

П. А. Валиневич, П. В. Антоненко

УНИВЕРСАЛЬНАЯ R -МАТРИЦА ДЛЯ РАЦИОНАЛЬНОЙ СЕМИВЕРШИННОЙ МОДЕЛИ

§1. СЕМИВЕРШИННАЯ МОДЕЛЬ

Семивершинная двумерная статистическая модель, рассмотренная в работе [4], задается R -матрицей

$$R(u) = \begin{pmatrix} \sin \pi(u + 2\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \pi u & \sin 2\pi\eta & 0 \\ 0 & \sin 2\pi\eta & \sin \pi u & 0 \\ \alpha \sin \pi u \sin \pi(u + 2\eta) & 0 & 0 & \sin \pi(u + 2\eta) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где η и α – произвольные параметры, а сама матрица понимается как оператор, действующий в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. При $\alpha = 0$ она превращается в хорошо известную шестивершинную модель [7]. Следуя подходу квантового метода обратной задачи рассеяния [1], статистическая сумма Z такой модели с периодическими граничными условиями на решетке $N \times N$ имеет вид

$$Z = \text{tr}[t(u)]^N,$$

где $t(u) = \text{tr}_0 R_{01}(u) R_{02}(u) \dots R_{0N}(u)$ – трансфер-матрица, а $R_{ij}(u)$ обозначает матрицу (1), действующую в тензорном произведении i -ой и j -ой копии пространства $\mathbb{C}^2$. Интегрируемость такой модели обеспечивается выполнением уравнения Янга–Бакстера

$$R_{12}(u - v) R_{13}(u) R_{23}(v) = R_{23}(v) R_{13}(u) R_{12}(u - v). \quad (2)$$

Матрица (1) возникла в [4] как специальный предел преобразованной R -матрицы восьмивершинной модели. Эквивалентная ей R -матрица ранее рассматривалась в работах [9, 10]. В настоящей работе мы рассматриваем рациональный предел этой модели с R -матрицей

$$R(u) = \begin{pmatrix} u + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 1 & 0 \\ 0 & 1 & u & 0 \\ \alpha^2 u(u + 1) & 0 & 0 & u + 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

Ключевые слова: R -матрица, двумерные решеточные модели.
Работа поддержана грантом РНФ No. 19-11-00131.

которую в дальнейшем будем называть рациональной семивершинной моделью. В пределе $\alpha = 0$ она превращается в R -матрицу Янга $R_{12} = u + P_{12}$.

В данной работе для такой модели мы строим универсальную R -матрицу используя процедуру слияния (fusion, [8]) а также технику однородных полиномов, использовавшуюся для похожих задач в [3].

§2. ПРОЦЕДУРА СЛИЯНИЯ

Процедура слияния [8] позволяет строить конечномерные R -матрицы $R^{(nm)}(u)$, определенные на $\mathbb{C}^{n+1} \otimes \mathbb{C}^{m+1}$ и удовлетворяющие уравнению Янга–Бакстера

$$R_{12}^{(mn)}(u-v)R_{13}^{(ml)}(u)R_{23}^{(nl)}(v) = R_{23}^{(nl)}(v)R_{13}^{(ml)}(u)R_{12}^{(mn)}(u-v)$$

из фундаментальных R -матриц $R^{(1,1)}(u)$.

На первом шаге процедуры строятся матричные элементы $R^{(n,1)}(u)$ с помощью формулы

$$R_{(1,\dots,n),j}^{(n,1)}(u) = \text{Sym } R_{1j}^{(1,1)}(u+n-1) \dots R_{n-1,j}^{(1,1)}(u+1)R_{nj}^{(1,1)}(u), \quad (4)$$

где в правой части все матрицы имеют одинаковое второе пространство $\mathbb{C}^2$, обозначенное j , и разные первые пространства $1, \dots, n$. Симметризация Sym относится как раз к этим пространствам. В результате в левой части стоит оператор, действующий на симметричной части $\mathbb{C}^{\otimes n}$, которая изоморфна $\mathbb{C}^{n+1}$.

Аналогично можно построить $R^{(n,m)}(u)$, используя $R^{(n,1)}(u)$:

$$R_{(1\dots n)(\bar{1}\dots\bar{m})}^{(n,m)}(u) = \text{Sym } R_{(1\dots n),\bar{1}}^{(n,1)}(u)R_{(1\dots n),\bar{2}}^{(n,1)}(u-1) \dots R_{(1\dots n),\bar{m}}^{(n,1)}(u-m+1), \quad (5)$$

где симметризация берется по пространствам $\bar{1}, \dots, \bar{m}$.

В работе [3] был описан метод, который позволяет получить компактные формулы для $R^{(n,m)}$ для шестивершинной и восьмивершинной модели [7]. В данной работе мы применим тот же метод для получения универсальной R -матрицы рациональной семивершинной модели.

Каждому вектору $\Psi_{i_1\dots i_n}$ из $\text{Sym } \mathbb{C}^{\otimes n}$ поставим в соответствие однородный полином

$$\Psi(\lambda) = \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n} \Psi_{i_1\dots i_n},$$

где подразумевается суммирование по всем $i_1, \dots, i_n = 1, 2$, а λ_1, λ_2 – вспомогательные переменные. Для каждого оператора $T_{(i_1 \dots i_n)}^{(j_1 \dots j_n)}$, действующего на $Sym \mathbb{C}^{\otimes n}$, определим символ оператора

$$T(\lambda|\mu) = \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n} T_{(i_1 \dots i_n)}^{(j_1 \dots j_n)} \mu_{j_1} \dots \mu_{j_n}.$$

Тогда результат действия оператора на вектор запишется в виде

$$(T\Psi)(\lambda) = \frac{1}{n!} T(\lambda|\partial_\mu) \Psi(\mu). \quad (6)$$

Используя эти обозначения получим символ оператора $R^{(n,1)}(u)$ по формуле (4). Начнем с выражения для $R^{(1,1)}(u)$:

$$R^{(1,1)}(u) = \begin{pmatrix} u + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma_3 & \sigma_- \\ \alpha^2 u(u+1)\sigma_- + \sigma_+ & u + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma_3 \end{pmatrix},$$

в котором $\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$, и σ_i – матрицы Паули, действующие в первом пространстве тензорного произведения $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. От пространства однородных функций удобно перейти к пространству функций одной переменной z , сделав замену $(\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (1, -z)$. Тогда, используя обозначения

$$\langle \lambda | = (1, -z); | \mu \rangle = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix},$$

для символа оператора $R^{(1,1)}(u)$ получим

$$\langle \lambda | R^{(1,1)}(u) | \mu \rangle = \begin{pmatrix} u + z\partial_z & -\partial_z \\ z^2\partial_z - z + \alpha^2 u(u+1)\partial_z & u + 1 - z\partial_z \end{pmatrix} (\mu_2 - \mu_1 z),$$

где $\partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z}$. Оператор в правой части, содержащий дифференцирование по z , может быть записан в факторизованном виде

$$\langle \lambda | R^{(1,1)}(u) | \mu \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & u+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\partial_1 \\ -\alpha^2 \partial_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix} (\mu_2 - \mu_1 z_1)|_{z_1=z}. \quad (7)$$

В последней формуле появилась новая вспомогательная переменная z_1 , и ∂_1 – дифференцирование по этой переменной.

Введенные выше обозначения позволяют записать формулу (4) через символы операторов в виде

$$R^{(n,1)}(u|\lambda, \mu) = \langle \lambda | R^{(1,1)}(u+n-1) | \mu \rangle \dots \langle \lambda | R^{(1,1)}(u+1) | \mu \rangle \langle \lambda | R^{(1,1)}(u) | \mu \rangle.$$

Часть промежуточных матриц благодаря (7) сократится и мы получим

$$R^{(n,1)}(u|\lambda, \mu) = (u+1) \dots (u+n-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & u+n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\partial_1 \\ -\alpha^2 \partial_1 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & -\partial_1 \\ -\alpha^2 \partial_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix} (\mu_2 - \mu_1 z_1) \dots (\mu_2 - \mu_1 z_n)|_{z_1=z_2=\dots=z_n=z}. \quad (8)$$

В этом выражении можно избавиться от вспомогательных переменных $z_1, \dots, z_n$, и после сдвига спектрального параметра $u \rightarrow u - \frac{1}{2}n$, продиктованного соображениями удобства, мы окончательно получим

$$R^{(n,1)}(u|\lambda, \mu) = r(u) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \Delta_+ & -\alpha^{-1} \Delta_- \\ -\alpha u_1 u_2 \Delta_- & u_2 \Delta_+ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix} (\mu_2 - \mu_1 z)^n, \quad (9)$$

где $r(u)$ – числовой множитель, который в дальнейшем будет опущен, $u_1 = u - \frac{1}{2}n - 1$, $u_2 = u + \frac{1}{2}n$, и введены операторы $\Delta_{\pm}$, действующие на функции $f(z)$ сдвигами:

$$\Delta_{\pm} f(z) = \frac{1}{2} (f(z + \alpha) \pm f(z - \alpha)).$$

При подстановке полученного выражения в (6) находим, что $R^{(n,1)}(u)$ действует на функции $\Psi(z)$ как разностный оператор

$$R^{(n,1)}(u) = \begin{pmatrix} (u_1 + 1) \Delta_+ + z \alpha^{-1} \Delta_- & -\alpha^{-1} \Delta_- \\ z^2 \alpha^{-1} \Delta_- + (u_1 - u_2 + 1) z \Delta_+ - \alpha u_2 (u_1 + 1) \Delta_- & u_2 \Delta_+ - \alpha^{-1} z \Delta_- \end{pmatrix}.$$

§3. ВЫЧИСЛЕНИЕ $R^{(n,m)}(u)$

Воспользуемся теперь формулой (5) на следующем шаге нахождения универсальной R -матрицы. Для этого рассмотрим символ оператора $R^{(n,1)}(u)$, в котором вспомогательные переменные относятся к пространству $\mathbb{C}^2$:

$$\Lambda(u|\lambda, \mu) = \lambda_i \left(R^{(n,1)}(u) \right)_j^i \mu_j$$

В таких обозначениях (5) приобретает вид

$$R^{(n,m)}(u|\lambda, \mu) = \Lambda(u|\lambda, \mu) \Lambda(u-1|\lambda, \mu) \dots \Lambda(u-m+1|\lambda, \mu). \quad (10)$$

Используя перестановочные соотношения

$$\Delta_{\pm} z = z \Delta_{\pm} + \alpha \Delta_{\mp}$$

Можно получить следующее выражение

$$\begin{aligned} \Lambda(u|\lambda, \mu) = & -\alpha^{-1} \gamma(\lambda_1 + \lambda_2 z, u_2 + 1) \gamma(\mu_2 - \mu_1 z, -u_1) \\ & \times \Delta_- \gamma(\lambda_1 - \lambda_2 z, -u_2) \gamma(\mu_2 - \mu_1 z, u_1 + 1), \end{aligned} \quad (11)$$

где введена функция

$$\gamma(\xi + \eta z, p) = (2\alpha\eta)^p \frac{\Gamma\left(\frac{\xi + \eta z}{2\alpha\eta} + \frac{1}{2} + \frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\xi + \eta z}{2\alpha\eta} + \frac{1}{2} - \frac{p}{2}\right)}.$$

Для целых показателей степеней a и b выполняется операторное соотношение типа “звезда-треугольник”

$$\gamma(z, a) \Delta_-^{a+b} \gamma(z, b) = \Delta_-^b \gamma(z, a+b) \Delta_-^a.$$

С его помощью (11) может быть записано еще в одной форме:

$$\Lambda(u|\lambda, \mu) = (-\alpha)^{-1} \gamma(\lambda_1 + \lambda_2 z, u_2 + 1) \Delta_-^{u_1+1} (\mu_2 - \mu_1 z) \Delta_-^{-u_1} \gamma(\lambda_1 + \lambda_2 z, u_2). \quad (12)$$

Это выражение содержит нецелые степени Δ_- и понимается в том смысле, что оператор $\Delta_-^{u_1+1}$ должен быть пронесен направо через $(\mu_2 - \mu_1 z)$ с использованием соотношения

$$\Delta_-^a z = z \Delta_-^a + a\alpha \Delta_+ \Delta_-^{a-1},$$

и объединен с $\Delta_-^{-u_1}$. Подставляя (12) в (10) и используя соотношение $\gamma(z, p) \gamma(z, -p) = 1$, получаем окончательное выражение для символа универсальной R -матрицы

$$\begin{aligned} R^{(n,m)}(u|\lambda, \mu) = & (-\alpha)^{-m} \gamma(\lambda_1 + \lambda_2 z, u_2 + 1) \Delta_-^{u_1+1} (\mu_2 - \mu_1 z)^m \\ & \times \Delta_-^{-u_1+m-1} \gamma(\lambda_1 + \lambda_2 z, -u_2 + m - 1). \end{aligned}$$

При $p \in \mathbb{N}$ и $\alpha \rightarrow 0$ мы имеем $\gamma(z, p) \rightarrow z^p$, и в этом пределе мы воспроизводим результаты работы [3], относящиеся к шестивершинной модели.

Найденная R -матрица $R^{(n,m)}$ в контексте статистических моделей на решетке может интерпретироваться как статистический вес вершины для модели, для которой состояние горизонтального ребра может

принимать $(n+1)$ различное значение, а состояние вертикального ребра — $(m+1)$. Алгебраические соотношения, которые возникают в семивершинной модели, являются еще одной нестандартной деформацией алгебры $su(2)$ [2, 5, 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи*. М., Наука, 1992.
2. D. Chicherin, V. Spiridonov, *The hyperbolic modular double and the Yang-Baxter equation*. [arXiv:1511.00131](#).
3. D. Chicherin, S. Derkachov, V. Spiridonov, *From principal series to finite-dimensional solutions of the Yang-Baxter equation*. — SIGMA **12** (2016), 028.
4. A. Antonov, K. Hasegawa, A. Zabrodin, *On trigonometric intertwining vectors and non-dynamical R -matrix for the Ruijsenaars model*. [arXiv:hep-th/9704074](#).
5. A. Gorsky, A. Zabrodin, *Degenerations of Sklyanin algebra and Askey-Wilson polynomials*. — J. Phys. A: Math. Gen. **26** (1993), L635–L639.
6. I. V. Cherednik, *On a method of constructing factorized S -matrices in elementary functions*. — Teor. Mat. Fiz. **43**, No. 1 (1980), 117–119.
7. R. Baxter, *Exactly solved models of statistical mechanics*. Academic Press, 1982.
8. P. Kulish, E. Sklyanin, *Quantum spectral transform method. Recent developments*. — Lect. Notes in Physics **151** (1982), 61–119.
9. П. Кулиш, П. Рясиченко, *Алгебраический анзац Бете для семивершинной модели*. — Зап. науч. семин. ПОМИ **347** (2007), 178–186.
10. А. А. Столин, П. П. Кулиш, Е. В. Дамаскинский, *О построении универсального элемента скручивания*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **291** (2002), 228–244.

Valinevich P. A., Antonenko P. V. Universal R -matrix for the rational seven-vertex model.

Rational seven-vertex statistical model is considered. With the use of fusion procedure we find an explicit expression for the universal R -matrix of this model.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
С.-Петербург, Россия

E-mail: valinevich@pdmi.ras.ru

Поступило 29 ноября 2019 г.

Центр Перспективных Исследований,
Сколтех, Сколково, Россия

E-mail: palvladim@yandex.ru