Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 488, 2019 г.

В. А. Буслов

СТРУКТУРА ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЛЕСОВ МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА: АЛГЕБРЫ ПОДМНОЖЕСТВ МНОЖЕСТВА ВЕРШИН

Настоящая статья является продолжением работы [1]. Определения и обозначения соответствуют, принятым в ней.

§1. Используемые обозначения и определения

Множество вершин орграфа G обозначаем $\mathcal{V}G$, множество его дуг – $\mathcal{A}G$.

Исходным объектом является взвешенный орграф V, множество вершин которого для удобства обозначаем отдельно – $\mathcal{N}$, $|\mathcal{N}| = N$; дугам $(i,j) \in \mathcal{A}V$ приписаны вещественные веса v_{ij}. Изучаются остовные подграфы (подграфы с множеством вершин $\mathcal{N}$) орграфа V, являющиеся заходящими лесами. Заходящий лес (в дальнейшем просто, лес) – орграф, в котором из каждой вершины исходит не более одной дуги и отсутствуют циклы. Связные компоненты леса – деревья. Единственная вершина дерева, из которой дуга не исходит, – корень. Дерево леса F с корнем в вершине i обозначаем T_i^F.

Поскольку в работе фигурируют только орграфы, то используем термин граф.

Для подграфа G графа V и множества $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{N}$ определяем веса

$$\Upsilon^G_{\mathcal{S}} = \sum_{\substack{i\in\mathcal{S} \\ (i,j)\in\mathcal{A}G}} v_{ij}\ , \quad \Upsilon^G = \Upsilon^G_{\mathcal{N}} = \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}G} v_{ij}\ . \tag{1}$$

$\mathcal{F}^k$ – множество остовных лесов, состоящих из k деревьев. Минимум веса k-компонентных лесов обозначаем

$$\phi^k = \min_{F\in\mathcal{F}^k} \Upsilon^F. \tag{2}$$

Если $\mathcal{F}^k = \varnothing$, полагаем $\phi^k = \infty$, в частности, $\phi^0 = \infty$.

$F \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$ означает что $F \in \mathcal{F}^k$ и $\Upsilon^F = \phi^k$. Такие леса условимся называть минимальными.

Ключевые слова: взвешенный орграф, минимальный лес, алгебры множеств.

$G|_{\mathcal{S}}$ – подграф графа G, индуцированный множеством $\mathcal{S}$, то есть $\mathcal{V}G|_{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$ и $\mathcal{A}G|_{\mathcal{S}}$ состоит из всех дуг графа G, оба конца которых принадлежат множеству $\mathcal{S}$. $G|_{\mathcal{S}}$ называют также сужением графа G на множество $\mathcal{S}$;

$\mathcal{F}^k|_{\mathcal{S}}$ – множество индуцированных множеством $\mathcal{S}$ подграфов k-компонентных лесов;

$\widetilde{\mathcal{F}}^k|_{\mathcal{S}}$ – множество индуцированных множеством $\mathcal{S}$ подграфов k-компонентных лесов минимального веса;

$G^F_{\uparrow\mathcal{S}}$ – граф, получающийся из G заменой дуг, исходящих из вершин множества $\mathcal{S}$, на дуги исходящие из этих же вершин в графе F;

Если существует дуга, исход которой принадлежит множеству $\mathcal{S}$, а заход не принадлежит, то говорим, что из множества $\mathcal{S}$ исходит дуга. Аналогично, если существует дуга, заход которой принадлежит $\mathcal{S}$, а исход не принадлежит, то говорим, что в $\mathcal{S}$ заходит дуга. Исходящая окрестность $\mathcal{N}^{out}_{\mathcal{S}}(G)$ множества $\mathcal{S}$ – множество заходов дуг, исходящих в графе G из множества $\mathcal{S}$; аналогично определяется входящая окрестность $\mathcal{N}^{in}_{\mathcal{S}}(G)$.

Лес $F \in \mathcal{F}^{k+1}$ с корнями (с точностью до нумерации) $1, 2, \cdots, k+1$, – *предок* леса $G \in \mathcal{F}^k$ с корнями $1, 2, \cdots, k$, и, соответственно, лес $G \in \mathcal{F}^k$ – *потомок* леса $F \in \mathcal{F}^{k+1}$, если $T^F_i = T^G_i$, $i = 1, 2, \cdots, k-1$, и $G|_{\mathcal{V}T^F_k} = T^F_k$, а граф $G|_{\mathcal{V}T^F_{k+1}}$ является деревом.

Лес $F \in \mathcal{F}^{k+1}$ – *пра-предок* леса $H \in \mathcal{F}^{k-1}$ и, соответственно, лес H – *пра-потомок* леса F, если существует лес $G \in \mathcal{F}^k$, такой, что он является потомком леса F и предком леса H.

§2. Результаты работы [1]

Поскольку в данной статье используются практически все результаты из [1], приведём их в виде списка свойств.

Перечислим сначала какие свойства множества $\mathcal{D} \in \mathcal{N}$ приводят к лесу при операции замены дуг между лесами ([1, лемма 1 и следствия из неё]).

Свойство 1. *Пусть F и G – леса, $\mathcal{V}F = \mathcal{V}G = \mathcal{N}$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{N}$. Тогда граф $F^G_{\uparrow\mathcal{D}}$ является лесом, если выполнен любой из следующих пунктов:*

(a) *в лесе F никакая последовательность дуг, стартующая из $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}_{\mathcal{D}}(G)$, не достигает $\mathcal{N}^{in}_{\mathcal{D}}(F)$;*

(b) *в лесе F дуги в $\mathcal{D}$ не заходят;*

(c) *в лесе G дуги из $\mathcal{D}$ не исходят.*

Свойство 2. *Пусть F и G – леса, $\mathcal{V}F = \mathcal{V}G = \mathcal{N}$, и пусть T^F и T^G – некоторые связные компоненты (деревья) лесов F и G соответственно, $\mathcal{D} \subset \mathcal{N}$. Тогда графы $F^G_{\uparrow\mathcal{D}}$ и $G^F_{\uparrow\mathcal{D}}$ являются лесами, если выполнен любой из следующих пунктов*:

(a) $\mathcal{D} = \mathcal{V}T^F$;
(b) $\mathcal{D} = \mathcal{V}T^F \cap \mathcal{V}T^G$;
(c) $\mathcal{D} = \mathcal{V}T^F \setminus \mathcal{V}T^G$;
(d) $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}T^F \cap \mathcal{V}T^G$, *причём* $\mathcal{N}^{in}_{\mathcal{D}}(F) = \varnothing$ *и* $\mathcal{N}^{out}_{\mathcal{D}}(F) \subset \mathcal{V}T^F \setminus \mathcal{V}T^G$;
(e) $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}T^F \setminus \mathcal{V}T^G$, *причём* $\mathcal{N}^{in}_{\mathcal{D}}(F) = \varnothing$ *и* $\mathcal{N}^{out}_{\mathcal{D}}(F) \subset \mathcal{V}T^G$.

Если же множество $\mathcal{D}$ таково, что при замене дуг между лесами получаются леса (в частности, минимальные), то выполнены ([1, леммы 2 и 3])

Свойство 3. *Пусть $F \in \mathcal{F}^m$ и $H \in \mathcal{F}^k$, и пусть $\mathcal{D}$ – подмножество множества вершин, содержащее на n корней леса F больше, чем корней леса H. Тогда*

(a) *если $F^H_{\uparrow\mathcal{D}}$ – лес, то $F^H_{\uparrow\mathcal{D}} \in \mathcal{F}^{m-n}$;*
(b) *если $H^F_{\uparrow\mathcal{D}}$ – лес, то $H^F_{\uparrow\mathcal{D}} \in \mathcal{F}^{k+n}$.*

Свойство 4. *Пусть $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$ и $H \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$, и пусть $\mathcal{D}$ – подмножество множества вершин такое, что $F^H_{\uparrow\mathcal{D}} \in \mathcal{F}^k$ и $H^F_{\uparrow\mathcal{D}} \in \mathcal{F}^{k+1}$. Тогда $F^H_{\uparrow\mathcal{D}} \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$ и $H^F_{\uparrow\mathcal{D}} \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$.*

Веса ϕ_k минимальных лесов удовлетворяют следующей системе неравенств выпуклости ([1, теорема 1]).

Свойство 5. *Пусть множество $\mathcal{F}^k$ непусто при некотором $k \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$. Тогда*

$$\phi^{k-1} - \phi^k \geqslant \phi^k - \phi^{k+1}. \tag{3}$$

Основной результат ([1, теорема 2]) – важное свойство минимальных лесов, а именно наличие минимальных потомков и предков.

Свойство 6. *Пусть $\mathcal{F}^k \neq \varnothing$ при некотором $k \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$, тогда*

(a) *любой лес из множества $\widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$ имеет потомка в множестве $\widetilde{\mathcal{F}}^k$;*
(b) *любой лес из множества $\widetilde{\mathcal{F}}^k$ имеет предка в множестве $\widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$.*

§3. Алгебры подмножеств

3.1. Общие сведения. Пусть $\mathcal{N}$ – конечное множество. Непустое семейство [1] подмножеств множества $\mathcal{N}$ называется алгеброй $\mathfrak{A}$ подмножеств множества $\mathcal{N}$, если оно содержит $\varnothing$ и $\mathcal{N}$ и выполнены условия:

1) для любого множества $\mathcal{A}$ из $\mathfrak{A}$ его дополнение $\overline{\mathcal{A}}$ является элементом семейства $\mathfrak{A}$;

2) для любых множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ из $\mathfrak{A}$ их пересечение является элементом семейства $\mathfrak{A}$.

Таким образом, алгебра подмножеств замкнута относительно операций дополнения и пересечения. Поскольку через операции дополнения и пересечения могут быть выражены операции объединения, разности, симметрической разности, то алгебра $\mathfrak{A}$ является замкнутой и относительно них. В частности, в пункте 2) настоящего определения операция пересечения может быть заменена на операцию объединения. Иногда в определении указывают сразу обе операции объединения и пересечения.

Пусть $\mathfrak{B}$ – некоторое семейство подмножеств множества $\mathcal{N}$. Семейство, состоящее из всевозможных дополнений и пересечений этих подмножеств, называется алгеброй, *порождённой* семейством $\mathfrak{B}$. Это минимальная алгебра, содержащая все множества из $\mathfrak{B}$.

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ – алгебры подмножеств множества $\mathcal{N}$ и для любого множества $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ выполнено $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}'$. Тогда алгебра $\mathfrak{A}$ называется подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}'$. В частности, самая бедная алгебра – семейство, состоящее из двух элементов $\varnothing$ и $\mathcal{N}$. Эта алгебра является подалгеброй любой алгебры подмножеств множества $\mathcal{N}$. Самая богатая алгебра – множество всех подмножеств множества $\mathcal{N}$. Эту алгебру принято обозначать $2^{\mathcal{N}}$ (булеан). Любая алгебра подмножеств множества $\mathcal{N}$ является подаглеброй булеана $2^{\mathcal{N}}$. Справедлива следующая простая

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ – два семейства подмножеств множества $\mathcal{N}$, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ – порождаемые этими семействами алгебры соответственно, и любое множество $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ может быть получено применением теоретико-множественных операций дополнения и пересечения (объединения) к множествам из $\mathfrak{B}'$. Тогда $\mathfrak{A}$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}'$.*

---

[1]Множество, элементами которого являются подмножества множества $\mathcal{N}$. Чтобы избежать выражений типа "множество множеств" , используем термин "семейство" в качестве синонима термину "множество".

Доказательство. Действительно, любое множество $\mathcal{A}$ из алгебры $\mathfrak{A}$ по определению порождённой алгебры есть некоторая комбинация дополнений и пересечений множеств из $\mathfrak{B}$, каждое из которых по условию настоящего утверждения есть некоторая комбинация дополнений и пересечений множеств из $\mathfrak{B}'$. Тем самым, если $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$, то $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}'$. $\square$

Непустое множество $\mathcal{A}$ алгебры $\mathfrak{A}$ называется атомом, если для любого элемента $\mathcal{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$ справедливо либо $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$, либо $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{A}$. Любая алгебра подмножеств конечного множества является алгеброй, порожденной семейством своих атомов.

3.2. Алгебра подмножеств, порождённая множеством лесов. Пусть $\mathcal{F}$ – некоторое множество лесов с одним и тем же множеством вершин $\mathcal{N}$. Рассмотрим семейство $\mathfrak{B}_{\mathcal{F}}$, состоящее из множеств $\mathcal{V}T^F$ вершин деревьев T^F лесов $F \in \mathcal{F}$. Это семейство порождает некоторую алгебру $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ подмножеств множества всех вершин $\mathcal{N}$. Поскольку семейство $\mathfrak{B}_{\mathcal{F}}$ полностью определяется множеством $\mathcal{F}$, то будем говорить, что алгебра $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ порождена множеством лесов $\mathcal{F}$. Пусть $\aleph_{\mathcal{F}}$ – семейство атомов этой алгебры. Заметим, что порождающее семейство не является произвольным, поскольку каждый лес включает в себя все вершины множества $\mathcal{N}$ и множества вершин деревьев любого леса между собой не пересекаются. Если семейство атомов $\aleph_{\mathcal{F}}$ задано, то множество лесов $\mathcal{F}$, должно обладать рядом свойств.

Лемма 2. *Для любых двух атомов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ найдётся лес $F \in \mathcal{F}$, в котором они находятся в разных деревьях.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть нет леса, в котором $\mathcal{A}_i$ находятся в разных деревьях. Тогда в любом лесе эти атомы содержатся в одном дереве. То есть, любой элемент порождающего семейства (множество вершин дерева некоторого леса) содержит либо сразу два этих атома, либо ни одного. Применение операций пересечения и дополнения этого не меняют. Но тогда и в алгебре $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ любой её элемент либо содержит оба множества $\mathcal{A}_i$, либо ни одного. Тем самым, по определению атома оба множества $\mathcal{A}_i$ принадлежат одному атому, а сами атомами не являются, или совпадают. $\square$

Назовем вершину j *меченой вершиной*, если хотя бы в одном лесе $F \in \mathcal{F}$ она является корнем (т.е. существует связная компонента T_j^F). Разделим семейство $\aleph_{\mathcal{F}}$ на два непересекающихся семейства: семейство меченых атомов $\aleph_{\mathcal{F}}^{\bullet}$, элементы которого содержат меченые вершины, и семейство немеченых атомов $\aleph^{\circ}_{\mathcal{F}}$, элементы которого меченых вершин не содержат.

Введём также уточняющие структуры. Назовём *областью притяжения* меченой вершины i множество всех вершин j, которые принадлежат хотя бы в одном лесе $F \in \mathcal{F}$ дереву T_i^F с корнем в i. Поскольку атомы алгебры неделимы, то также областью притяжения меченого атома $\mathcal{M}$ алгебры $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ будем называть множество всех атомов, которые хотя бы в одном лесе $F \in \mathcal{F}$ принадлежат дереву с корнем в множестве $\mathcal{M}$.

Утверждение 1. *Любой немеченый атом принадлежит области притяжения по крайней мере двух меченых.*

Доказательство. Немеченый атом $\mathcal{U}$ в любом лесе $F \in \mathcal{F}$ принадлежит дереву с корнем с некотором меченом атоме $\mathcal{M}$. Предположим, что такой меченый атом единственный. Но в любом лесе атом $\mathcal{U}$ в каком-то дереве содержится. Тогда в любом лесе дерево, содержащее $\mathcal{U}$, содержит и $\mathcal{M}$. Тем самым не существует леса, в котором бы атомы $\mathcal{U}$ и $\mathcal{M}$ находились бы в разных деревьях. Это противоречит лемме 2. То есть должен существовать по крайней мере еще один меченый атом, области притяжения которого принадлежит $\mathcal{U}$. $\square$

Для немеченых атомов также можно рассматривать области притяжения. Именно, если для вершины i, принадлежащей немеченому атому $\mathcal{E}$, в каком-либо лесе $F \in \mathcal{F}$ существует путь из вершины j, принадлежащей немеченому атому $\mathcal{U}$, то $\mathcal{U}$ принадлежит области притяжения $\mathcal{E}$.

3.3. Алгебры подмножеств, порождённые минимальными лесами. Будем считать, что исходный граф V достаточно плотный, в том смысле, что существует хотя бы одно остовное дерево, то есть множество $\mathcal{F}^1$ остовных лесов, состоящих из одного дерева, непусто. Тогда непусты и множества $\mathcal{F}^k$, $k \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Введём укороченные обозначения: $\mathfrak{B}_k = \mathfrak{B}_{\widetilde{\mathcal{F}}^k}$, $\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}_{\widetilde{\mathcal{F}}^k}$, $\aleph_k = \aleph_{\widetilde{\mathcal{F}}^k}$, $\aleph^{\circ}_k = \aleph^{\circ}_{\widetilde{\mathcal{F}}^k}$, $\aleph^{\bullet}_k = \aleph^{\bullet}_{\widetilde{\mathcal{F}}^k}$. Назовем также вершину j *меченой вершиной уровня* k, если хотя бы в одном лесе $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$ она является корнем. Множество всех атомов алгебры $\mathfrak{A}_k$, которые хотя бы в одном лесе $F \in \widetilde{\mathcal{F}}$ принадлежат дереву с корнем в атоме $\mathcal{M} \in \aleph^{\bullet}_k$, назовём его k*-областью притяжения*. Аналогично определяется k-область притяжения меченой вершины.

Теорема 1. *Последовательность алгебр $\mathfrak{A}_k$ является возрастающей*

$$\{\mathcal{N}, \varnothing\} = \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{A}_{N-1} \subseteq \mathfrak{A}_N \ = 2^{\mathcal{N}},$$

где $2^{\mathcal{N}}$ – семейство всех подмножеств множества $\mathcal{N}$.

Доказательство. Действительно, по свойству 6 всякий лес из $\widetilde{\mathcal{F}}^m$, $1 \leqslant m < N$ имеет предка в $\widetilde{\mathcal{F}}^{m+1}$. Таким образом, для любого леса $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^m$ и для любого его дерева T^F, любо найдётся найдётся лес $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^{m+1}$ и такое его дерево T^G, что $\mathcal{V}T^F = \mathcal{V}T^G$, либо найдётся лес $H \in \widetilde{\mathcal{F}}^{m+1}$ и такие два его дерева T_1^H и T_2^H, что $\mathcal{V}T^F = \mathcal{V}T_1^H \cup \mathcal{V}T_2^H$. Таким образом, по лемме 1 алгебра $\mathfrak{A}_m$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}_{m+1}$. □

То, сколько существует различных алгебр среди $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_N$, каковы их свойства, зависит от того, сколько раз в системе неравенств выпуклости (3) [1–3] при разных k встречается знак равенства и знак строгого неравенства.

§4. О методе построения минимальных лесов

Общий метод и построения, и исследования минимальных лесов остаётся таким же, как в [1]. Именно, берутся два минимальных леса и некоторое подмножество $\mathcal{D}$ множества всех вершин $\mathcal{N}$. Затем дуги, исходящие в одном лесе из вершин множества $\mathcal{D}$, заменяются на дуги, исходящие из этих же вершин во втором лесе и наоборот. Множество $\mathcal{D}$ подбирается таким, чтобы оба исходных леса после указанной замены дуг по-прежнему оставались лесами.

Докажем сначала простую лемму о сужении леса на подмножество множества вершин.

Лемма 3. *Пусть из множества $\mathcal{D}$ исходит n дуг в лесе F, и m корней леса F принадлежат множеству $\mathcal{D}$. Тогда индуцированный подграф $F|_{\mathcal{D}}$ – лес, состоящий из $m + n$ деревьев. В частности, если $n + m = 1$, то $F|_{\mathcal{D}}$ – дерево.*

Доказательство. Поскольку по определению леса из каждой его вершины исходит не более одной дуги и в графе нет циклов, то любой его подграф является лесом, в том числе и индуцированный произвольным подмножеством множества вершин. Сосчитаем корни леса $F|_{\mathcal{D}}$. Вершины множества $\mathcal{D}$, из которых исходят дуги, заходы которых в F

не принадлежат $\mathcal{D}$, становятся в $F|_{\mathcal{D}}$ корнями. Этих вершин по условию n. И в самом $\mathcal{D}$ было исходно m корней леса F. □

Докажем предложение, являющееся усилением свойства 4.

Предложение 1. *Пусть $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^n$, $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^m$ и пусть для определённости $m \leqslant n$. Пусть также множество $\mathcal{D}$ таково, что графы $P = F^G_{\uparrow\mathcal{D}}$ и $Q = G^F_{\uparrow\mathcal{D}}$ – леса, тогда*

1) *если $\mathcal{D}$ содержит одинаковое число корней лесов F и G, то $P \in \widetilde{\mathcal{F}}^n$ и $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}^m$;*

2) *если $\mathcal{D}$ содержит ровно на $l = n - m$ корней леса F больше, чем корней леса G, то $P \in \widetilde{\mathcal{F}}^m$ и $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}^n$.*

Доказательство. Докажем первый пункт. Поскольку $\mathcal{D}$ содержит одинаковое число корней лесов F и G, то по свойству 3 $P \in \mathcal{F}^n$ и $Q \in \mathcal{F}^m$. Обозначим $\Delta = \Upsilon^G_{\mathcal{D}} - \Upsilon^F_{\mathcal{D}}$. Имеем

$$\phi^n \leqslant \Upsilon^P = \Upsilon^F + \Delta = \phi^n + \Delta \ , \quad \phi^m \leqslant \Upsilon^Q = \Upsilon^G - \Delta = \phi^m - \Delta \ .$$

Одновременно оба неравенства выполнены лишь при $\Delta = 0$, откуда следует, что $P \in \widetilde{\mathcal{F}}^n$ и $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}^m$.

Докажем второй пункт. Поскольку $\mathcal{D}$ содержит на $l = n - m$ корней леса F больше, чем корней леса G, то по свойству 3 $P \in \mathcal{F}^m$ и $Q \in \mathcal{F}^n$. Понимая под Δ ту же величину, что и в первом пункте, получаем

$$\phi^m \leqslant \Upsilon^P = \Upsilon^F + \Delta = \phi^n + \Delta \ , \quad \phi^n \leqslant \Upsilon^Q = \Upsilon^G - \Delta = \phi^m - \Delta \ .$$

Из этих неравенств следует, что $\Delta = \phi^m - \phi^n$, и, следовательно, $P \in \widetilde{\mathcal{F}}^m$ и $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}^n$. □

Заметим, что множество $\mathcal{D}$ с указанными в предложении свойствами, вообще говоря, может и не существовать.

§5. Случай равенства в системе неравенств выпуклости

Рассмотрим какими свойствами обладают минимальные леса в случае, когда при некотором k в системе неравенств выпуклости (3) имеет место равенство:

$$\phi^{k-1} - \phi^k = \phi^k - \phi^{k+1} \ . \qquad (4)$$

Предложение 2. *Пусть F и G принадлежат множеству $\widetilde{\mathcal{F}}^k$ и существует такое множество $\mathcal{D}$, которое содержит на один корень леса F больше, чем леса G, и при этом графы $P = F^G_{\uparrow\mathcal{D}}$ и $Q = G^F_{\uparrow\mathcal{D}}$ – леса. Тогда $P \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k-1}$, $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$ и выполнено* (4).

Доказательство. Из условия настоящего предложения и свойства 3 следует, что $P \in \mathcal{F}^{k-1}$, $Q \in \mathcal{F}^{k+1}$. Обозначим $\Delta = \Upsilon^G_{\mathcal{D}} - \Upsilon^F_{\mathcal{D}}$. Имеем:

$$\phi^{k-1} \leqslant \Upsilon^P = \Upsilon^F + \Delta = \phi^k + \Delta\ , \quad \phi^{k+1} \leqslant \Upsilon^Q = \Upsilon^G - \Delta = \phi^k - \Delta.$$

Из этих неравенств следует, что $\phi^{k-1} - \phi^k \leqslant \Delta \leqslant \phi^k - \phi^{k+1}$, что с учётом самих неравенств выпуклости (3) даёт (4). Тем самым, $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$ и $P \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k-1}$. □

Заметим, что если множество $\mathcal{D}$ с указанными в последнем предложении свойствами существует, то это автоматически влечёт при соответствующем k равенство в системе неравенств выпуклости. В общей ситуации такого множества, вообще говоря, нет.

Следующее предложение в некотором смысле является обратным к предыдущему.

Предложение 3. *Пусть $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$, $H \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k-1}$. Выберём множество $\mathcal{D}$ так, чтобы графы $P = F^H_{\uparrow\mathcal{D}}$ и $Q = H^F_{\uparrow\mathcal{D}}$ принадлежали множеству $\mathcal{F}^k$. Тогда равенство* (4) *выполнено тогда и только тогда, когда оба леса P и Q принадлежат множеству $\widetilde{\mathcal{F}}^k$.*

Доказательство. Убедимся, что множество $\mathcal{D}$, указанное в формулировке предложения, заведомо существует. Повторим рассуждения ([1, теорема 1]), приводящие к самой системе неравенств выпуклости (3).

Поскольку в лесе F на два корня больше, чем в H, то найдется хотя бы одно дерево T^F леса F, из всех вершин которого в лесе H исходят дуги. Введем графы $P = F^H_{\uparrow\mathcal{D}}$ и $Q = H^F_{\uparrow\mathcal{D}}$, где $\mathcal{D} = \mathcal{V}T^F$. В силу свойства 2(a) оба графа P и Q являются лесами. Поскольку $\mathcal{D}$ содержит ровно один корень леса F и ни одного корня леса H, то по свойству 3 оба леса P и Q принадлежат множеству $\mathcal{F}^k$. Вводя обозначение $\Delta = \Upsilon^H_{\mathcal{D}} - \Upsilon^F_{\mathcal{D}}$, получаем

$$\phi^k \leqslant \Upsilon^P = \Upsilon^F + \Delta = \phi^{k+1} + \Delta\ , \quad \phi^k \leqslant \Upsilon^Q = \Upsilon^H - \Delta = \phi^{k-1} - \Delta. \quad (5)$$

Отсюда следуют неравенства выпуклости в виде

$$\phi^{k-1} - \phi^k \geqslant \Delta \geqslant \phi^k - \phi^{k+1}.$$

При выполнении (4) это означает, что $\Delta = \phi^{k-1} - \phi^k = \phi^k - \phi^{k+1}$. Подставляя Δ в (5), получаем что $\Upsilon^P = \Upsilon^Q = \phi^k$.

Обратно, если $\Upsilon^P = \phi^k$, то из первого выражения в (5) следует, что $\Delta = \phi^k - \phi^{k+1}$. Аналогично, если $\Upsilon^Q = \phi^k$, то из второго выражения в (5) следует, что $\Delta = \phi^{k-1} - \phi^k$. □

Чтобы сформулировать следующую теорему, для всякого $H \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k-1}$ выделим в семействе $\mathfrak{B}_{k+1}$ подсемейство, состоящее из множеств вершин деревьев минимальных пра-предков H, и обозначим его $\mathfrak{B}^H_{k+1}$.

Теорема 2. *Пусть выполнено* (4), *тогда*

(a) $\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}_{k+1}$*;*

(b) *Для любого* $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$ *и для любого его дерева* T^F*, найдётся такой* $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$*, что* $G|_{\mathcal{V}T^F} = T^F$*;*

(c) *Для любого* $H \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k-1}$ *и для любого* $\mathcal{S} \in \mathfrak{B}^H_{k+1}$ *найдётся такой лес* $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$*, что* $H|_{\mathcal{S}} = G|_{\mathcal{S}}$.

Доказательство. Поскольку по теореме 1 выполнено $\mathfrak{A}_k \subseteq \mathfrak{A}_{k+1}$, то чтобы доказать равенство $\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}_{k+1}$, необходимо убедиться в обратном включении $\mathfrak{A}_k \supseteq \mathfrak{A}_{k+1}$. По лемме 1 для этого достаточно проверить, что множество вершин любого дерева T^F произвольного леса $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$ может быть получено пересечением связных компонент некоторых лесов из $\widetilde{\mathcal{F}}^k$.

В соответствии со свойством 6 всякий лес $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$ имеет хотя бы одного потомка $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$, который, в свою очередь, имеет хотя бы одного потомка $H \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k-1}$. Пусть F,G и H указанные родственные леса. Существует несколько сценариев получения пра-потомка H леса F. В одном из них в построении участвуют 4 дерева леса F, в остальных – 3. Однако, независимо от сценария существует единственный корень леса F, который не является корнем леса G. Пусть для определённости этим корнем является вершина j. Введём графы $Q = F^H_{\uparrow\mathcal{D}}$ и $R = H^F_{\uparrow\mathcal{D}}$, где $\mathcal{D} = \mathcal{V}T^F_j$. По свойству 2(a) графы Q и R являются лесами. Множество $\mathcal{D}$ не содержит корней леса H, поскольку не содержит корней его предка – леса G. При этом оно содержит ровно один корень леса F. Тогда по свойству 3 леса Q и R содержат по k корней, а по предложению 3 оба они – минимальные и принадлежат множеству $\widetilde{\mathcal{F}}^k$.

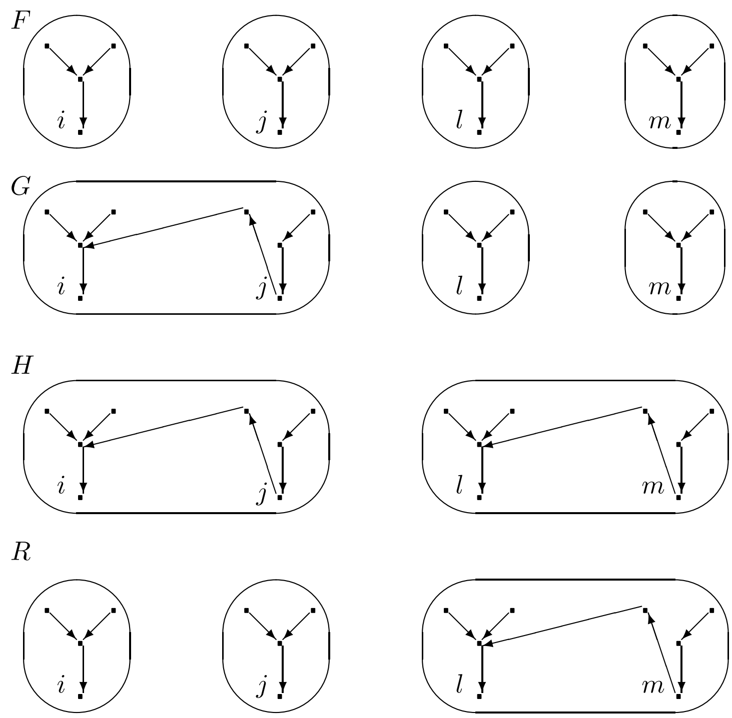

Рис. 1. Сценарий из 4-х деревьев. $R = H^F_{\uparrow\mathcal{D}}$, где $\mathcal{D} = \mathcal{V}T^F_j$.

Рассмотрим сначала самый простой сценарий, в котором задействованы 4 дерева леса F (см. рис. 1). В данном случае по построению лес Q совпадает с G. В этом сценарии любое дерево и леса F, и леса H, является деревом либо леса G, либо леса R, поэтому заведомо удовлетворены все пункты настоящей теоремы.

Перейдём теперь к сценариям, в которых в построении пра-потомка H участвуют три дерева леса F. Пусть для определённости корнями соответствующих деревьев леса F являются вершины i, j, l; вершины i, l – корни леса G и вершина l – корень леса H. Из свойства 6 следует, что если вершина (пусть это будет вершина l) является корнем обоих лесов F и G, то либо T^F_l – поддерево дерева T^G_l, не совпадающее с

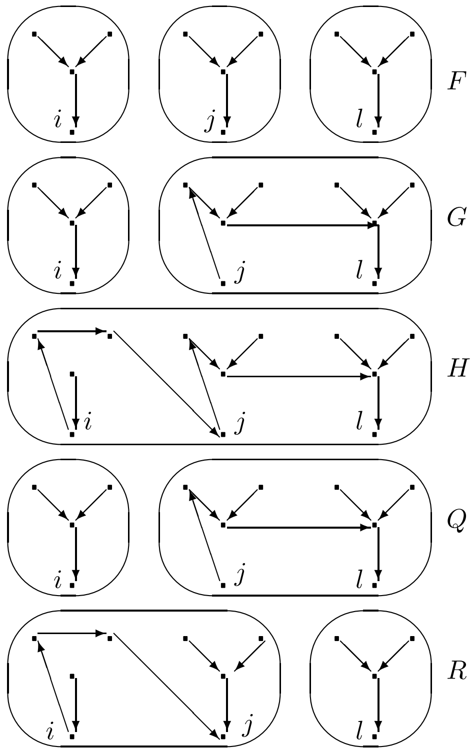

Рис. 2. $T_l^F \subsetneq T_l^G$, $Q = F^H_{\uparrow\mathcal{D}}$, $R = H^F_{\uparrow\mathcal{D}}$, где $\mathcal{D} = \mathcal{V}T_j^F$.

ним, либо $T_l^F = T_l^G$. Соответственно, и возможных сценариев два. В первом из них $T_l^F \subsetneq T_l^G$, во втором $T_l^F = T_l^G$. Рассмотрим первый из указанных вариантов (см. рис. 2).

Также как и в сценарии с 4-мя деревьями граф Q оказывается совпадающим с G. Имеем: $T_i^F = T_i^G$, $T_l^F = T_l^R$ и $\mathcal{V}T_j^F = \mathcal{V}T_l^G \cap \mathcal{V}T_j^R$, что по лемме 1 соответствует пункту (а) настоящей теоремы. При этом, если $\mathcal{S}$ – множество вершин любого дерева леса F, то индуцированный этим множеством подргаф $F|_{\mathcal{S}}$ (дерево леса F) совпадает либо с $G|_{\mathcal{S}}$, либо с $R|_{\mathcal{S}}$. Действительно, $T_i^F = T_i^G$ по условию, $T_l^F = T_l^R$ по построению, и также по построению $T_j^F = R|_{\mathcal{V}T_j^F}$, что подтверждает пункт (b) настоящей теоремы.

Далее, по построению $H|_{\mathcal{V}T_i^F} = R|_{\mathcal{V}T_i^F}$ и $H|_{\mathcal{V}T_l^F} = R|_{\mathcal{V}T_l^F}$, поскольку перестроением были охвачены лишь дуги, исходящие из вершин дерева T_j^F. По условию $H|_{\mathcal{V}T_l^G} = T_l^G = G|_{\mathcal{V}T_l^G}$. Но тогда графы H и G, суженные на произвольное подмножество множества $\mathcal{V}T_l^G$, совпадают. В частности, $H|_{\mathcal{V}T_j^F} = G|_{\mathcal{V}T_j^F}$. Таким образом, подтверждается пункт (c) настоящей теоремы.

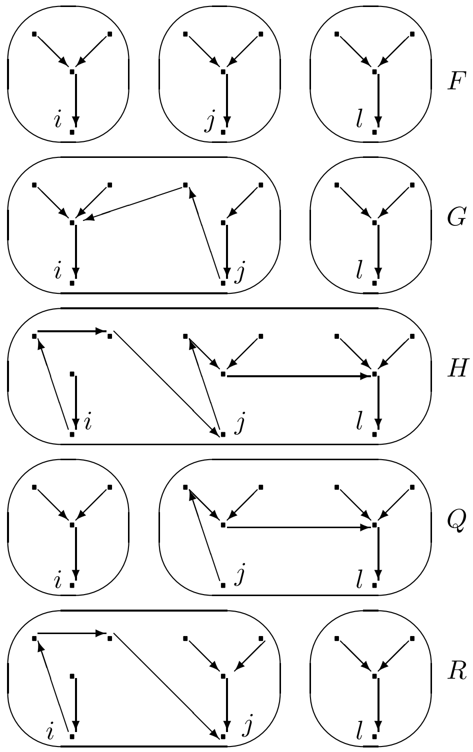

Рис. 3. $T_l^F = T_l^G$; $Q = F^H_{\uparrow\mathcal{D}}$, $R = H^F_{\uparrow\mathcal{D}}$ где $\mathcal{D} = \mathcal{V}T_j^F$.

Перейдём теперь к последнему варианту, а именно когда $T_l^F = T_l^G$ (см. рис. 3). По построению $T_i^F = T_i^Q$. При этом $\mathcal{V}T_j^F = \mathcal{V}T_i^G \cap \mathcal{V}T_l^Q$, поэтому по лемме 1 подтверждается включение $\mathfrak{A}_k \supseteq \mathfrak{A}_{k+1}$. Поскольку к тому же по построению $R|_{\mathcal{V}T_j^F} = T_j^F$, то подтверждается и пункт (b) настоящей теоремы.

Чтобы убедиться в справедливости пункта (3), достаточно заметить, что $Q|_{\mathcal{V}T_j^F} = H|_{\mathcal{V}T_j^F}$, $R|_{\mathcal{V}T_i^F} = H|_{\mathcal{V}T_i^F}$, а исходно $G|_{\mathcal{V}T_l^F} = H|_{\mathcal{V}T_l^F}$. □

Следствие 1. *Пусть выполнено (4), тогда*

$$\widetilde{\mathcal{F}}^{k-1}|_{\mathcal{E}} \subseteq \widetilde{\mathcal{F}}^{k}|_{\mathcal{E}} \supseteq \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}|_{\mathcal{E}}, \quad \mathcal{E} \in \aleph_k. \tag{6}$$

Доказательство. Действительно, пусть $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$ и $\mathcal{E} \in \aleph_k$. Семейства $\aleph_k$ и $\aleph_{k+1}$ совпадают, поскольку совпадают соответствующие алгебры. Поэтому $\mathcal{E} \in \aleph_{k+1}$, а значит в лесе F атом $\mathcal{E}$ содержится в некотором его дереве T^F. По пункту (b) предыдущей теоремы найдётся такой лес $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$, что $G|_{\mathcal{V}T^F} = T^F$. Если два графа совпадают при сужении на некоторое множество вершин, то они совпадают и при сужении на любое его подмножество. Тем самым $F|_{\mathcal{E}} = G|_{\mathcal{E}}$. Поэтому $\widetilde{\mathcal{F}}^k|_{\mathcal{E}} \supseteq \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}|_{\mathcal{E}}$.

Аналогично, пусть $H \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k-1}$ и $\mathcal{E} \in \aleph_k = \aleph_{k+1}$. Тогда в семействе $\mathfrak{V}_{k+1}^H$ множеств вершин деревьев пра-предков леса H найдётся хотя бы одно множество $\mathcal{S}$, содержащее $\mathcal{E}$. По пункту (c) предыдущей теоремы существует $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$, такой что $G|_{\mathcal{S}} = H|_{\mathcal{S}}$, а значит и $G|_{\mathcal{E}} = H|_{\mathcal{E}}$. □

Отметим, что включения в (6) не могут быть усилены до совпадения соответствующих множеств. Действительно (см. рис. 3), индуцированный подграф $G|_{\mathcal{V}T_j^F}$ хоть и является деревом, но не является деревом леса F. Аналогично, $G|_{\mathcal{V}T_i^F}$ не является подграфом леса H.

Теорема 3. *Пусть выполнено* (4), *тогда* $\aleph_k^\bullet = \aleph_{k+1}^\bullet$.

Доказательство. Поскольку сами алгебры $\mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{A}_{k+1}$ при выполнении (4) совпадают, то у них совпадают и семейства атомов: $\aleph_k = \aleph_{k+1}$. Поэтому требуется убедиться, что меченые вершины уровня k и меченые вершины уровня $k+1$ одни и те же. По свойству 6, если вершина j – корень леса $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$, то для любого $n > k$ существует лес $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^n$, в котором эта вершина является корнем. Поэтому справедливо включение $\aleph_k^\bullet \subseteq \aleph_{k+1}^\bullet$. Докажем обратное включение. Пусть j – корень леса $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$, и он не является корнем леса $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$ – потомка леса F.

Пусть $H \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k-1}$ – потомок леса G (см. любой из рис. 1 - 3). Также как и при доказательстве теоремы 2 введём граф $R = H^F_{\mathcal{D}}$, где $\mathcal{D} = \mathcal{V}T^F_j$ и убеждаемся, что $R \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$. В нём вершина j является корнем. □

Таким образом, при выполнении (4) совпадают не только сами алгебры $\mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{A}_{k+1}$, но и меченые множества в них также совпадают между собой. Тем самым и для немеченых выполнено $\aleph^\circ_k = \aleph^\circ_{k+1}$.

Разумеется, для k-областей притяжения меченых вершин (или атомов) не могут быть выполнены свойства равенства аналогичные утверждению последней теоремы, как видно из рис. 2–3.

§6. Случай строгого неравенства в системе неравенств выпуклости

6.1. Атомы и веса элементов алгебры. Рассмотрим какими свойствами обладают минимальные леса в случае, когда в системе неравенств выпуклости при некотором k стоит строгое неравенство

$$\phi^{k-1} - \phi^k > \phi^k - \phi^{k+1} \quad . \tag{7}$$

Утверждение 2. *Пусть выполнено* (7) *и i и j – меченые вершины уровня k. Пусть также вершина j принадлежит k-области притяжения вершины i, тогда вершина i принадлежит k-области притяжения вершины j, а вершины j и i принадлежат одному и тому же меченому атому алгебры $\mathfrak{A}_k$. При этом в любом лесе из $\widetilde{\mathcal{F}}^k$ только из одной меченой вершины каждого меченого атома не исходит дуга.*

Доказательство. По условию существует такой лес $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$, в котором $j \in \mathcal{V}T^F_i$. Предположим, что существует такой лес $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$, в котором вершина j является корнем, а вершина i не принадлежит дереву с корнем в этой вершине. Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{V}T^F_i \cap \mathcal{V}T^G_j$. Рассмотрим графы $F^G_{\uparrow\mathcal{D}}$ и $G^F_{\uparrow\mathcal{D}}$. В лесе F из всех вершин множества $\mathcal{D}$ исходят дуги, а в лесе G из этих вершин исходит на одну дугу меньше, поскольку в нём вершина j – корень. По свойству 2(b) оба графа $F^G_{\uparrow\mathcal{D}}$ и $G^F_{\uparrow\mathcal{D}}$ являются лесами. Тогда по предложению 2 выполнено (4), что противоречит (7). Таким образом в любом лесе $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$, в котором вершина j является корнем, вершина i принадлежит множеству вершин дерева T^G_j. Отсюда следует, что не существует такого леса из множества $\widetilde{\mathcal{F}}^k$, в котором бы вершины i и j принадлежали различным деревьям. Таким образом, вершины i и j принадлежат одном меченому атому. При этом, если $\mathcal{M}$

– меченый атом, то в нём есть меченая вершина (пусть этой вершиной будет l). Значит существует лес, в котором l является корнем. Но тогда все другие меченые вершины этого атома принадлежат в этом лесе дереву с корнем в l. $\square$

Утверждение 3. *Пусть выполнено* (7), *тогда из вершин любого множества* $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}_k$ *во всех лесах из* $\widetilde{\mathcal{F}}^k$ *исходит одинаковое количество дуг.*

Доказательство. Для доказательства достаточно убедиться, что из вершин любого атома алгебры $\mathfrak{A}_k$ исходит в любом лесе одинаковое число дуг. Из всех немеченых вершин исходят дуги, поэтому и для любого немеченого атома из всех его вершин исходят дуги. Согласно предложению 2, если атом меченый, то в любом лесе $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$ только из одной его меченой вершины не исходит дуга. $\square$

Заметим, что доказанное утверждение в частности означает, что при выполнении (7), любой меченый атом содержит ровно один корень любого леса $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$ и справедлива

Теорема 4. *Пусть выполнено* (7), *тогда* $|\aleph_k^\bullet| = k$.

Доказательство. Всякий лес $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$ состоит из k деревьев и, следовательно, $|\aleph_k^\bullet| \geqslant k$. Любой корень j произвольного леса $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$ принадлежит одному из деревьев леса F с корнем в некоторой вершине i (вершины j и i, в частности, могут совпадать), а значит по утверждению 2 вершина j принадлежит тому же меченому множеству, которому принадлежит i. Таким образом, $|\aleph_k^\bullet| = k$. $\square$

Отметим, что при выполнении (7) сами меченые атомы недостижимы друг из друга на уровне k, поскольку достижимые друг из друга меченые вершины обязаны принадлежать одному атому.

Утверждение 4. *Пусть выполнено* (7), *тогда любое дерево леса* $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$ *содержит ровно один меченый атом алгебры* $\mathfrak{A}^k$.

Доказательство. Действительно, лес $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$ содержит k корней. Они принадлежат k непересекающимся деревьям и значит эти корни содержатся по одному в k различных меченых атомах. Но самих меченых атомов ровно k. Тем самым каждое дерево леса F содержит ровно один меченый атом. $\square$

Утверждение 5. *Пусть выполнено* (7), $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$, $\mathcal{E} \in \aleph_k$ *и* T^F – *дерево леса* F, *содержащее* $\mathcal{E}$. *Тогда существует такой лес* $H \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$, *в котором вся* k*-область притяжения множества* $\mathcal{E}$ *находится в одном дереве и* $H|_{\mathcal{V}T^F} = T^F$.

Доказательство. Пусть в лесе F атом $\mathcal{U}$, который принадлежит k-области притяжения атома $\mathcal{E}$, не находится с ним в одном дереве. По условию существует лес $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$, в котором $\mathcal{E}$ достижимо из $\mathcal{U}$. Пусть в лесе G эти атомы принадлежат дереву T^G, а в лесе F атом $\mathcal{E}$ находится в дереве T^F (см. рис. 4 a)). Введём графы $R = F^G_{\uparrow\mathcal{D}}$ и $G^F_{\uparrow\mathcal{D}}$, где $\mathcal{D} = \mathcal{V}T^G \setminus \mathcal{V}T^F$. По свойству 2(c) оба они – леса. По предложению 1 убеждаемся, что $R \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$. При этом последовательность дуг, исходящая в T^G из $\mathcal{U}$ и достигающая $\mathcal{E}$, рано или поздно выходит из $\mathcal{D}$ и попадает в $\mathcal{V}T^G \cap \mathcal{V}T^F$. Это вовсе не означает, что в R атом $\mathcal{E}$, если он немеченый, достижим из $\mathcal{U}$. Это лишь означает, что множество $\mathcal{V}T^F \cap \mathcal{V}T^G$, которому принадлежит $\mathcal{E}$, достижимо в R из $\mathcal{U}$. Тем не менее, $\mathcal{U}$ находится в лесе R в том же дереве, что и множество $\mathcal{E}$. По построению $R|_{\mathcal{V}T^F} = T^F$. Продолжая при необходимости эту процедуру с другими множествами из $\aleph_k^\circ$, которые принадлежат k-области притяжения $\mathcal{E}$, но уже для графа R, мы последовательно присоединим их к одному дереву. $\square$

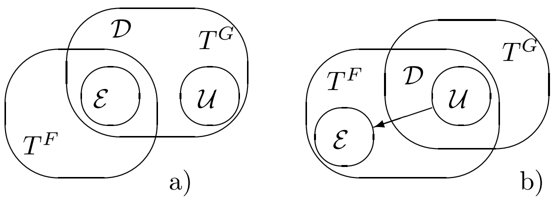

Рис. 4. a) $\mathcal{D} = \mathcal{V}T^G \setminus \mathcal{V}T^F$, в графе G множество $\mathcal{E}$ достижимо из $\mathcal{U}$; b) $\mathcal{D} = \mathcal{V}T^F \cap \mathcal{V}T^G$, дуга, исходящая из $\mathcal{U}$ и заходящая в $\mathcal{E}$, принадлежит лесу F.

Утверждение 6. *Пусть выполнено (7),* $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$, $\mathcal{E} \in \aleph_k$, *тогда существует лес* $H \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$ *такой, что все дуги, исходящие из вершин множества* $\mathcal{E}$ *в лесах* F *и* H, *совпадают, причем в само множество* $\mathcal{E}$ *дуги не заходят.*

Доказательство. Пусть в лесе F в множество $\mathcal{E}$ заходит дуга из некоторого атома $\mathcal{U}$ и пусть эти атомы находятся в F в дереве T^F (см. рис. 4b)). Поскольку множества $\mathcal{E}$ и $\mathcal{U}$ – атомы, то существует лес $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$, в котором эти атомы принадлежат различным деревьям. Пусть атом $\mathcal{U}$ в лесе G принадлежит дереву T^G. Введём графы $R = F^G_{\uparrow\mathcal{D}}$ и $G^F_{\uparrow\mathcal{D}}$, где $\mathcal{D} = \mathcal{V}T^F \cap \mathcal{V}T^G$. По свойству 2(b) R – лес. По предложению 1 $R \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$. В лесе R в атом $\mathcal{E}$ дуги из $\mathcal{U}$ теперь не заходят, хотя $\mathcal{U}$ может оказаться и в одном дереве с $\mathcal{E}$. Это возможно, если $\mathcal{E}$ – немеченый атом, а множество $\mathcal{D}$ достижимо в F из $\mathcal{E}$. Никаких дополнительных дуг, заходящих в $\mathcal{E}$, по сравнению с теми, что заходят в $\mathcal{E}$ в лесе F, не появляется, поскольку в лесе G нет дуг, исходящих из $\mathcal{V}T^F \cap \mathcal{V}T^G$ и заходящих в $\mathcal{V}T^F \setminus \mathcal{V}T^G$, которому принадлежит $\mathcal{E}$. Повторяя при необходимости указанную процедуру уже с лесом R, мы получим граф, в котором в атом $\mathcal{E}$ дуги не заходят, а все дуги, исходящие из вершин $\mathcal{E}$, те же, что и в лесе F.

□

Теорема 5. *Пусть выполнено* (7) *и* $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}_k$, *тогда сумма весов дуг, исходящих из вершин множества* $\mathcal{A}$, *одна и та же для всех лесов из* $\widetilde{\mathcal{F}}^k$.

Доказательство. Для доказательства достаточно убедиться, что сумма весов дуг, исходящих из вершин произвольного атома $\mathcal{E} \in \aleph_k$, одна и та же для любой пары минимальных лесов H и P из $\widetilde{\mathcal{F}}^k$. По утверждению 6 в $\widetilde{\mathcal{F}}^k$ найдутся такие леса F и G, в которых дуги в атом $\mathcal{E}$ не заходят, и при этом $\Upsilon^F_{\mathcal{E}} = \Upsilon^H_{\mathcal{E}}$ и $\Upsilon^G_{\mathcal{E}} = \Upsilon^P_{\mathcal{E}}$. Пусть $Q = F^G_{\uparrow\mathcal{E}}$ и $R = G^F_{\uparrow\mathcal{E}}$. Согласно утверждению 3 число дуг, исходящих из вершин множества $\mathcal{E}$ в лесах F и G, одинаково. Графы Q и R по свойству 1(b) являются лесами, а по предложению 1 оба они минимальные и принадлежат множеству $\widetilde{\mathcal{F}}^k$. Пусть $\Delta = \Upsilon^F_{\mathcal{E}} - \Upsilon^G_{\mathcal{E}}$, тогда

$$\phi^k = \Upsilon^Q = \Upsilon^F - \Delta = \phi^k - \Delta\ , \quad \phi^k = \Upsilon^R = \Upsilon^G + \Delta = \phi^k + \Delta\ ,$$

откуда $\Delta = 0$, а значит $\Upsilon^F_{\mathcal{E}} = \Upsilon^G_{\mathcal{E}}$. Тем самым и $\Upsilon^H_{\mathcal{E}} = \Upsilon^P_{\mathcal{E}}$. □

Доказанная теорема для всякого $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}_k$ позволяет при выполнении (7) ввести величину $\rho_{\mathcal{A}}$ как сумму весов дуг, исходящих из вершин множества $\mathcal{A}$ в произвольном k-компонентном лесе минимального веса:

$$\rho_{\mathcal{A}} = \Upsilon^F_{\mathcal{A}},\ \mathcal{A} \in \mathfrak{A}_k,\ F \in \widetilde{\mathcal{F}}^k. \tag{8}$$

Следствие 2. *Пусть выполнено* (7). *Тогда для любых множеств* $\mathcal{A}_i \in \mathfrak{A}_k$, *таких что* $\bigcup\limits_i \mathcal{A}_i = \mathcal{N}$ *и* $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$, *величина* ϕ_k *может быть сосчитана как*

$$\phi^k = \sum_i \rho_{\mathcal{A}_i}. \tag{9}$$

В частности

$$\phi^k = \sum_{\mathcal{E} \in \aleph_k} \rho_{\mathcal{E}}. \tag{10}$$

Доказательство. Из определения весов (1) следует, что если множества $\mathcal{A}_i$ представляют произвольное разбиение множества вершин $\mathcal{N}$ на непересекающиеся множества (не обязательно принадлежащие какой-либо алгебре), то вес любого леса F равен

$$\Upsilon^F = \sum_i \Upsilon^F_{\mathcal{A}_i}. \tag{11}$$

Если $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$, то $\phi^k = \Upsilon^F$. Если же $\mathcal{A}_i \in \mathfrak{A}_k$ и выполнено (7), то $\Upsilon^F_{\mathcal{A}_i} = \rho_{\mathcal{A}_i}$. Подставляя эти равенства в (11), получаем (9) и (10). □

Теорема 5 упрощает процесс построения минимальных лесов из двух известных. Именно, справедливо

Утверждение 7. *Пусть выполнено* (7), F *и* G *принадлежат* $\widetilde{\mathcal{F}}^k$ *и множество* $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}_k$ *таково, что* $H = F^G_{\uparrow\mathcal{A}}$ *– лес. Тогда* $H \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$.

Доказательство. По утверждению 3 в лесах F и G множество $\mathcal{A}$ содержит одинаковое число корней, поэтому $H \in \mathcal{F}^k$. При этом, по построению $\Upsilon^H_{\mathcal{A}} = \Upsilon^G_{\mathcal{A}} = \rho_{\mathcal{A}}$ и $\Upsilon^H_{\mathcal{N}\setminus\mathcal{A}} = \Upsilon^F_{\mathcal{N}\setminus\mathcal{A}} = \rho_{\mathcal{N}\setminus\mathcal{A}}$, поэтому $\Upsilon^H = \phi_k$. □

Утверждение 8. *Пусть выполнено* (7), $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$ *и множество* $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}_k$ *таково, что в лесе* F *дуги в него не заходят. Тогда для любого* $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$, *граф* $H = F^G_{\uparrow\mathcal{A}}$ *принадлежит* $\widetilde{\mathcal{F}}^k$.

Доказательство. По свойству 1(b) граф $F^G_{\uparrow\mathcal{A}}$ является лесом. По утверждению 7 получаем, что $H \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$. □

Теорема 6. *Пусть выполнено* (7), *тогда*

1) *для любого* $\mathcal{M} \in \aleph_k^\bullet$, *если* F *– лес, в котором из всех вершин множества* $\mathcal{M}$ *кроме одной исходят дуги, то* $\Upsilon_{\mathcal{M}}^F \geqslant \rho_{\mathcal{M}}$. *При этом, если* $\Upsilon_{\mathcal{M}}^F = \rho_{\mathcal{M}}$, *то существует лес* $H \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$ *такой, что* $H|_{\mathcal{M}} = F|_{\mathcal{M}}$;

2) *для любого* $\mathcal{U} \in \aleph_k^\circ$, *если* F *– лес, в котором из всех вершин множества* $\mathcal{U}$ *исходят дуги, то* $\Upsilon_{\mathcal{U}}^F \geqslant \rho_{\mathcal{U}}$. *При этом, если* $\Upsilon_{\mathcal{U}}^F = \rho_{\mathcal{U}}$, *то существует лес* $H \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$ *такой, что все дуги, исходящие из вершин множества* $\mathcal{U}$ *в лесах* F *и* H, *совпадают.*

Доказательство. Докажем пункт 1). Пункт 2) доказывается полностью аналогично. По утверждению 6 существует лес $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$, в котором дуги во множество $\mathcal{M}$ не заходят. Пусть $H = G_{\uparrow\mathcal{M}}^F$. По свойству 1(b) граф H – лес. И F, и G имеют в $\mathcal{M}$ по одному корню, поэтому $H \in \mathcal{F}^k$, а значит

$$\phi^k \leqslant \Upsilon^H = \Upsilon^G - \Upsilon_{\mathcal{M}}^G + \Upsilon_{\mathcal{M}}^F = \phi^k - \rho_{\mathcal{M}} + \Upsilon_{\mathcal{M}}^F \tag{12}$$

откуда $\Upsilon_{\mathcal{M}}^F \geqslant \rho_{\mathcal{M}}$. Если же $\Upsilon_{\mathcal{M}}^F = \rho_{\mathcal{M}}$, то $H \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$. По построению $H|_{\mathcal{M}} = F|_{\mathcal{M}}$. □

Теорема 7. *Пусть выполнено* (7), $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$, $\mathcal{M} \in \aleph_k^\bullet$, *тогда индуцированный подграф* $F|_{\mathcal{M}}$ *– дерево.*

Доказательство. Согласно утверждению 6 без ограничения общности можно считать, что в лесе F дуги в атом $\mathcal{M}$ не заходят. Убедимся от противного, что нет и исходящих дуг из $\mathcal{M}$. Пусть в лесе F из какой-то вершины $j \in \mathcal{M}$ исходит дуга, заход которой не принадлежит $\mathcal{M}$. Поскольку во множество $\mathcal{M}$ дуги не заходят, то вершина j принадлежит дереву с корнем в некотором другом меченом атоме. Это противоречит утверждению 4 и тому, что $\mathcal{M}$ – атом. Тем самым, дерево T^F, содержащее $\mathcal{M}$, никаких других атомов не содержит и совпадает с $F|_{\mathcal{M}}$. □

6.2. Об изменении "внутриатомной" и "межатомной" структуры при росте лесов.

Теорема 8. *Пусть выполнено* (7) *и* $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k-1}$, *тогда существует такой его предок* $P \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$ *и такое* $\mathcal{M} \in \aleph_k^\bullet$, *что все дуги исходящие из вершин множества* $\mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$ *в лесах* F *и* P *совпадают, причём* $F|_{\mathcal{M}}$ *– дерево.*

Доказательство. Пусть $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k-1}$, а G – его предок, принадлежащий $\widetilde{\mathcal{F}}^k$. Пусть также F получается из G сращиванием двух деревьев

$T^G_{\mathcal{M}}$ и $T^G_{\mathcal{L}}$ с корнями в меченых атомах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{L}$ алгебры $\mathfrak{A}_k$ соответственно. Дуги одного из этих деревьев (пусть этим деревом является $T^G_{\mathcal{L}}$) остаются прежними (см. рис.5).

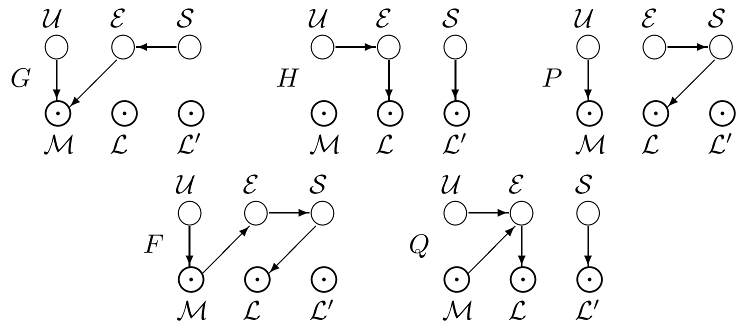

Рис. 5. Структурный вид минимальных лесов с точностью до атомов алгебры. В верхнем ряду леса из $\widetilde{\mathcal{F}}^k$, в нижнем – из $\widetilde{\mathcal{F}}^{k-1}$.

По утверждению 6 существует такой лес $H \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$ и такое его дерево T^H, что $\mathcal{V}T^H = \mathcal{M}$ и $H|_{\mathcal{M}} = G|_{\mathcal{M}}$. Введем графы $Q = H^F_{\uparrow\mathcal{M}}$ и $P = F^H_{\uparrow\mathcal{M}}$. По свойству 2(a) оба они – леса. В лесе F из всех вершин $\mathcal{M}$ исходят дуги, в лесе H – из всех, кроме одной, которая в нём является корнем. Поэтому по пункту 2 предложения 1 выполнено: $Q \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k-1}$, $P \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$. В лесе P по построению все дуги, исходящие из вершин $\mathcal{N}\backslash\mathcal{M}$, такие же, как в лесе F. В лесе Q из всех вершин множества $\mathcal{M}$ исходят дуги и они совпадают по построению с дугами, исходящими из этих же вершин в лесе F. Так как в лесах Q и H дуги во множество $\mathcal{M}$ не заходят, чтобы доказать, что $F|_{\mathcal{M}}$ – дерево, достаточно убедиться, что из множества $\mathcal{M}$ в лесе Q (а значит, и в лесе F) исходит ровно одна дуга (исход этой дуги и есть корень дерева $F|_{\mathcal{M}} = Q|_{\mathcal{M}}$). Пусть i – корень леса H, находящийся в множестве $\mathcal{M}$, и пусть $\mathcal{X}$ – максимальная связная компонента индуцированного подграфа $Q|_{\mathcal{M}}$, содержащая вершину i, а $\mathcal{Y} = \mathcal{M} \setminus \mathcal{X}$. Тем самым, в лесе Q ни в множество $\mathcal{X}$, ни в множество $\mathcal{Y}$ дуги не заходят. При этом $Q|_{\mathcal{X}}$ – дерево, а $Q|_{\mathcal{Y}}$ – лес (см. рис. 6). Наша задача показать, что $\mathcal{Y} = \varnothing$. Пусть множество $\mathcal{M}$ в лесе Q содержится в дереве T^Q. Имеем: $\mathcal{Y} \subset \mathcal{V}T^Q \cap \mathcal{V}T^H$, $\mathcal{N}^{in}_{\mathcal{Y}}(Q) = \varnothing$ и

$\mathcal{N}^{out}_{\mathcal{Y}}(Q) \subset \mathcal{V}T^Q \setminus \mathcal{V}T^H$. Введём графы $R = H^Q_{\uparrow\mathcal{Y}}$ и $Q^H_{\uparrow\mathcal{Y}}$. Тогда по свойству 2(d) оба они – леса, а по предложению 1 получаем, что $R \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$. Если множество $\mathcal{Y}$ непустое, то в графе R по построению вершина i (она является корнем и в H, и в R) и множество $\mathcal{Y}$ не находятся в одном дереве. Это противоречит тому, что $\mathcal{M}$ – атом алгебры $\mathfrak{A}_k$.

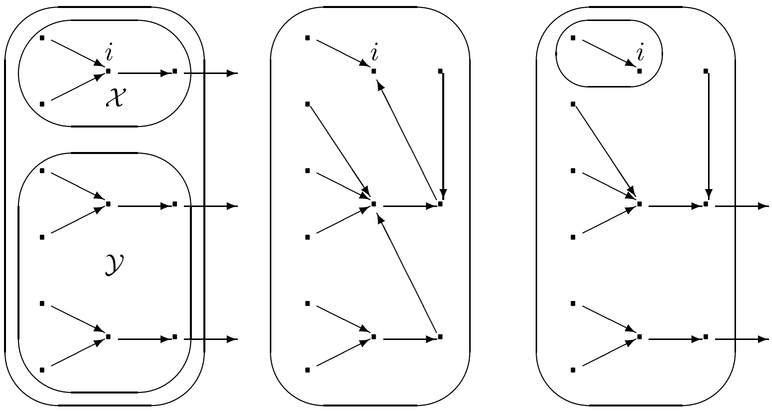

Рис. 6. По предположению $\mathcal{Y} \neq \varnothing$. Изображены дуги, исходящие из вершин атома $\mathcal{M}$: слева - в лесе Q, по центру - в лесе H, справа - в лесе $R = H^Q_{\uparrow\mathcal{Y}}$.

Построенный лес P (также, как и G) является предком леса F, однако в нём перестроению подверглись лишь дуги, исходящие их вершин только одного атома $\mathcal{M}$. $\square$

Следствие 3. *При выполнении* (7) *для любого немеченого атома* $\mathcal{U} \in \aleph^\circ_k$ *выполнено*

$$\widetilde{\mathcal{F}}^{k-1}|_{\mathcal{U}} \subseteq \widetilde{\mathcal{F}}^k|_{\mathcal{U}}. \tag{13}$$

Доказательство. Из теоремы следует, что для произвольного $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k-1}$ найдутся такие $P \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$ и $\mathcal{M} \in \aleph^\bullet_k$, что $F|_{\mathcal{A}} = P|_{\mathcal{A}}$, при $\mathcal{A} \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$. Если два графа совпадают, при сужении на некоторое множество, то они совпадают и при сужении на любое его подмножество. Все немеченые атомы содержатся в $\mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$. $\square$

Замечание 1. Отметим, что обратное утверждение к теореме 8 неверно. Именно, не для всякого леса из $\widetilde{\mathcal{F}}^k$ найдётся такой потомок из $\widetilde{\mathcal{F}}^{k-1}$, что несовпадение их дуг касается лишь одного меченого атома. В примере (см. рис. 5), иллюстрирующем теорему 8, можно построить довольно много лесов из $\widetilde{\mathcal{F}}^{k-1}$ (см. рис. 7). Однако, для леса G соответствующего потомка нет. Причина заключается в том, что в лесе G немеченый атом $\mathcal{E}$ принадлежит дереву с корнем в меченом атоме $\mathcal{M}$ алгебры $\mathfrak{A}_k$. Но из множества $\mathcal{M}$ (которое не является атомом алгебры $\mathfrak{A}_{k-1}$, а вместе с $\mathcal{U}$ и $\mathcal{E}$ образует немеченый атом этой алгебры) в любом лесе из $\widetilde{\mathcal{F}}^{k-1}$ исходит дуга как раз в множество $\mathcal{E}$. Поэтому любой потомок леса G имеет отличную от него конфигурацию дуг, исходящих из вершин множества $\mathcal{E}$.

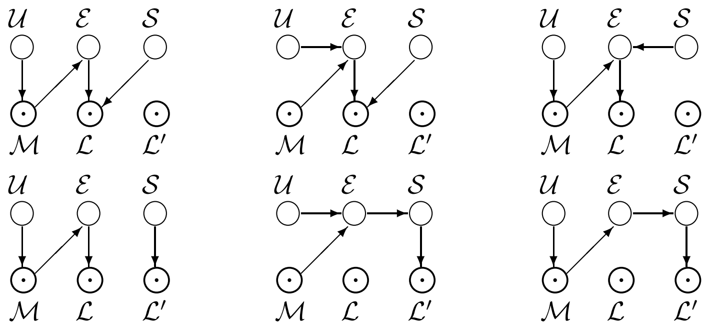

Рис. 7. Варианты лесов из $\widetilde{\mathcal{F}}^{k-1}$ для примера из рис. 5. Меченый атом $\mathcal{M}$ и немеченые атомы $\mathcal{U}$ и $\mathcal{E}$ алебры $\mathfrak{A}_k$ образуют немеченый атом алгебры $\mathfrak{A}_{k-1}$.

Из теоремы 8, в частности, следует, что если любой лес из $\widetilde{\mathcal{F}}^k$, суженный на произвольный атом алгебры $\mathfrak{A}_k$, является деревом (обоснование подобной гипотезы предмет отдельного исследования), то также и любой лес из $\widetilde{\mathcal{F}}^{k-1}$, суженный на произвольный атом алгебры $\mathfrak{A}_k$, представляет собой дерево при выполнении (7).

Как показывает следующий пример, для лесов из $\widetilde{\mathcal{F}}^n$, $n < k-1$, индуцированный атомом алгебры $\mathfrak{A}_k$ подграф не обязательно является деревом.

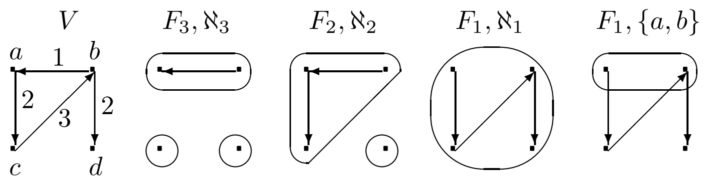

Рис. 8. Граф V и веса его дуг (слева), минимальные леса $F_{3,2,1}$ и атомы алгебр $\mathfrak{A}_{3,2,1}$. Справа – лес F_1, суженный на меченый атом $\{a, b\}$ алгебры подмножеств $\mathfrak{A}_3$, не является деревом.

Пример 1. Веса дуг графа V: $v_{ba} = 1$, $v_{ac} = v_{bd} = 2$, $v_{cb} = 3$, (см. рис. 8). Здесь, каждое из множеств $\mathcal{F}^k$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ состоит из единственного леса: $\{F_k\} = \mathcal{F}^k = \widetilde{\mathcal{F}}^k$. Имеем: $\phi^4 = 0$, $\phi^3 = 1$, $\phi^2 = 3$, $\phi^1 = 7$ и по определению $\phi^0 = \infty$. Неравенства выпуклости имеют вид

$$\phi^0 - \phi^1 > \phi^1 - \phi^2 > \phi^2 - \phi^3 > \phi^3 - \phi^4 \ ,$$

в которых всюду выполнен знак строгого неравенства. Множество $\{a, b\}$ является меченым атомом алгебры $\mathfrak{A}_3$. При этом, индуцированный подграф $F_1|_{\{a,b\}}$ не является деревом, а представляет собой пустой лес, состоящий из двух пустых деревьев с корнями в вершинах a и b.

§7. Как проявляют себя атомы алгебр подмножеств $\mathfrak{A}_k$ в малой диффузии

Генератор малой диффузии (правая часть уравнения Фоккера –Планка с малым параметром при старших производных), суженный на подпространство младших собственных функций, отвечающих за поведение на экспоненциально больших временах, оказывается матрицей, транспонированной матрице интенсивностей перехода некоторой марковской цепи с конечным числом состояний [4, 5]. Число состояний равно числу точек устойчивого равновесия динамической системы, определяемой полем сноса [3]. Матрица интенсивностей с точностью до знака является матрицей Лапласа орграфа G с весами дуг, представляющими собой экспоненциально малые переходные плотности

$$g_{ij} \sim \exp(-v_{ij}/\varepsilon), \tag{14}$$

где ε – малый параметр. Коэффициенты характеристического многочлена матрицы Лапласа (или матрицы интенсивностей), а также компоненты собственных векторов, выражаются через суммы произведений матричных элементов по заходящим лесам [6–9]. По этой причине анализируются именно заходящие леса, а не исходящие.

Основную роль в динамике распределения подобной цепи играет граф V с весами дуг v_{ij}, фигурирующими в показателе экспоненты (14). На экспоненциально больших временах $t \sim \exp(\frac{\phi^{k-1}-\phi^k}{\varepsilon})$ возникают субпредельные распределения – инвариантные в соответствующих масштабах времени [3–5]. Эти распределения сосредоточены на меченых вершинах алгебры $\mathfrak{A}_k$. Это обстоятельство связано с тем, что правые собственные вектора Лапласиана имеют асимптотически одинаковые компоненты для вершин, принадлежащих одному атому алгебры $\mathfrak{A}_k$, а левые собственные вектора могут иметь асимптотически ненулевые компоненты только для меченых вершин из $\aleph_k^\bullet$.

Список литературы

1. В. А. Буслов, *Структура ориентированных лесов минимального веса: родственные леса и неравенства выпуклости.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **475** (2018), 5–21.
2. А. Д. Вентцель, *Об асимптотике собственных значений матриц с элементами порядка* $\exp\{-V_{ij}/2\varepsilon^2\}$. — ДАН СССР **202**, No. 2 (1972), 263–266.
3. А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин, *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений.* М, 1979.
4. В. А. Буслов, К. А. Макаров, *Иерархия масштабов времени при малой диффузии.* — ТМФ, **76**, No. 2 (1988), 219–230.
5. В. А. Буслов, К. А. Макаров, *Времена жизни и низшие собственные значения оператора малой диффузии.* — Матем. заметки **51**, No. 1 (1992), 20–31.
6. В. А. Буслов, *О коэффициентах характеристического многочлена лапласиана взвешенного ориентированного графа и теореме о всех минорах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **427** (2014), 5–21.
7. В. А. Буслов, *О характеристическом многочлене и собственных векторах в терминах древовидной структуры орграфа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **450** (2016), 14–36.
8. В. А. Буслов, *О связи кратностей спектра со знаками слагаемых в компонентах собственных векторов в древовидной структуре.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **464** (2017), 14–36.
9. П. Ю. Чеботарёв, Р. П. Агаев, *Матричная теорема о лесах и лапласовские матрицы орграфов.* LAP LAMBERT Academic Publising GmbH Co.Kg., 2011.

Buslov V. A. The structure of directed forests of minimal weight: algebra of subsets of the set of vertices.

An embedded system of algebras of subsets of the set of vertices of weighted digraph is constructed, and the properties of spanning minimal forests are studied by restricting them to atoms of the corresponding algebras.

С.-Петербургский государственный
университет, физический факультет
ул. Ульяновская, д. 3,
Старый Петергоф, 198504 Санкт-Петербург
E-mail: abvabv@bk.ru, v.buslov@spbu.ru

Поступило 18 ноября 2019 г.