа существует по теореме 1).

Определение 5. Часть ребра от конца до ближайшей к нему точки пересечения назовём *крайней*.

Таким образом, каждое непростое ребро имеет две крайних части.

Доказательство теоремы 3. Достаточно рассмотреть случай, когда 2-планарный граф H максимален (то есть после добавления любого ребра перестает быть 2-планарным). Граф H может иметь кратные рёбра, но только в случае, если существует изображение с минимальным числом точек пересечения, в котором все такие рёбра простые и

никакие два из них не параллельны друг другу (назовем такое изображение *хорошим*).

Мы докажем, что тогда H является 2-диагональным. Рассмотрим хорошее изображение \mathcal{H} графа H . По теореме 1, никакие два ребра в \mathcal{H} не пересекаются дважды.

Обозначим через F множество всех непростых рёбер изображения \mathcal{H} . Рассмотрим граф $G = P(\mathcal{H})$ и его плоское изображение \mathcal{G} , которое получается из \mathcal{H} удалением всех непростых рёбер.

Определение 6. В каждой точке пересечения A пересекаются ровно два ребра из F и, тем самым, делят малую окрестность A на 4 угла. В каждом из углов поставим по новой вершине близко к A – будем говорить, что эти 4 точки *соответствуют* A (см. рисунок 8а). Множество точек, соответствующих точкам пересечения рёбер из F , обозначим через W' . Концу ребра будет соответствовать только он сам. Пусть $W = W' \cup V(G)$.

После этого для каждой из частей непростых рёбер AeB (здесь A и B – точки пересечения или концы ребра) проведем (очень близко) вдоль ребра e с каждой из сторон две копии этой части, соединяющие соответствующие A и B точки из W и не пересекающие рёбер \mathcal{H} (см. рисунок 8а). Будем говорить, что каждая из двух соответствующих копий *параллельна* части AeB .

Построим плоский граф Z' на вершинах из W , рёбра которого – построенные выше копии участков непростых рёбер \mathcal{H} .

Замечание 1. Очевидно, каждая вершина из W' имеет степень 2 в графе Z' .

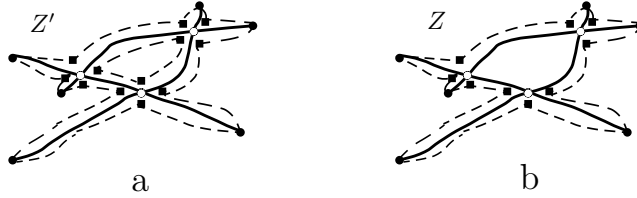


Рис. 8. Графы Z' и Z .

Определение 7. Вершины из $V(G)$ делят граф Z' на пути, внутренние вершины которых принадлежат W' . Мы будем называть эти пути

цепями. Если компонента связности графа Z' не содержит вершин из $V(G)$, то это простой цикл на вершинах из W' , мы будем считать его цепью без концов.

Назовем цепь *короткой*, если она состоит из двух частей, параллельных крайним частям рёбер.

Назовем цепь *невыврожденной*, если ее начало и конец – две различные вершины. Если же цепь не имеет начала и конца или они совпадают, то она – *выврожденная*.

Обозначим через Z граф на вершинах из $V(G)$, рёбра которого – все невырожденные цепи (см. рисунок 8b).

Докажем ряд свойств цепей и графа Z . Очевидно, каждая вершина из W' принадлежит не более чем одной невырожденной цепи. Отметим, что цепь – это не ребро, а его изображение на плоскости. Возможно, две разные цепи имеют одни и те же концы.

Определение 8. Ребро $e \in E(G)$ и цепь f назовем *параллельными*, если у них совпадают пары концов и в одной из частей, на которые образованная e и f замкнутая ломаная делит плоскость, нет вершин графа G .

Замечание 2. Так как части непростых рёбер между точками пересечения не пересекают никаких рёбер изображения \mathcal{H} , построенные выше цепи не пересекают ни друг друга, ни рёбер \mathcal{H} .

Утверждение 5. 1) *Короткая цепь – всегда невырожденная.*

2) *Пусть ребро $e \in E(G)$ параллельно цепи f . Тогда одна из частей, на которые замкнутая ломаная из f и e делит плоскость, не содержит ни вершин, ни частей рёбер графа H .*

3) *Для каждой невырожденной цепи существует ребро из $E(G)$, параллельное этой цепи, причем это ребро – простое.*

Доказательство. 1) Короткая цепь состоит из крайних частей двух разных пересекающихся рёбер, концы которых – различные вершины.

2) Одна из частей U , на которые замкнутая ломаная C из f и e делит плоскость, не содержит вершин графа H . Предположим, что U содержит часть ребра $e' \in E(H)$. Ребро e' не может пересекать C (ни простое ребро e , ни цепь f не пересекают рёбер \mathcal{H}). Значит, e' лежит в U и (так как в U нет вершин) имеет те же концы, что e . Но тогда эти два ребра параллельны, противоречие.

3) Цепи изображены так, что они не пересекают ни друг друга, ни других рёбер изображения \mathcal{H} . Значит, ввиду максимальной H , в

изображении \mathcal{H} уже проведены рёбра, параллельные всем невырожденным цепям, причем все эти рёбра — простые. \square

Для завершения доказательства теоремы 3 остается доказать, что граф H является 2-диагональным. Рассмотрим вершину $x \in V(H)$ и последовательные выходы рёбер из нее в \mathcal{H} . Предположим, что выходы двух непростых ребер $e_1 = xy_1$ и $e_2 = xy_2$ — соседние. Каждое ребро e_i пересекает одно или два ребра. На e_i можно отметить точку пересечения A_i так, что xe_iA_i — крайняя часть e_i . Пусть в A_i ребро e_i пересекается с ребром e'_i , причем $z_ie'_iA_i$ — крайняя часть этого ребра. По теореме 1, $e'_1 \neq e_2$ и $e'_2 \neq e_1$.

Вершине x инцидентна короткая (а значит, невырожденная) цепь ℓ_1 , параллельная ломаной $xe_1A_1e'_1z_1$. По пункту 3 утверждения 5, в \mathcal{H} существует параллельное ℓ_1 простое ребро $f_1 = xz_1$ (см. рис. 9). Докажем, что выходы e_1 и f_1 из вершины x должны быть соседними. Действительно, с одной из сторон между ребром e_1 и цепью ℓ_1 по построению цепей не может быть выходов рёбер из x . По пункту 2 утверждения 5, между ребром f_1 и параллельной ему цепью ℓ_1 с одной из сторон нет выходов рёбер из вершины x . Значит, выходы e_1 и f_1 из вершины x соседние (с одной из сторон между ними расположен только выход цепи ℓ_1).

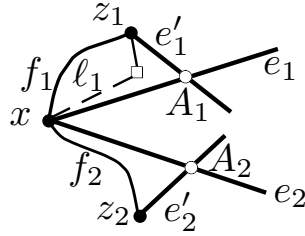


Рис. 9. Выходы двух соседних непростых рёбер из вершины x .

Аналогично, существует простое ребро $f_2 = xz_2$, причем выходы рёбер f_2 и e_2 из вершины x — соседние (возможно, рёбра f_1 и f_2 совпадают). Таким образом, пара соседних непростых рёбер e_1, e_2 окружена с двух сторон простыми рёбрами f_1, f_2 . Следовательно, условие 2-диагональности в вершине x выполнено. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. K. Wagner, *Bemerkungen zum Vierfarbenproblem*. — Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, **46** (1936), 26–32.
2. I. Fáry, *On straight-line representation of planar graphs*. — Acta Sci. Math. (Szeged), **11** (1948), 229–233.
3. G. Ringel, *Ein Sechsfarbenproblem auf der Kugel*. — Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg. Bd. **29** (1965), 107–117.
4. J. Pach, G. Tóth, *Graphs drawn with few crossing per edge*. — Combinatorica **17**, No. 3 (1997), 427–439.
5. О. В. Бородин, *Решение задачи Рингеля о вершинно-граневой раскраске плоских графов и о раскраске 1-планарных графов*. — Методы дискретного анализа в изучении реализаций логических функций. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, Вып. 41. (1984), 12–26.

Karpov D. V. On plane drawings of 2-planar graphs.

It is proved that any $(2k+1)$ -edge connected k -planar graph has a plane drawing such that any two crossing edges in this drawing cross each other exactly once. It is proved that any 2-planar graph has a plane drawing such that any two crossing edges in this drawing has no common end and cross each other exactly once. It is also proved that any 2-planar graph has a supergraph on the same vertex set which can be drawn such that, for any vertex v , among every three successive edges incident to v , there is at least one simple edge. (An edge is called simple if it does not intersect any other edge in this drawing).

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова РАН;
наб. р. Фонтанки 27; 191023,
С.-Петербург, Россия

Поступило 5 декабря 2019 г.

С.-Петербургский государственный университет,
Университетская набережная 7-9,
199034, С.-Петербург, Россия

E-mail: dvk0@yandex.ru