Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 488, 2019 г.

**Д. В. Карпов**

# О ПРАВИЛЬНЫХ 3-РАСКРАСКАХ РЕБЕР КУБИЧЕСКОГО ГРАФА

## §1. Введение

Мы будем использовать стандартные обозначения: для графа $G$ множества его вершин и рёбер будем обозначать через $V(G)$ и $E(G)$, а их количества – через $v(G)$ и $e(G)$ соответственно.

Для множества $X \subset V(G) \cup E(G)$ через $G - X$ будем обозначать граф, полученный из $G$ удалением вершин и рёбер множества $X$, а также всех рёбер, инцидентных вершинам из $X$.

Для графов $G$ и $H$ мы будем обозначать через $G \cup H$ их *объединение* – граф с множеством вершин $V(G) \cup V(H)$ и множеством рёбер $E(G) \cup E(H)$.

Для $v \in V(G)$ через $\mathrm{N}_G(v)$ будем обозначать *окрестность* вершины $v$, то есть множество всех вершин графа $G$, смежных с $v$.

Напомним, что граф называется *двусвязным*, если он имеет не менее 3 вершин и остается связным при удалении любой вершины. Граф называется *трёхсвязным*, если он имеет не менее 4 вершин и остается связным при удалении любых двух вершин.

В работе рассматривается *кубический граф* $G$ (степени всех его вершин равны 3).

Раскраска ребер в 3 цвета называется *правильной*, если ребра, имеющие общую вершину, покрашены в разные цвета. В дальнейшем раскраски ребер в 3 цвета мы будем называть просто 3-*раскрасками*, а правильные раскраски рёбер в 3 цвета – *правильными* 3-*раскрасками*. Будем обозначать количество правильных 3-раскрасок графа $G$ через $\chi'_3(G)$.

Через $\mathbb{F}_3$ мы будем обозначать поле вычетов по модулю 3.

---

*Ключевые слова*: кубический граф, 3-раскраски рёбер.

Работа подготовлена при поддержке программы Президиума РАН “Новейшие методы математического моделирования в изучении нелинейных динамических систем” (целевая субсидия 08-04).

**1.1. История вопроса и основные результаты.** Изучение правильных 3-раскрасок кубического графа представляет большой интерес. Так, из существования такой раскраски для произвольного планарного кубического графа следует теорема о четырех красках.

Настоящая работа посвящена вопросу о восстановлении правильной 3-раскраски по 3-раскраске некоторого подмножества множества ребер и оценке количества правильных 3-раскрасок.

Рассмотрим кубический граф $G$, в котором $2n$ вершин и $3n$ ребер. Правильная 3-раскраска всех $3n$ ребер может быть однозначно восстановлена по раскраске меньшего числа ребер, что мы докажем ниже. (То есть, можно выбрать такое подмножество множества ребер графа $G$, что в любых двух правильных 3-раскрасках графа $G$ эти рёбра покрашены по-разному).

**Теорема 1.** *Пусть $T$ – остовное дерево связного кубического графа $G$ с $v(G) = 2n$. Тогда 3-раскраска $n+1$ ребер из $E(G) \setminus E(T)$ однозначно задает правильную 3-раскраску всех $3n$ ребер графа $G$, то есть, в любых двух правильных 3-раскрасках графа $G$ ребра из $E(G) \setminus E(T)$ покрашены по-разному.*

Далее мы переведем теорему 1 на алгебраический язык в стиле критерия раскрашиваемости графов, придуманного Ю. В. Матиясевичем [1]. Мы сформулируем этот критерий в несколько менее общем виде чем это было сделано в [1] и позже в [2]. Поставим в соответствие каждому ребру $r$ графа $G$ по переменной (принимающей значения из поля $\mathbb{F}_3$), которую мы будем обозначать так же, как ребро. Пусть $E(G) = \{x_1, \dots, x_{3n}\}$, а

$$F_G(x_1, \dots, x_{3n}) = \prod_{x_i, x_j \text{ – смежные рёбра}} (x_i - x_j)$$

(выбор знака в каждой из скобок не имеет значения). Тогда, как доказано в [1], правильная 3-раскраска графа $G$ существует, если и только если многочлен $F_G$ не является тождественно равным нулю. Более того, если считать, что цвета 3-раскраски – это элементы поля $\mathbb{F}_3$, то правильными являются в точности те 3-раскраски, на которых многочлен $F_G$ не обращается в 0.

Для связного кубического графа $G$, в котором $2n$ вершин, произвольного его остовного дерева $T$ и любой вершины $a$ мы определим многочлен $F_G^{T,a}$ от $n+1$ переменной над $\mathbb{F}_3$ с аналогичными свойствами.

**Теорема 2.** *Пусть $G$ – связный кубический граф, $T$ – его остовное дерево и $a \in V(G)$. Пусть $x_1, \ldots, x_{n+1}$ – переменные, соответствующие рёбрам из $E(G) \setminus E(T)$. Пусть элементы поля $\mathbb{F}_3$ являются цветами 3-раскраски. Тогда существуют такой многочлен*

$$F_G^{T,a}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \prod_{v \in V(G) \setminus \{a\}} h_v(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$$

*над полем $\mathbb{F}_3$ (где $h_v(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ – линейные многочлены) и такие линейные многочлены $c_e(x_1, \ldots, x_{n+1})$ (для всех $e \in E(T)$), что 3-раскраску рёбер из $E(G) \setminus E(T)$ с цветами $x_1 = y_1, \ldots, x_{n+1} = y_{n+1}$ можно продолжить до правильной 3-раскраски графа $G$, если и только если*

$$F_G^{T,a}(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) \neq 0.$$

*Более того, цвет каждого ребра $e \in E(T)$ в полученной правильной 3-раскраске равен $c_e(y_1, \ldots, y_{n+1})$.*

Напрямую из теоремы 2 следует, что кубический граф $G$ имеет правильную 3-раскраску, если и только если построенный в доказательстве теоремы многочлен $F_G^{T,a}$ не является тождественно равным нулю над $\mathbb{F}_3$.

**Определение 1.** Пусть $G$ – кубический граф. Множество рёбер $F \subset E(G)$ назовем *определяющим*, если в любых двух правильных 3-раскрасках графа $G$ ребра из $F$ покрашены по-разному.

В теореме 1 в связном кубическом графе с $3n$ рёбрами построено определяющее множество из $n+1$ ребра. Если кубический граф несвязен, то каждая компонента связности будет добавлять по лишнему ребру. Мы докажем, что на самом деле существуют меньшие определяющие множества рёбер.

**Теорема 3.** *Кубический граф $G$ с $e(G) = 3n$ имеет определяющее множество из $n$ ребер.*

Однако, на этот раз процесс восстановления правильной 3-раскраски не так прост, и придумать аналогичный теореме 2 многочлен от $n$ переменных не получается. Интересно, а существует ли такой многочлен?

В лемме 3 мы покажем метод восстановления правильных 3-раскрасок, позволяющий в некоторых случаях улучшить результат теоремы 3. В частности, для случая плоского кубического графа можно доказать следующее. Напомним, что *грани* – это части, на которые плоский граф делит плоскость. Граница грани двусвязного (и, тем более, трёхсвязного) плоского графа – это простой цикл.

**Теорема 4.** *Пусть $G$ – трёхсвязный кубический плоский граф с $e(G) = 3n$, каждая грань которого имеет не более чем $d$ вершин. Тогда $G$ имеет определяющее множество из $n - \frac{n-2d+3}{3d-8}$ ребер.*

В конце работы мы докажем теорему с немного другим сюжетом – оценим количество правильных 3-раскрасок ребер кубического мультиграфа $G$, которое мы обозначим через $\chi'_3(G)$.

**Теорема 5.** *Для кубического мультиграфа $G$ с $v(G) = 2n$ выполнены следующие утверждения.*

1) $\chi'_3(G) \leqslant 3 \cdot 2^n$.
2) *Если $G$ имеет не более одной пары кратных рёбер, то*

$$\chi'_3(G) \leqslant 9 \cdot 2^{n-2}.$$

Оценка из пункта 1 – точная: например, она достигается на цикле длины $2n$, у которого рёбра через одно – двойные. Графов без кратных рёбер, на которых достигается оценка из пункта 2, нам не известно. Предположительно, эта оценка не точна, вопрос о точной верхней оценке на количество правильных 3-раскрасок в графе без кратных рёбер остаётся открытым.

Далее работа построена следующим образом. В разделе 2 будут доказаны теоремы 1 и 2 – о восстановлении цветов рёбер остовного дерева по цветам остальных рёбер. В разделе 3 будет рассмотрен вопрос о восстановлении цветов рёбер цикла и доказана теорема 3. В разделе 5 будет доказана теорема 5 о количестве раскрасок.

## §2. Восстановление цветов рёбер остовного дерева

Начнем с самой простой теоремы.

**Доказательство теоремы 1.** Рассмотрим любую висячую вершину дерева $T$. Цвета двух выходящих из нее ребер – тех, что не вошли в дерево $T$ – известны. Следовательно, если их цвета одинаковы, то дополнить раскраску до правильной невозможно, а если цвета этих двух ребер различны, то однозначно восстанавливается цвет третьего ребра. Таким образом, мы уменьшили “нераскрашенное” дерево на одно ребро. Продолжив этот процесс мы либо однозначно дополним раскраску до правильной, раскрасив все оставшиеся ребра, либо установим, что это невозможно. □

Доказательство следующей теоремы – фактически перевод доказательства теоремы 1 на язык многочленов с добавлением некоторых подробностей.

**Доказательство теоремы 2.** Будем считать вершину $a$ корнем дерева $T$, разобьем все вершины на уровни: $L_0 = \{a\}$, а уровень $L_i$ состоит из вершин, находящихся на расстоянии $i$ от корня $a$.

Определим для каждого ребра $e$ линейную функцию $c_e(x_1, \ldots, x_{n+1})$, означающую цвет ребра $e$ в случае, когда в итоге получилась правильная раскраска. Изначально положим $c_e = x_e$ для всех рёбер $e \in E(G) \setminus E(T)$. Функции для рёбер дерева $T$ построим по индукции. Изначально все рёбра дерева $T$ – *непокрашенные*, мы будем их красить, поднимаясь с больших уровней к корню. Будем действовать так, что непокрашенные рёбра всегда будут образовывать дерево $T'$ (изначально $T' = T$).

Пусть $e(T') \neq 0$, а $k$ – наибольший номер уровня, содержащий вершину $v$ дерева $T'$. Тогда $v$ – лист $T'$, он инцидентен двум покрашенным ребрам $f$ и $f'$, а также непокрашенному ребру $e$. Положим $h_v := c_f - c_{f'}$ и $c_e := -c_f - c_{f'}$. Если $c_f \neq c_{f'}$, то $h_v \neq 0$, а $c_e$ – как раз третий возможный цвет, так как цвета – это элементы $\mathbb{F}_3$ и их сумма равна 0. В этом случае цвет ребра $e$ в правильной 3-раскраске может быть равен только $c_e$. Если же $c_f = c_{f'}$, то $h_v = 0$. Объявим ребро $e$ покрашенным и положим $T' := T - v$.

В результате таких операций, в некоторый момент мы получим $e(T') = 0$ (разумеется, тогда дерево $T'$ будет состоять из одной вершины – корня $a$ исходного дерева) и все рёбра будут покрашены. Рассмотрим многочлен

$$F_G^T(x_1, x_2, \ldots x_{n+1}) = \prod_{v \in V(G) \setminus \{a\}} h_v(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}).$$

Если для набора значений $y_1, \ldots, y_{n+1}$ мы имеем $F_G^T(y_1, \ldots y_{n+1}) = 0$, то для некоторой вершины $w$ мы имеем $h_w(y_1, \ldots, y_{n+1}) = 0$. Пусть $w$ – первая такая вершина, встретившаяся в описанной выше процедуре. Тогда два инцидентных $w$ ребра были покрашены в один и тот же цвет.

Так как процедура покраски до попадания в вершину $w$ была однозначна, правильная 3-раскраска с начальными данными $y_1, \ldots, y_{n+1}$ в этом случае невозможна.

Пусть для набора значений $y_1, \ldots, y_{n+1}$ мы имеем $F_G^T(y_1, \ldots, y_{n+1}) \neq 0$. Тогда докажем, что 3-раскраска, красящая каждое ребро $e$ в цвет $c_e$ – правильная. Действительно, для всех вершин $v \in V(G) \setminus \{a\}$ мы имеем $h_v \neq 0$, а тогда по построению все три инцидентных $v$ ребра покрашены в разные цвета. Так как каждое ребро имеет два конца, из соображений четности, и цвета всех инцидентных $a$ рёбер различны (каждый цвет должен иметь по концу в вершине $a$, иначе количество концов какого-либо цвета будет нечетно). □

## §3. Восстановление цветов рёбер цикла

В произвольном (не обязательно связном) кубическом графе можно выбрать меньшее подмножество ребер, однозначно задающее правильную 3-раскраску. Однако, алгоритм выбора подмножества и алгоритм восстановления 3-раскраски будут сложнее. Ясно, что если в кубическом графе с $3n$ ребрами неизвестны цвета хотя бы $2n$ ребер, то есть цикл из ребер, цвета которых не определены. Рассмотрим вопрос о восстановлении цикла.

Пусть $Z$ – простой цикл в кубическом графе $G$. Теперь для удобства будем считать, что цвета 3-раскраски – это 0, 1 и 2. Из каждой вершины цикла $Z$ кроме двух ребер цикла должно выходить еще одно ребро. Назовем это ребро *дополнительным*. Раскраску ребер, выходящих из вершин цикла $Z$, мы назовем правильной раскраской цикла $Z$, если в каждой вершине цикла $Z$ сходятся три ребра разных цветов. Пусть нам известны цвета всех дополнительных ребер или некоторых из них. Как по ним восстановить цвета ребер цикла? На этот вопрос мы ответим ниже.

**Лемма 1.** *Пусть нам известны цвета всех дополнительных ребер цикла $Z$, кроме одного.*

1) *Если все эти ребра покрашены в один цвет и длина цикла $Z$ четна, то ребра цикла $Z$ и оставшееся дополнительное ребро можно докрасить двумя способами так, чтобы получилась правильная 3-раскраска цикла $Z$. При этом, все дополнительные ребра будут покрашены в один цвет. Если длина цикла $Z$ нечетна, то дополнить эту 3-раскраску до правильной невозможно.*

2) *Если ни в одной 3-раскраске графа $G$ все дополнительные ребра не могут быть покрашены в один цвет, то $E(G) \setminus E(Z)$ – определяющее множество графа $G$.*

**Доказательство.** Пусть $Z = a_1a_2 \dots a_k$ и нам известны цвета дополнительных ребер, выходящих из всех вершин, кроме $a_k$.

1) Пусть все покрашенные дополнительные ребра имеют цвет 0. Тогда ребро $a_1a_2$ может быть покрашено в цвет 1 или в цвет 2. Пусть оно покрашено в цвет 1. Тогда цвета всех остальных ребер цикла восстанавливаются однозначно: ребра $a_ka_1$ и $a_2a_3$ должны иметь цвет 2, $a_3a_4$ – цвет 1, и так далее (цвета ребер чередуются). При четном $k$ ребро $a_{k-1}a_k$ будет покрашено в цвет 1, в этом случае дополнительное ребро, выходящее из вершины $a_k$ должно быть покрашено в цвет 0. Если же $k$ нечетно, то ребро $a_{k-1}a_k$ должно быть покрашено в цвет 2, но в этом случае из вершины $a_k$ выходят два ребра цвета 2, то есть, правильная раскраска невозможна.

2) Пусть среди покрашенных дополнительных ребер есть ребра разных цветов. Следовательно, есть два соседних ребра разных цветов, пусть это ребра, выходящие из вершин $a_i$ и $a_{i+1}$ (где $i < k$). Тогда однозначно восстанавливается цвет ребра $a_ia_{i+1}$, после чего можно восстановить цвета соседних с ним ребер (или установить невозможность правильной раскраски), и так далее. Неизвестные ребра цикла и одно дополнительное ребро восстанавливаются тем же алгоритмом, что и в случае дерева (теорема 1). □

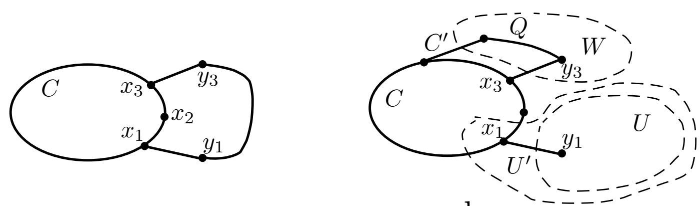
**Определение 2.** Назовём цикл $C$ в кубическом графе $G$ *хорошим*, если в правильной 3-раскраске графа $G$ все дополнительные рёбра $C$ не могут быть покрашены в один цвет.

Если в графе есть цикл нечетной длины, то по лемме 1 он хороший. В любом случае (в том числе для двудольного графа $G$), хорошим будет такой цикл $Z$, для которого существует вершина $v \notin V(Z)$, соединенная не менее, чем с двумя вершинами цикла.

В следующей лемме мы докажем существование хорошего цикла в кубическом графе.

**Лемма 2.** *В кубическом графе $G$ существуют такие простой цикл $Z$ и вершина $v \notin V(Z)$, что $v$ смежна хотя бы с двумя вершинами $Z$.*

**Доказательство.** Можно считать граф $G$ связным, иначе рассмотрим его компоненту связности. Очевидно, $G$ имеет циклы, проходящие не по всем вершинам и не имеющие хорд (например, цикл минимальной длины). Рассмотрим среди них такой цикл $C = x_1x_2\dots x_k$ (нумерация циклическая), что одна из компонент связности $U$ графа $G' = G - V(C)$ – максимальная (для всех возможных циклов). Для каждой вершины $x_i$ обозначим за $y_i$ смежную с ней вершину, не входящую в цикл $Z$ (такая вершина ровно одна).




a b

Рис. 1. Циклы и компоненты.

Можно считать, что $y_1 \in U$. Если в $G'$ существует $y_1y_3$-путь, то вместе с $C - x_2$ этот путь образует искомый цикл $Z$ (вершина $x_2$ смежна с $x_1, x_3 \in V(Z)$, см. рисунок 1a). Значит, $y_3$ принадлежит отличной от $U$ компоненте связности графа $G'$ – скажем, $W$. Если в графе $G(W)$ есть цикл $C'$, то в графе $G - V(C')$ есть компонента связности $U' \supset U \cup \{x_1\}$, что противоречит выбору цикла $C$. Остается случай, когда $G(W)$ – дерево. Тогда существует хотя бы два ребра от $W$ до $C$ – к $x_3$ и еще какой-нибудь отличной от $x_1$ вершине, скажем, $x_i$. Значит, есть $x_3x_i$-путь $Q$ в графе $G$, который вместе с $x_3x_i$-дугой цикла $C$, не содержащей $x_1$, образует цикл $C'$. Как и выше, существует компонента связности $U' \supset U \cup \{x_1\}$ (см. рисунок 1b), что противоречит выбору цикла $C$. $\square$

**Замечание 1.** 1) Если граф $G$ связен, но недвусвязен, то хорошо известно, что он не имеет правильной 3-раскраски. В этом случае теорема 3 очевидна: подойдет произвольное множество из $n$ рёбер. Также в этом случае очевидно и утверждение теоремы 5.

2) Основной результат статьи [3] (доказанный проще в [4], но все равно весьма непростой) говорит нам, что в $k$-связном графе $G$, вершины которого имеют степень не менее $\frac{3k-1}{2}$, можно удалить вершину

без потери $k$-связности. В частности, в двусвязном кубическом графе $G$ есть такая вершина $x$, что граф $G - x$ двусвязен, и в нем можно по теореме Менгера найти цикл, содержащий две вершины из окрестности $x$. Таким образом, получается более короткое доказательство леммы 2. Однако, теорема об удалении вершины без потери $k$-связности доказывается весьма непросто, поэтому, в статье дано самостоятельное доказательство леммы 2.

**Доказательство теоремы 3.** Очевидно, достаточно доказать теорему для случая связного графа. (Выделим ребра в каждой компоненте связности, объединим наборы, и получим искомые $n$ ребер для исходного графа.)

Итак, пусть граф $G$ связен. Воспользуемся леммой 2: в графе $G$ существуют такие цикл $Z$ и вершина $v \notin V(Z)$, что $v$ смежна хотя бы с двумя вершинами из $Z$. Удалим цикл $Z$, пусть образовались компоненты связности $G_1, \ldots, G_k$. В каждой из компонент связности $G_i$ выделим остовное дерево $T_i$. Пусть $T_Z$ – подграф графа $G$, полученный присоединением к циклу $Z$ всех деревьев $T_i$ (каждое дерево присоединяется одним ребром). Очевидно, $T_Z$ – связный граф, имеющий $2n$ вершин, $2n$ ребер и единственный цикл $Z$ (очевидно, хороший).

Докажем, что $E(G) \setminus E(T_Z)$ – определяющее множество графа $G$. Во-первых, рассмотрим дерево $T_i$. Если $v(T_i) = 1$, то мы можем восстановить ребро от единственной вершины дерева $T_i$ до цикла $Z$. Пусть $v(T_i) \geqslant 2$. Тогда дерево $T_i$ имеет имеет лист $a_i$, не соединенный с циклом $Z$ (у дерева не менее двух листьев, а мы соединили с циклом $Z$ только одну вершину дерева). Начиная с $a_i$, мы можем восстановить цвета всех ребер дерева $T_i$ (как в теореме 1), а также ребро от дерева до цикла $Z$. Таким образом, мы восстановим цвета всех ребер, кроме ребер цикла $Z$, а $E(G) \setminus E(Z)$ является определяющим по лемме 1. $\square$

С помощью леммы 1 можно восстанавливать 3-раскраски более сложных подграфов чем те, что требуются в теореме 3.

**Лемма 3.** *Пусть $G$ – связный кубический граф. Построим последовательность подграфов $G_0 = C$, $G_1 = G_0 \cup P_1$, $\ldots$, $G_n = G_{n-1} \cup P_n$, где $C$ – хороший цикл, а $P_{i+1}$ – простой путь, внутренние вершины которого не принадлежат $V(G_i)$, для которого существует вершина $w_{i+1} \in V(G) \setminus V(G_{i+1})$, смежная с двумя внутренними вершинами $P_{i+1}$. Тогда $E(G) \setminus E(G_n)$ – определяющее множество графа $G$.*

**Доказательство.** Докажем индукцией по $k$, что $E(G)\setminus E(G_k)$ – определяющее множество графа $G$. База для случая $k=0$ следует из леммы 1.

Докажем переход $k\to k+1$. Пусть $P_{k+1}=a_0\dots a_{m+1}$, где $a_1,\dots,a_m\notin V(G_k)$. Пусть $e_1,\dots,e_m$ – рёбра не из пути $P_{k+1}$, инцидентные $a_1,\dots,a_m$ соответственно. Очевидно, эти рёбра не принадлежат $E(G_k)$, а значит, их цвета известны. Пусть, скажем, $e_i$ и $e_j$ инцидентны $w_{i+1}$, тогда их цвета различны (или дополнить раскраску до правильной нельзя, в этом случае доказательство леммы закончено). Значит, существует такое $\ell\in\{i,\dots,j-1\}$, что цвета рёбер $e_\ell$ и $e_{\ell+1}$ различны. Тогда мы можем восстановить цвет ребра $a_\ell a_{\ell+1}$, после чего, аналогично доказательству леммы 1, восстанавливаются все рёбра пути $P_{k+1}$ или доказывается, что раскраску нельзя дополнить до правильной 3-раскраски графа $G$. $\square$

С помощью этой леммы мы усилим результат теоремы 3 для плоского кубического графа.

## §4. Восстановление правильной 3-раскраски плоского графа

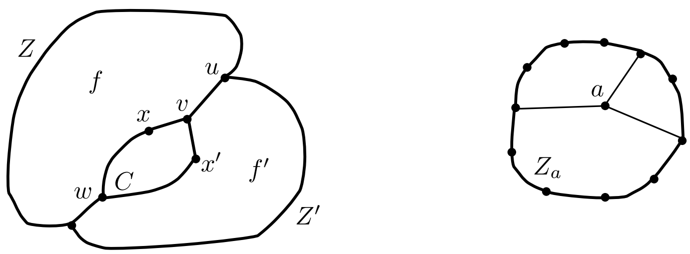
Перейдем к случаю трёхсвязного плоского кубического графа $G$. Мы рассматриваем графы без кратных рёбер. Для грани $f$ мы будем обозначать ее границу через $B_f$. Как мы знаем, граница грани двусвязного (и, тем более, трёхсвязного) плоского графа – это простой цикл. *Размер границы* грани $f$ – это длина цикла $B_f$. Все грани плоского графа равноправны, но визуально одна имеет отличие – это единственная неограниченная *внешняя грань*, граница которой – *внешний цикл* плоского графа. Мы будем в доказательствах для наглядности считать нужную нам грань внешней.

**Лемма 4.** *Пусть $G$ – трёхсвязный кубический плоский граф, а $f$ и $f'$ – две его грани, причем циклы $Z=B_f$ и $Z'=B_{f'}$ имеют общее ребро $uv$. Тогда $B_f$ и $B_{f'}$ не имеют общих вершин, кроме $u$ и $v$.*

**Доказательство.** Пусть $\mathrm{N}_G(v)=\{u,x,x'\}$. Можно считать, что грани $f$ и $f'$ – внутренние области циклов $Z$ и $Z'$ соответственно. Так как рёбра не могут выходить внутрь грани, можно считать, что $vx\in E(Z)$ и $vx'\in E(Z')$.

Предположим, что $Z$ и $Z'$ имеют еще одну общую вершину и найдем первую такую вершину по циклу $Z$, начиная с ребра $vx$ – пусть это вершина $w$ (см. рис. 2a). Тогда дуги $vZw$ и $vZ'w$ (содержащие рёбра $vx$ и $vx'$) образуют цикл $C$, который во внешней области окружен гранями $f$ и $f'$.

Пусть $I$ – множество из всех вершин графа $G$, расположенных внутри $C$ и на цикле $C$, кроме $v$ и $w$. Тогда $I \neq \varnothing$ (так как $x, x' \in I$). Поскольку рёбра графа $G$ не могут выходить внутрь граней $f$ и $f'$, множество $\{w, v\}$ отделяет $I$ от остальных вершин графа $G$ (которые, очевидно, есть), что противоречит трёхсвязности графа. $\square$




a b

Рис. 2. Грани с общей вершиной.

Рассмотрим любую вершину $a$. Она входит в три грани $f_1, f_2, f_3$, граничные циклы каждых двух из которых по лемме 4 имеют ровно одно общее ребро, причем инцидентное $a$ (см. рис 2b). Тогда $Z_a = B_{f_1} \cup B_{f_2} \cup B_{f_3} - a$ – простой цикл, с тремя вершинами которого смежна $a$. Очевидно, цикл $Z_a$ – хороший.

Нам понадобится еще одно несложное вспомогательное утверждение.

**Лемма 5.** *Пусть $U$ – одна из областей, на которые цикл $C$ с $m$ вершинами делит плоскость. В $U$ отмечено $p$ вершин, которые соединены непересекающимися рёбрами с вершинами цикла, причем из каждой отмеченной вершины выходит хотя бы три ребра. Тогда $p \leqslant m - 2$.*

**Доказательство.** Пусть $P$ – множество отмеченных вершин. Оставим из каждой точки множества $P$ ровно три ребра. Проведем в $U$ все возможные диагонали цикла $C$ (каждая диагональ, разумеется – это ломаная), не пересекающие друг друга и рёбер от точек из $P$ до вершин цикла (то есть, будем проводить такие диагонали в произвольном порядке, пока это возможно). Эти диагонали разбивают $U$ на части. Рассмотрим вершину $w \in P$, соединенную с вершинами $x, y, z$ цикла $C$. Тогда, если $xy$ – не ребро цикла $C$, то такая диагональ проведена: диагональ $xy$ можно провести вдоль ломаной $xwy$. Аналогично для $xz$ и $yz$. Таким образом, среди частей, на которые область $U$ разбита диагоналями, есть треугольник $xyz$, содержащий $w$. Очевидно, других точек из $P$ в этом треугольнике быть не может. Следовательно, $p$ не превосходит количества треугольников в триангуляции цикла $C$ диагоналями, то есть $m-2$. □

**Доказательство теоремы 4.** Наша цель – применить лемму 3. Мы будем строить графы $G_0 = C, G_1 = C_0 \cup P_1, \dots, G_k = G_{k-1} \cup P_k$, где $C$ – хороший цикл, а путь $P_i$ имеет оба конца в $G_{i-1}$ и вершину $w_i \notin V(G_i)$, смежную с двумя внутренними вершинами $P_i$. Для каждого подграфа $G_i$ мы определим *внешний цикл* $C_i$ (по построению $G_i$ будет лежать внутри $C_i$), причем этот цикл будет простым.

**База: построение цикла** $C$.
Хорошо известно, что плоский граф имеет грань размера не более 5. Если есть грань размера 3 или 5, то ее граница по лемме 1 – хороший цикл, который мы и возьмем в качестве $C$. Будем считать, что грань лежит внутри $C$ и положим $C_0 = C$.

Если грани размера 3 или 5 нет, то рассмотрим грань размера 4, скажем, с границей $v_1v_2v_3v_4$. Пусть $f_1$ и $f_2$ – две другие грани, содержащие $v_1$, тогда их границы имеют по лемме 4 ровно одно общее ребро $v_1w$, а $B_{f_1} \cup B_{f_2} - v_1w$ – простой цикл $C$ длины не более $2d-2$ (см. рис. 3а). Этот цикл – хороший, так как $v_3$ смежна с двумя его вершинами $v_2$ и $v_4$.

**Построение пути** $P_{k+1}$ **и графа** $G_{k+1}$.
Пусть построен граф $G_k$ с внешним циклом $C_k = a_1 \dots a_m$. Обозначим через $f'_i$ грань $G$, содержащую ребро $a_ia_{i+1}$ и лежащую во внешней области цикла $C_k$. Пусть $F' = \{f'_1, \dots, f'_m\}$. Обозначим через $N$ множество всех вершин, лежащих во внешней области цикла $C_k$ и входящих в грани из $F'$.

Рассмотрим два случая.

**1.** *Существует вершина $w \in N$, входящая не более чем в две грани из $F'$.*

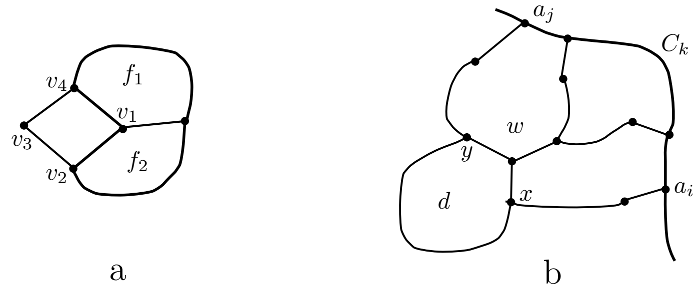



Рис. 3. Построение цикла $C$ и пути $P_{k+1}$.

В этом случае мы построим искомый путь $P_{k+1}$. Пусть $d \notin F'$ – грань, содержащая $w$, а $x$ и $y$ – соседи $w$ в грани $d$. Рассмотрим простой цикл $Z_w$ и отметим на нем все рёбра внешнего цикла $C_k$. Как минимум одно такое ребро есть (так как вершина $w \in N$ должна лежать в грани из $F'$). Эти рёбра разбивают $Z_w$ на дуги, одна из которых (скажем, дуга от $a_i$ до $a_j$, см. рисунок 3b) содержит целиком участок границы грани $d$ от $x$ до $y$ (так как на нем нет рёбер цикла $C_k$, иначе $d \in F'$). Именно этот участок цикла $Z_w$ от $a_i$ до $a_j$ и будет путём $P_{k+1}$, положим $w_{k+1} = w$.

Цикл $C_{k+1}$ получается заменой на путь $P_{k+1}$ участка цикла $C_k$ между $a_j$ и $a_i$, пересекающего $Z_w$. Этот цикл будет простым, так как внутренние вершины $P_{k+1}$ не принадлежат циклу $C_k$.

Отметим, что $v(Z_w) \leqslant 3(d-2)$, откуда следует, что $P_{k+1}$ имеет не более $3d-8$ внутренних вершин (так как $Z_w$ содержит хотя бы две вершины цикла $C_k$). Следовательно,

$$v(G_{k+1}) - v(G_k) \leqslant 3d - 8. \tag{1}$$

**2.** *Для каждой вершины из $N$ все три содержащие ее грани принадлежат $F'$.*

Тогда $V(G) \setminus V(G_k) \subset N$. В этом случае мы оценим $v(G) - v(G_k)$ и завершим доказательство.

Отметим в каждой грани из $f \in F'$ точку $X_f$ на одном из входящих в $F$ рёбер цикла $C_k$. Соединим $X_f$ непересекающимися ломаными со всеми вершинами из $N$, входящими в границу грани $f$. Таким образом, на некоторых из $m$ рёбер цикла $C_k$ отмечено по одной точке, а каждая из вершин множества $N$ соединена с тремя отмеченными точками так, что никакие два из этих рёбер не пересекаются. По лемме 5 тогда $|N| \leqslant m-2$.

Таким образом, если $G_k$ – последний построенный граф, то

$$v(G) - v(G_k) \leqslant e(C_k) - 2 \leqslant v(G_k) - 2. \qquad (2)$$

**Подсчет количества шагов.**
Всего было сделано $k+1$ шагов (один базовый шаг и $k$ добавлений пути). В базовом шаге был построен граф $G_0$ с $v(G_0) \leqslant 2d-2$. По неравенству (1), на каждом из следующих шагов добавлялось не более чем $3d-8$ вершин. Следовательно, $v(G_k) \leqslant 2d-2+(3d-8)k$. В силу (2) мы имеем

$$2n = v(G) \leqslant 2v(G_k) - 2 = 2(2d-2+(3d-8)k) - 2,$$

откуда

$$k \geqslant \frac{2n-4d+6}{6d-16}.$$

Далее действуем как в доказательстве теоремы 3. По построению $e(G_k) = v(G_k)+k$. В каждой компоненте связности графа $G-V(G_k)$ построим остовное дерево, которое присоединим одним ребром к $G_k$. Получим остовный подграф $H$ графа $G$ с $e(H) = v(H)+k = 2n+k$. Пусть нам известны цвета $n-k$ рёбер из $E(G)\setminus E(H)$. Аналогично теореме 3 мы сможем восстановить цвета всех рёбер, кроме рёбер графа $G_k$ (или установить, что правильная 3-раскраска с такими начальными данными невозможна). Цвета рёбер из $E(G_k)$ восстанавливаются по лемме 3. □

## §5. Оценка количества правильных раскрасок

Нам поможет следующая классическая лемма, доказанная еще Таттом [5].

**Лемма 6.** *Пусть $G$ – двусвязный граф с $v(G) \geqslant 4$. Тогда существуют две таких смежных вершины $a, b \in V(G)$, что граф $G-a-b$ связен.*

Вернемся к доказательству теоремы 5. Напомним, что в этой теореме (в отличие от всех предыдущих теорем и лемм) в графах разрешаются кратные рёбра. Цвета 3-раскраски будем обозначать 0, 1 и 2.

Для $a, b \in V(G)$ через $G+ab$ будем обозначать граф, полученный из $G$ добавлением *нового* ребра между вершинами $a$ и $b$ (этот шаг увеличивает на 1 количество рёбер, соединяющих $a$ и $b$).

**Доказательство теоремы 5.** 1) Индукция по количеству вершин. **База** для графа на двух вершинах очевидна: в таком графе должно быть три кратных ребра и есть 6 способов их правильной 3-раскраски.

Докажем **индукционный переход**. Пусть утверждение доказано для всех меньших графов. Рассмотрим два случая.

**a.** *Граф $G$ имеет кратные рёбра.*
Пусть пара вершин $a$ и $b$ соединена парой кратных рёбер $e_1$ и $e_2$. Тогда несложно понять, что $\mathrm{N}_G(a) = \{b, a'\}$ и $\mathrm{N}_G(b) = \{a, b'\}$. Обозначим соответствующие рёбра за $f_a = aa'$ и $f_b = bb'$. Пусть граф $G'$ получен из $G - a - b$ добавлением нового ребра $e'$ между $a'$ и $b'$ (см. рис. 4a). Очевидно, полученный граф – кубический и связный. По индукционному предположению, $\chi'_3(G') \leqslant 3 \cdot 2^{n-1}$

Докажем, что $\chi'_3(G) = 2 \cdot \chi'_3(G')$ – этого нам достаточно. Действительно, рассмотрим правильную 3-раскраску $\rho$ графа $G$, пусть, скажем, $\rho(e_1) = 1$ и $\rho(e_2) = 2$. Тогда $\rho(f_a) = \rho(f_b) = 0$. Построим правильную 3-раскраску $\rho'$ графа $G'$, положив $\rho'(r) = \rho(r)$ для всех $r \in E(G') \setminus \{e'\}$ и $\rho(e') = 0$. Поменяв местами цвета $e_1$ и $e_2$ в $\rho$, мы получим точно такую же 3-раскраску рёбер $G'$. И наоборот, имея правильную 3-раскраску $\rho'$ графа $G'$, положим $\rho(r) = \rho'(r)$ для всех $r \in E(G) \setminus \{e_1, e_2, f_a, f_b\}$. Пусть, скажем, $\rho'(e') = 0$. Тогда положим $\rho(f_a) = \rho(f_b) = 0$. Есть два варианта покрасить $e_1$ и $e_2$: либо $\rho(e_1) = 1$ и $\rho(e_2) = 2$, либо $\rho(e_1) = 2$ и $\rho(e_2) = 1$.

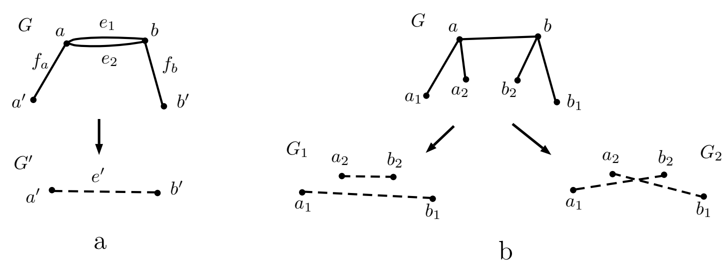



Рис. 4. Индукционный переход: преобразование графа $G$.

**b.** *Граф $G$ не имеет кратных рёбер.*
Тогда по лемме 6 существуют две смежные вершины $a, b \in V(G)$ такие, что граф $G' = G - a - b$ связен. Пусть $\mathrm{N}_G(a) = \{b, a_1, a_2\}$ и $\mathrm{N}_G(b) = \{a, b_1, b_2\}$ (возможно, $\{a_1, a_2\} \cap \{b_1, b_2\} \neq \varnothing$). Построим два

новых графа $G_1 = G' + a_1b_1 + a_2b_2$ и $G_2 = G' + a_1b_2 + a_2b_1$. (Преобразование изображено на рис. 4b. Добавляемые рёбра – новые. Если, скажем, $a_1 = b_1$, то добавляемое ребро $a_1b_1$ – петля). Тогда по индукционному предположению $\chi'_3(G_1) \leqslant 3 \cdot 2^{n-1}$ и $\chi'_3(G_2) \leqslant 3 \cdot 2^{n-1}$ (если в каком-то из этих графов есть петля, то правильных 3-раскрасок этого графа нет).

Существуют два типа правильных 3-раскрасок графа $G$: тип 1 (в котором $\rho(aa_1) = \rho(bb_1)$ и $\rho(aa_2) = \rho(bb_2)$) и тип 2 (в котором $\rho(aa_1) = \rho(bb_2)$ и $\rho(aa_2) = \rho(bb_1)$).

Докажем, что количество 3-раскрасок типа 1 графа $G$ не превосходит $\chi'_3(G_1)$. Рассмотрим правильную 3-раскраску $\rho$ рёбер $G$ типа 1. Пусть, скажем, $\rho(ab) = 0$, $\rho(aa_1) = 1$ и $\rho(aa_2) = 2$. Из правильности $\rho$ следует, что $a_1 \neq b_1$ и $a_2 \neq b_2$. Построим 3-раскраску $\rho_1$ графа $G_1$, положив $\rho_1(a_1b_1) = 1$, $\rho_1(a_2b_2) = 2$ и $\rho_1(r) = \rho(r)$ для всех $r \in E(G_1) \setminus \{a_1a_2, b_1b_2\}$. Очевидно, полученная 3-раскраска рёбер $G_1$ – правильная, причем разным правильным раскраскам $G$ соответствуют разные правильные раскраски $G_1$.

Аналогично, количество правильных 3-раскрасок типа 2 графа $G$ не превосходит $\chi'_3(G_2)$. Таким образом

$$\chi'_3(G) \leqslant \chi'_3(G_1) + \chi'_3(G_2) \leqslant 2 \cdot 3 \cdot 2^{n-1}, \tag{3}$$

что и требовалось доказать.

2) Как и в предыдущем пункте, будем считать, что для меньших кубических графов утверждение доказано. Доказывая оценку для графа $G$, мы будем использовать утверждение пункта 2 для меньших графов, а также доказанное выше утверждение пункта 1.

Посмотрим на доказательство пункта 1 внимательнее, а именно, на шаг с графом $G$, имеющим не более чем одну пару кратных рёбер.

Если граф $G$ имеет пару кратных рёбер, то мы имеем дело со случаем a, в котором доказано, что $\chi'_3(G) = 2\chi'_3(G')$. Граф $G'$ имеет на две вершины меньше и, очевидно, не более чем одну пару кратных рёбер (в ней обязательно должно участвовать новое ребро $e'$). Следовательно, утверждение для графа $G$ следует из индукционного предположения для графа $G'$.

Теперь рассмотрим случай, когда $G$ не имеет кратных рёбер. Тогда мы имеем дело со случаем b, где построено два меньших кубических графа $G_1$ и $G_2$ и доказано неравенство (3). Если оба графа $G_1$ и $G_2$

имеют не более чем по одной паре кратных рёбер, то утверждение следует из индукционного предположения.

Пусть, скажем, $G_1$ имеет две пары кратных рёбер. Эти пары кратных рёбер могут быть образованы только с участием новых добавленных рёбер $e_1 = a_1b_1$ и $e_2 = a_2b_2$ – значит, это пара кратных рёбер $e_1$ и $e_1'$ с концами $a_1$ и $a_2$ и пара кратных рёбер $e_2$ и $e_2'$ с концами $b_1$ и $b_2$.

В доказательстве пункта $b$ мы поставили в соответствие каждой правильной 3-раскраске $\rho$ графа $G$ с $\rho(aa_1) = \rho(bb_1)$ правильную 3-раскраску $\rho'$ графа $G_1$. Отметим, что по построению в раскраске $\rho'$ цвета двух новых рёбер различны: $\rho'(e_1) \neq \rho'(e_2)$. Несложно понять, что и, наоборот, каждой правильной 3-раскраске $\rho'$ графа $G'$ с $\rho'(e_1) \neq \rho'(e_2)$ соответствует ровно одна правильная 3-раскраска графа $G$ с $\rho(aa_1) = \rho(bb_1)$. А правильным 3-раскраскам $\rho'$ графа $G_1$ с $\rho'(e_1) = \rho'(e_2)$ не соответствует ни одной правильной 3-раскраски графа $G$.

Докажем, что у графа $G_1$ не менее чем $\frac{\chi_3'(G_1)}{4}$ правильных 3-раскрасок ребер с $\rho'(e_1) = \rho'(e_2)$. Зафиксируем в правильной 3-раскраске $\rho'$ графа $G_1$ цвета всех рёбер, кроме $e_1$, $e_1'$, $e_2$ и $e_2'$. Тогда для цветов $e_1$ и $e_1'$ остается ровно два варианта: $\{\rho'(e_1), \rho'(e_1')\} = \{\alpha_1, \beta_1\}$ и мы можем назначить их произвольно, то есть можно положить как $\rho'(e_1) = \alpha_1$, так и $\rho'(e_1) = \beta_1$. Точно так же, $\{\rho'(e_2), \rho'(e_2')\} = \{\alpha_2, \beta_2\}$ и можно положить как $\rho'(e_2) = \alpha_2$, так и $\rho'(e_2) = \beta_2$. Если $\{\alpha_1, \beta_1\} = \{\alpha_2, \beta_2\}$, то совпадение $\rho'(e_1) = \rho'(e_2)$ получается ровно в половине случаев. Пусть $\{\alpha_1, \beta_1\} \neq \{\alpha_2, \beta_2\}$ (скажем, $\{\alpha_1, \beta_1\} = \{0, 1\}$ и $\{\alpha_2, \beta_2\} = \{0, 2\}$) – тогда совпадение цветов получается только в одном случае из четырёх: при $\rho'(e_1) = \rho'(e_2) = 1$. В любом случае, получается требуемое неравенство.

По индукционному предположению $\chi_3'(G_1) \leqslant 3 \cdot 2^{n-1}$. По доказанному выше, не более чем $\frac{3}{4}$ из этих правильных 3-раскрасок соответствуют правильным 3-раскраскам графа $G$ с $\rho(aa_1) = \rho(bb_1)$. Если $G_2$ имеет не более одной пары кратных рёбер, то мы получаем $\chi_3'(G) \leqslant \frac{3}{4}\chi_3'(G_1) + \chi_3'(G_2) \leqslant 2 \cdot 9 \cdot 2^{n-3} = 9 \cdot 2^{n-2}$. Если $G_2$ имеет две пары кратных рёбер, для него верно аналогичное рассуждение и мы получаем $\chi_3'(G) \leqslant \frac{3}{4}(\chi_3'(G_1) + \chi_3'(G_2)) \leqslant 9 \cdot 2^{n-2}$. □

## Список литературы

1. Ю. В. Матиясевич, *Один критерий раскрашиваемости вершин, формулируемый в терминах ориентации ребер.* — Дискретный анализ, выпуск 26 (1974), 65–71.

2. N. Alon, *Combinatorial Nullstelensats.* — Combinatorics, Probability and Computing **8** (1999), 7–29.
3. G. Chartrand, A. Kaugars, D. R. Lick, *Critically $n$-connected graphs.* — Proc. Amer. Math. Soc. **32** (1972), i.1, 63–68.
4. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *О структуре $k$-связного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 76–106.
5. W. T. Tutte, *Connectivity in graphs.* Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.
6. Ф. Харари, *Теория графов.* Москва, "Мир", 1973. (Перевод с английского. F. Harary, *Graph theory,* 1969.)

Karpov D. V. On proper edge 3-colorings of a cubic graph.

We study *defining* edge sets of a cubic graph (i.e. edge sets which 3-coloring uniquely determines a proper edge 3-coloring of this cubic graph). We prove that a cubic graph with $3n$ edges has a defining set of $n$ edges. For a 3-connected plane cubic graph with $3n$ edges, each face of which has at most $d$ vertices, it is proved that there exists a defining set of at most $n - \frac{n-2d+3}{3d-8}$ edges. In both cases, we describe an algorithm constructing the desired defining set.

For a connected cubic graph $G$ with $3n$ edges, we construct a series of polynomials over $\mathbb{F}_3$ in $n+1$ variables such that each of them does not vanish identically if and only if there exists a proper edge 3-coloring of $G$.

In the end of this paper, it is proved that a cubic multigraph $G$ on $2n$ vertices has at most $3 \cdot 2^n$ proper edge 3-colorings. This bound is tight. In the case where $G$ has at most one pair of multiple edges, it is proved that $G$ has at most $9 \cdot 2^{n-2}$ proper edge 3-colorings.

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН
наб. р. Фонтанки 27; 191023,
С.-Петербург, Россия
С.-Петербургский государственный университет,
Университетская набережная 7-9,
199034, С.-Петербург, Россия
*E-mail*: dvk0@yandex.ru

Поступило 26 ноября 2019 г.