Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 487, 2019 г.

Т. А. Болохов

СОБСТВЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ КВАНТОВОГО ГАМИЛЬТОНИАНА СВОБОДНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПОЛЯ

Введение

Метод вторичного квантования [1,2] является базисным механизмом построения квантовой теории поля с момента ее зарождения в первой половине XX века. Позднее, в реальных вычислениях элементов матриц рассеяния, широкое применение получила техника диаграмм Фейнмана, основанная на лагранжевом формализме классической теории. В отличие от этой техники, одно из преимуществ метода вторичного (канонического) квантования заключается в том, что он дает описание квантового оператора Гамильтона. Для корректно определенной квантовой системы этот оператор должен быть самосопряженным в некотором гильбертовом пространстве. Известные примеры систем с конечным числом измерений [3, 4] показывают, что после перенормировки и устранения сингулярностей, кандидат в гамильтониан может оказаться симметрическим, но не самосопряженным оператором свободной частицы на суженном пространстве состояний. Такой оператор может быть расширен (доопределен) до самосопряженного оператора, однако, эта процедура уже неоднозначна, так как требует введения параметра расширения (явление размерной трансмутации [4, 6]). Похожий пример, по-видимому, можно наблюдать и для систем, состоящих из бесконечного числа гармонических осцилляторов. Мы приведем аргументы, что квадратичная часть квантового гамильтониана свободного поперечного векторного поля

$$\mathcal{H}_0 = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big(-\frac{\delta}{\delta A_k(\vec{x})} \frac{\delta}{\delta A_j(\vec{x})} + \Delta A_j(\vec{x}) A_j(\vec{x}) \Big) d^3x, \quad \partial_k A_k = 0,$$

Ключевые слова: метод вторичного квантования, оператор Гамильтона, расширения квадратичных форм, оператор Лапласа, поперечное подпространство, поле Янга-Миллса.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 17-01-00283.

которая возникает в электродинамике или как результат перенормировки калибровочной теории, является предельным случаем самосопряженного расширения некоторого симметрического оператора, определенного на суженном пространстве состояний. Самосопряженные расширения общего вида при этом оказываются зависящими от параметра расширения и не обладают масштабной ковариантностью.

Ввиду отсутствия удовлетворительной техники определения скалярного произведения на пространстве функционалов, которые описывают состояния стационарной картины квантовой теории поля, мы не будем делать строгие утверждения о самосопряженности операторов. Вместо этого мы попытаемся предъявить вакуумное состояние таких операторов и его возбуждения (пространство Фока), как состояния, удовлетворяющие уравнениям для "собственных" функционалов и образующие иерархию рождения и уничтожения частиц. Естественно потребовать, чтобы такие уравнения совпадали с функциональными уравнениями

$$\mathcal{H}_0\Phi_{\sigma_n}(A) = \Lambda_{\sigma_n}\Phi_{\sigma_n}(A),$$

для собственных состояний гамильтониана $\mathcal{H}_0$, но при этом уравнения могут быть определены на множестве функционалов, удовлетворяющем другим условиям в окрестности "граничных" значений. В качестве таких предельных точек в конфигурационном пространстве, в окрестности которых задаются граничные условия нового пространства функционалов, будут выступать полевые конфигурации с сингулярностями вида

$$\vec{A}(x) \sim \frac{\vec{A}_0}{|x|}, \quad |x| \to 0, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3. \tag{1}$$

Тем самым, самосопряженные расширения теории будут зависеть от некоторой выделенной точки трехмерного пространства. При "включении" взаимодействия или самодействия такие расширения гамильтониана и связанные с ними состояния скорее всего оказываются неустойчивыми. Однако, их наличие может давать вклад в матрицу рассеяния как промежуточные состояния для частиц, взаимодействующих посредством поперечного поля.

В работе используются следующие обозначения для скалярных и векторных произведений векторов

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_jB_j, \quad (\vec{A}\times\vec{B})_n = \epsilon_{njk}A_jB_k, \quad j,k,n = 1,2,3,$$

а по повторяющимся индексам производится суммирование.

§1. Конечномерные примеры с сингулярным взаимодействием

В этой части мы опишем конечномерные примеры из квантовой механики, с тем, чтобы далее попытаться обобщить некоторые их свойста на бесконечномерный случай. Пусть

$$H_\varepsilon = \Delta + \varepsilon\delta(x) = -\sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \varepsilon\delta(x)$$

– оператор Гамильтона частицы в двух- или трех-мерном пространстве, которая взаимодействует с δ-потенциалом, сосредоточенным в начале координат. Гамильтониан H_ε не допускает корректного определения в виде замкнутого оператора в Гильбертовом пространстве. Однако, можно рассмотреть действие H_ε на множестве гладких функций, убывающих в начале координат вместе с производными. Такому действию соответствует симметрический оператор

$$H: \quad Hf(\vec{x}) = \Delta f(\vec{x}) = -\sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f(\vec{x}),$$

который, очевидно, не учитывает наличие потенциала $\varepsilon\delta(\vec{x})$. В сферических координатах в двумерном

$$\vec{x} = \vec{x}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} 0 \leqslant r, \\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi \end{array}$$

или трехмерном пространстве

$$\vec{x} = \vec{x}(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} 0 \leqslant r, \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi \end{array} \tag{2}$$

действие оператора H_0 выглядит следующим образом. Если скалярная функция $f(\vec{x})$ представляется в виде суммы сферических гармоник $e^{il\varphi}$ или $\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$ с коэффициентами, зависящими от радиальной переменной

$$f_2(\vec{x}) = f_2(\vec{x}(r,\varphi)) = \sum_{0\leqslant l} \frac{1}{\sqrt{r}} u_l(r) \frac{e^{il\varphi}}{\sqrt{2\pi}},$$

$$f_3(\vec{x}) = f_3(\vec{x}(r,\theta,\varphi)) = \sum_{0\leqslant |m| \leqslant l} \frac{1}{r} u_{lm}(r) \mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi),$$

то соответствующая операция Δ применяется к ней следующим образом

$$\Delta f_2(\vec{x}) = \sum_{0\leqslant l} \frac{1}{\sqrt{r}} T_{l-\frac{1}{2}} u_l(r) \frac{e^{il\varphi}}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\Delta f_3(\vec{x}) = \sum_{0\leqslant |m|\leqslant l} \frac{1}{r} T_l u_{lm}(r) \mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi),$$

где

$$T_l = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}, \tag{3}$$

$$T_l^{-1}(r,s) = \frac{1}{2l+1}\Big(\frac{s^{l+1}}{r^l}\theta(r-s) + \frac{r^{l+1}}{s^l}\theta(s-r)\Big). \tag{4}$$

При этом скалярное произведение

$$(f,g)_{\mathbb{R}^2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \overline{f(\vec{x})} g(\vec{x})\, d^2x, \quad (f,g)_{\mathbb{R}^3} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{f(\vec{x})} g(\vec{x})\, d^3x,$$

ввиду ортонормированности наборов сферических гармоник, переносится на коэффициентные функции $u(r)$ как скалярное произведение на полуоси

$$(u,v) = \int\limits_0^\infty \overline{u(r)} v(r)\, dr. \tag{5}$$

Операторы $T_{l-\frac{1}{2}}$ и T_l, определенные на множестве гладких функций, исчезающих в нуле вместе с производными, самосопряжены в существенном в скалярном произведении (5) при $l \geqslant 1$. В то же время, операторы $T_{-\frac{1}{2}}$, T_0 на таком множестве являются симметрическими операторами с индексами дефекта $(1,1)$. Их самосопряженные расширения $T^\kappa_{-\frac{1}{2}}$, T^κ_0 имеют собственные функции непрерывного спектра вида

$$v_\lambda(r) = \sqrt{\lambda r}(\alpha_{v\lambda} J_0(\lambda r) + \beta_{v\lambda} Y_0(\lambda r)), \quad T^\kappa_{-\frac{1}{2}} v_\lambda = \lambda^2 v_\lambda$$

$$u_\lambda(r) = \alpha_{u\lambda} \sin\lambda r + \beta_{u\lambda}\cos\lambda r, \quad T^\kappa_0 u_\lambda = \lambda^2 u_\lambda$$

$$\alpha_{\{u,v\}\lambda} = \alpha_{\{u,v\}}(\lambda,\kappa), \quad \beta_{\{u,v\}\lambda} = \beta_{\{u,v\}}(\lambda,\kappa),$$

плюс, возможно, собственные функции дискретного спектра. При этом действие расширений $T^\kappa_{-\frac{1}{2}}$, T^κ_0 совпадает с соответствующей дифференциальной операцией $T_{-\frac{1}{2}}$ или T_0.

Таким образом, переходя обратно к декартовым координатам, симметрические операторы H могут быть расширены до самосопряженных операторов H_2^κ, H_3^κ, определенных на множестве функций, удовлетворяющих асимптотическому условию в начале координат

$$\lim_{r\to 0}\frac{f(\vec{x}(r))}{\ln r} = \kappa \lim_{r\to 0}\Big(f(\vec{x}(r)) - \lim_{r'\to 0}\frac{f(\vec{x}(r'))}{\ln r'}\ln r\Big), \qquad (6)$$

или

$$\lim_{r\to 0} r f(\vec{x}(r)) = -\kappa \lim_{r\to 0}\Big(1 + r\frac{\partial}{\partial r}\Big) f(\vec{x}(r)), \qquad (7)$$

(см. (3.43), (3.44) в [4]). Действие H_2^κ, H_3^κ, по-прежнему совпадает с суммой квадратов вторых производных Δ в соответствующем пространстве $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$.

Расширения H_2^κ, H_3^κ зависят от параметра κ, размерность которого обуславливается наличием размерности у оператора H: $[H] = [x]^{-2}$. С физической точки зрения можно сказать, что H_2^κ, H_3^κ является результатом перенормировки соответствующих операторов H_ε при $\varepsilon \to 0$. А наличие сингулярных функций с асимптотикой (6), (7) в начале координат в области определения является следом от перенормированного сингулярного взаимодействия $\varepsilon\delta(\vec{x})$. В случае частицы в двумерном пространстве имеет место явление размерной трансмутации – безразмерный параметр ε при перенормировке заменяется на размерный параметр κ [6].

В качестве другого примера можно рассмотреть операторы вида

$$\Delta + \frac{\varepsilon}{|x|^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\varepsilon}{|x|^2}, \qquad (8)$$

где ε – это безразмерный параметр. Такие операторы являются замкнутыми симметрическими операторами при конечных ε в некоторой окрестности нуля (при этом ε должен быть положителен в двумерном случае). При попытке построить функцию, удовлетворяющим уравнениям на собственное значение, видно, что увеличение расходимости "собственной" функции на $|x|^{-2}$ от действия потенциала сокращается с расходимостью от действия Лапласиана. И, таким образом, оператор (8) имеет альтернативный базис локально квадратично интегрируемых "собственных функций", ведущих себя как $|x|^{-\eta}$ в начале координат ($\eta = -\sqrt{\varepsilon}$ в двумерном случае и $\eta = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4\varepsilon})$ в трехмерном), то есть самосопряженные расширения (это очень математически нестрогое объяснение метода Фробениуса [7]). Можно увидеть, что эти расширения в пределе $\varepsilon \to 0$ непрерывно переходят в соответствующие операторы H_2^κ или H_3^κ.

§2. Трехмерная поперечная теория поля

С точки зрения теории операторов в гильбертовом пространстве, пример предыдущей части показывает, что сужение области определения оператора Δ до множества гладких функций, убывающих в нуле вместе с производными, приводит к симметрическому оператору и возникновению неоднозначности в определении гамильтониана системы. А взаимодействие, которое исчезает в результате перенормировки, служит лишь катализатором этой неоднозначности, так как оно выделяет точку в пространстве. В этой работе мы попытаемся обобщить уроки из конечномерного примера на случай теории поля. Мы не можем говорить о самосопряженности квантово-механических операторов в случае конфигурационного пространства с бесконечным числом измерений, так как в этом случае у нас нет возможности определить скалярное произведение на достаточно широком классе функционалов. Поэтому мы ограничимся рассмотрением неоднозначности в построении собственных векторов таких систем после перенормировки и приведем содержательный пример альтернативного набора из вакуумного и возбужденных состояний.

Рассмотрим следующую функцию Гамильтона

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \iint\limits_{\mathbb{R}^3} E_j(\vec{x}) P^\varepsilon_{kj}(\vec{x}', \vec{x}) P^\varepsilon_{kj'}(\vec{x}', \vec{y}) E_{j'}(\vec{y})\, d^3x\, d^3x'\, d^3y \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^3} \big((\partial_k A_j(\vec{x}))^2 + \varepsilon(A^3(\vec{x}) + \ldots)\big) d^3x. \quad (9)$$

где $A^a_k(x)$, $E^a_k(x)$ – поля координат и сопряженных к ним импульсов в трехмерном пространстве, удовлетворяющие условиям поперечности

$$\partial_k A^a_k = 0, \quad \partial_k E^a_k = 0. \quad (10)$$

Через $\varepsilon(A^3 + \ldots)$ обозначены однородные слагаемые старших порядков по координатам A^a_k размерности $[x]^{-4}$, которые также включают в себя взаимодействие. Матрица P^ε_{kj} является проектором с поперечной на ковариантно-поперечную проекцию поля

$$P^\varepsilon_{kj} = \delta_{kj} - \partial_k M^{-1}(\partial_j - \varepsilon A_j), \quad M = (\partial_j - \varepsilon A_j)\partial_j,$$

а ε – малый безразмерный параметр теории. Поля $A_k^a(x)$, $E_k^a(x)$ имеют также индекс внутренней симметрии a, по которому везде подразумевается суммирование. Действие ковариантной производной (и всех объектов, которые ее включают) может быть нетривиальными по этому индексу

$$(\partial_k - A_k)^{ab} B^b = \partial_k B^a - \varepsilon A_k^c t^{abc} B^b.$$

Далее мы будем рассматривать только квадратичные слагаемые, в которых нетривиальность действия по этому индексу низводится до суммирования. При условии ортогональности матриц t^{abc} при разных c, компоненты, соответствующие разным значениям верхнего индекса у поля $A_k^a(x)$, разделяются.

Реальный физический пример гамильтониана типа (9) приведен в третьей главе книги [8]. В самом деле, в формуле (2.5) приводится следующая плотность гамильтониана

$$h = \frac{1}{2}(E_k^a)^2 + \frac{1}{4}(\partial_k A_j^a - \partial_j A_k^a - \varepsilon[A_j, A_k]^a)^2, \tag{11}$$

где $\vec{A}(\vec{x})$ – поперечное поле, а на сопряженный импульс E_k^a наложено условие связи (2.41)

$$(\partial_k - \varepsilon A_k) E_k = 0. \tag{12}$$

После разделения импульса $\vec{E}(\vec{x})$ на продольную и поперечную компоненты

$$E_k = E_k^L + E_k^T, \quad \partial_k E_k^T = 0, \quad E_k^L = \partial_k \xi(\vec{x})$$

из условия (12) получаем, что

$$\begin{aligned} \xi(\vec{x}) &= -M^{-1}(\partial_l - \varepsilon A_l) E_l^T, \quad M = (\partial_j - \varepsilon A_j)\partial_j, \\ E_k &= \big(\delta_{kl} - \partial_k M^{-1}(\partial_l - \varepsilon A_l)\big) E_l^T, \end{aligned}$$

и плотность гамильтониана (11), с учетом интегрирования по частям, преобразуется к виду (9)

$$\begin{aligned} h = {}& \frac{1}{2}\big((\delta_{kl} - \partial_k M^{-1}(\partial_l - \varepsilon A_l))E_l^T\big)^2 + \frac{1}{2}\big(\partial_k A_j^a\big)^2 \\ &+ \varepsilon \partial_k A_j^a [A_j, A_k]^a + \frac{1}{2}\varepsilon^2([A_j, A_k]^a)^2. \end{aligned}$$

При проведении перенормировки $\varepsilon \to 0$ в гамильтониане (9) слагаемые старших порядков $\varepsilon(A^3 + \ldots)$ пропадают, а проектор P_{kj}^{ε} переходит в ортогональный проектор на поперечную составляющую

$$P_{kj}^{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} P_{kj} = \delta_{kj} - \partial_k \partial^{-2} \partial_j, \quad P_{kj}^T = P_{kj}, \quad P_{kn} P_{nj} = P_{kj}. \tag{13}$$

Однако, в общем случае существует разница междя результатом перенормировки $\mathcal{H}_{\rm ren}$ гамильтониана $\mathcal{H}_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ и первым членом $\mathcal{H}_0$ разложения $\mathcal{H}_\varepsilon$ по ε в окрестности нуля

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H}_0 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{\partial^n \mathcal{H}_\varepsilon}{\partial \varepsilon^n}\Big|_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon^n}{n!}. \tag{14}$$

Устранение расходимостей в гамильтониане $\mathcal{H}_\varepsilon$ требует введения параметров регуляризации, которые, в свою очередь, связаны с ε (см. пример с резольвентой в [5] или [6]). В результате некоторые или даже все слагаемые в разложении (14) могут остаться конечными даже при $\varepsilon = 0$ и перенормированный гамильтониан $\mathcal{H}_{\rm ren}$ окажется не равным $\mathcal{H}_0$. Мы предположим, что вклады этих конечных слагаемых таковы, что итоговый гамильтониан $\mathcal{H}_{\rm ren}$ только лишь приобретает новый набор собственных состояний, сохраняя при этом свое действие в виде $\mathcal{H}_0$. В предыдущей части мы видели, как это происходит в конечномерных примерах.

В самом деле, наше предположение состоит в том, что гамильтониан $\mathcal{H}_\varepsilon$ может через проектор P^ε_{kj} иметь сингулярности когда $A_k(x)$ ведет себя локально как $|x|^{-1}$. Такую же особенность имеют и однородные слагаемые старших порядков. По аналогии с примером (8), эти два типа особенностей могут сокращаться и, тем самым, давать для перенормированного квантового гамильтониана область определения с новыми граничными условиями и, соответственно, с другими спектральными свойствами.

Для того, чтобы это увидеть, рассмотрим действие квантового оператора Гамильтона $\mathcal{H}_0$ из (14) на функционалы $\Phi(A)$

$$\mathcal{H}_0\Phi(A) = -\iint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta}{\delta A_k(\vec{x})} P_{kj}(\vec{x},\vec{y}) \frac{\delta}{\delta A_j(\vec{y})} d^3x\, d^3y\, \Phi(A) + Q(A)\Phi(A). \tag{15}$$

Здесь P_{kj} – это проектор (13) на поперечное подпространство, а $Q(A)$ – это квадратичная форма оператора Лапласа Δ

$$Q(A) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} (\partial_k A_j(\vec{x}))^2 d^3x \tag{16}$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^3} A_j(\vec{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} A_j(\vec{x})\, d^3x = \int\limits_{\mathbb{R}^3} A_j(\vec{x}) \Delta A_j(\vec{x})\, d^3x. \tag{17}$$

Вакуумное состояние и n-частичные возбуждения оператора $\mathcal{H}_0$ далее строятся на основе гауссова функционала

$$\Phi_0(A) = \exp\Big\{-\frac{1}{2}(A, P\Delta^{\frac{1}{2}}PA)\Big\}, \tag{18}$$

$$\Phi_{\sigma_n}(A) = \iint \sigma_n^{j_1\dots j_n}(\vec{x}_1,\dots\vec{x}_n) b_{j_1}(\vec{x}_1)\dots b_{j_n}(\vec{x_n}) d^3x_1\dots d^3x_n \Phi_0(A),$$

где σ_n – симметричные функции, а

$$b_j = P_{jk}\Big(\frac{\delta}{\delta A_k} - \Delta_k^{\frac{1}{2}}\vec{A}\Big), \quad a_j = P_{jk}\Big(\frac{\delta}{\delta A_k} + \Delta_k^{\frac{1}{2}}\vec{A}\Big),$$

– соответствующие операторы рождения и уничтожения. При этом существенную роль играет тот факт, что проектор P коммутирует с оператором Δ, а значит и с любой его функцией, например, с $\Delta^{\frac{1}{2}}$.

Действие оператора $\mathcal{H}_0$ на функционалы Φ_{σ_n} недиагонально, однако, как несложно увидеть, оно оставляет инвариантными n-частичные подпространства. Для дальнейшей диагонализации необходимо перейти к спектральному представлению оператора Δ, что мы сделаем позже в рамках обобщенного подхода. Основная его идея заключается в построении альтернативной иерархии "собственных" состояний с помощью метода, который, по аналогии с методом вторичного квантования, может быть назван методом вторичных самосопряженных расширений.

2.1. Метод вторичных самосопряженных расширений. В случае, когда квантовый гамильтониан имеет вид (15), а положительная замкнутая квадратичная форма $Q(A)$ имеет нетривиальные расширения, возникает естественный способ построения альтернативного набора "собственных" состояний оператора $\mathcal{H}_0$.

Замкнутая полуограниченная квадратичная форма $Q(A)$ может быть задана с помощью замкнутого симметрического или самосопряженного оператора S естественной формулой

$$Q(A) = (A, SA) = (SA, A).$$

При этом область определения $\mathcal{D}_S$ оператора S содержится в области определения $\mathcal{D}_Q$ формы Q, а последняя, вообще говоря, существенно отличаться от $\mathcal{D}_S$ (Несложно увидеть, что для того, чтобы поле A из (17) попало в область определения оператора Δ, оно должно быть два раза дифференцируемым, в то время как существование интеграла в (16) требует наличия только первой производной у A). Если форма Q

полуограничена, то симметрический оператор S имеет самосопряженные расширения S_κ, одно из которых, расширение по Фридрихсу [9], также задает форму Q, а остальные (полуограниченные расширения) задают другие квадратичные формы Q_κ (общие сведения о квадратичных формах см. в разделе VIII.6 книги [10]). Эти квадратичные формы в некоторых случаях (в большинстве простых примеров) являются расширениями исходной формы

$$Q \subset Q_\kappa,$$

то есть область определения Q содержится в замыкании области определения Q_κ

$$\mathcal{D}_Q \subset \overline{\mathcal{D}}_{Q_\kappa},$$

и для всех векторов A из $\mathcal{D}_Q$ выполняется равентсво

$$Q(A) = Q_\kappa(A), \quad A \in \mathcal{D}_Q.$$

В частности, в работе [12] приведены сферически симметричные расширения квадратичной формы (16)

$$Q_\kappa(A) = \lim_{r\to 0}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_r} \big|\frac{\partial A_k}{\partial x_j}\big|^2 d^3x - \Big(\frac{5}{3r} + \frac{44}{27}\kappa\Big)\int\limits_{\partial B_r} |\vec{A}(\vec{x})|^2 d^2s\Big), \tag{19}$$

для поперечных векторов $\vec{A}(\vec{x})$ в скалярном произведении

$$(\vec{A},\vec{B})_{\mathbb{R}^3} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{A_j(\vec{x})} B_j(\vec{x})\, d^3x.$$

Здесь B_r – это шар радиуса r с центром в какой-либо выделенной точке. Для всех векторных полей, регулярных в этой точке (далее это будет начало координат), значение формы Q_κ, очевидно, совпадает со значением формы (16)

$$Q_\kappa(A) = Q(A) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big(\frac{\partial A_k}{\partial x_j}\Big)^2 d^3x.$$

Но в область определения формы Q_κ также попадают поля с сингулярностями вида (1) у трех поперечных компонет со значением момента вращения $l = 1$. Это происходит потому, что для таких полей сингулярности порядка r^{-1} объемного интеграла в (19) сокращаются с сингулярностями от интеграла по сфере. При этом область определения всех нетривиальных расширений Q_κ одинакова и не зависит от κ. Также отметим, что в формуле (19) коэффициент при размерном параметре κ может быть произвольным, значение $\frac{44}{27}$ выбрано для согласования с граничными условиями (29), которые будут введены позже.

Далее заметим, что мы можем требовать выполнения основных соотношений для "собственных" функционалов $\Phi_{\sigma_n}(A)$ оператора $\mathcal{H}_{\mathrm{ren}}$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ren}}\Phi_{\sigma_n}(A) = \Lambda_{\sigma_n}\Phi_{\sigma_n}(A)$$

только на области определения квадратичной формы $Q(A)$. Так как сингулярные поля вида (1) являются недопустимыми для слагаемых старших порядков неперенормированного гамильтониана $\mathcal{H}_\varepsilon$. Но на такой области эти соотношения будут выполнены и для квантового оператора с формой $Q_\kappa(A)$ на месте формы $Q(A)$. Форма $Q_\kappa(A)$ при извлечении квадратного корня и подстановке в гауссов функционал вида (18) дает принципиально другое вакуумное состояние и другой набор возбуждений, которые соответствуют другому оператору $\mathcal{H}^\kappa_{\mathrm{ren}} \neq \mathcal{H}_0$. Из этого можно сделать вывод, что оператор $\mathcal{H}_0$ является самосопряженным расширением некоторого симметрического оператора, заданного на множестве функционалов быстро убывающих вблизи граничных векторов с сингулярностями вида (1). Этот симметрический оператор имеет также другие расширения $\mathcal{H}^\kappa_{\mathrm{ren}}$, "собственные" состояния которых строятся с помощью квадратичной формы $Q_\kappa(A)$.

Следует заметить, что вместо выражений (19) в рамках рассматриваемого метода можно использовать любые другие расширения квадратичной формы (16), мы здесь просто рассмотрели уже готовый пример из работы [12]. Для более подробного описания этих состояний перейдем к сферическим координатам и выделим из полевых переменных подпространство с моментом вращения $l = 1$.

2.2. Векторные сферические гармоники и разделение переменных. С помощью скалярных сферических функций $\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$ введем три векторные сферические гармоники VSH [13]:

$$\begin{aligned}
\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega) &= \frac{\vec{x}}{r}\mathrm{Y}_{lm}, \quad 0 \leqslant l, \quad |m| \leqslant l,\\
\vec{\Psi}_{lm}(\Omega) &= \widetilde{l}^{-1} r\vec{\partial}\mathrm{Y}_{lm}, \quad 1 \leqslant l, \quad |m| \leqslant l, \quad \widetilde{l} = \sqrt{l(l+1)},\\
\vec{\Phi}_{lm}(\Omega) &= \widetilde{l}^{-1}(\vec{x}\times\vec{\partial})\mathrm{Y}_{lm}, \quad 1 \leqslant l, \quad |m| \leqslant l,
\end{aligned}$$

– функции угловых переменных $\Omega = (\theta, \varphi)$. Эти функции ортогональны друг другу при интегрировании по сфере и нормированы на единицу:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{S}^2} \overline{\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)}\vec{\Psi}_{l'm'}(\Omega)d\Omega = 0, \quad &&\int\limits_{\mathbb{S}^2} \overline{\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)}\vec{\Upsilon}_{l'm'}(\Omega)d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'},\\
&\int\limits_{\mathbb{S}^2} \overline{\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)}\vec{\Phi}_{l'm'}(\Omega)d\Omega = 0, \quad &&\int\limits_{\mathbb{S}^2} \overline{\vec{\Psi}_{lm}(\Omega)}\vec{\Psi}_{l'm'}(\Omega)d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'},\\
&\int\limits_{\mathbb{S}^2} \overline{\vec{\Phi}_{lm}(\Omega)}\vec{\Psi}_{l'm'}(\Omega)d\Omega = 0, \quad &&\int\limits_{\mathbb{S}^2} \overline{\vec{\Phi}_{lm}(\Omega)}\vec{\Phi}_{l'm'}(\Omega)d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'}.
\end{aligned}
$$

Векторные сферические гармоники позволяют написать однозначное представление векторной функции $\vec{A}(\vec{x})$ в виде трех сумм

$$
\vec{A}(\vec{x}) = \sum_{0\leqslant|m|\leqslant l} y_{lm}(r)\vec{\Upsilon}_{lm} + \sum_{l,m} \psi_{lm}(r)\vec{\Psi}_{lm} + \sum_{l,m} w_{lm}(r)\vec{\Phi}_{lm}. \tag{20}
$$

Для сокращения обозначений далее мы будем подразумевать что суммирование по индексам l, m ведется в пределах $1 \leqslant l$, $|m| \leqslant l$, если не указаны другие условия. Для каждой компоненты разложения (20) при действии оператора Δ имеет место разделение переменных

$$
\Delta\bigl(z(r)\vec{Z}_{lm}\bigr) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}z(r)\vec{Z}_{lm} + \frac{z(r)}{r^2}\Delta_\Omega\vec{Z}_{lm}, \quad \vec{Z} = \vec{\Upsilon}, \vec{\Psi}, \vec{\Phi}.
$$

Действие сферического лапласиана Δ_Ω на VSH недиагонально (при $l \geqslant 1$), но при вышеуказанной нормировке оказывается симметричным:

$$
\begin{aligned}
\Delta_\Omega\vec{\Upsilon}_{lm} &= (2 + \tilde{l}^2)\vec{\Upsilon}_{lm} - 2\tilde{l}\vec{\Psi}_{lm},\\
\Delta_\Omega\vec{\Psi}_{lm} &= -2\tilde{l}\vec{\Upsilon}_{lm} + \tilde{l}^2\vec{\Psi}_{lm},\\
\Delta_\Omega\vec{\Phi}_{lm} &= \tilde{l}^2\vec{\Phi}_{lm}.
\end{aligned}
$$

Если на векторную функцию $\vec{A}(\vec{x})$ наложить условия поперечности (10), то она будет параметризоваться уже не тремя, как в (20), а двумя наборами функций $u_{lm}(r)$, $w_{lm}(r)$:

$$
\vec{A}(\vec{x}) = \sum_{l,m}\Bigl(\tilde{l}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm} + \frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm} + \frac{w_{lm}}{r}\vec{\Phi}_{lm}\Bigr). \tag{21}
$$

Первые два слагаемые под знаком суммы по отдельности не поперечны, однако, при объединении они становятся таковыми:

$$\begin{aligned}\vec{\partial}\cdot\Big(\tilde{l}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm}+\frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}\Big) \qquad (22)\\ =\tilde{l}\Upsilon_{lm}\Big(\Big(\frac{u'_{lm}}{r^2}-\frac{2u_{lm}}{r^3}\Big)\frac{\vec{x}}{r}\cdot\frac{\vec{x}}{r}+\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\partial}\cdot\frac{\vec{x}}{r}\Big)+\tilde{l}^{-1}u'_{lm}\vec{\partial}\cdot\vec{\partial}\Upsilon_{lm}=0.\end{aligned}$$

Действие квадратичной формы оператора Лапласа на поперечное поле $\vec{A}(\vec{x})$ в терминах новых переменных $u_{lm}(r)$, $w_{lm}(r)$ выглядит следующим образом (см. формулы в [14]):

$$Q(A)=\int\limits_{\mathbb{R}^3}A_j(\vec{x})\Delta A_j(\vec{x})\,d^3x=\sum_{l,m}\langle u_{lm},\breve{T}_l u_{lm}\rangle_l+\sum_{l,m}(w_{lm},\breve{T}_l w_{lm}),$$

где $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_l$ – это скалярное произведение, перенесенное из пространства $\mathbb{R}^3$

$$\langle u,v\rangle_l=\int\limits_0^\infty\Big(\overline{u'(r)}v'(r)+\frac{l(l+1)}{r^2}\overline{u(r)}v(r)\Big)dr,\quad u(0)=v(0)=0, \qquad (23)$$

а радиальная часть оператора Лапласа $\breve{T}_l$ и скаларное произведение $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ были определены в (3) и (5). Здесь мы пока предполагаем, что функции $u_{lm}(r)$, $w_{lm}(r)$ достаточно гладкие и быстро убывают в начале координат. Удивительный факт, существенно облегчающий вычисления, состоит в том, что произведение (23) при таких условиях может быть задано как полуторалинейная форма операции T_l в скалярном произведении $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$

$$\langle u,v\rangle_l=\int\limits_0^\infty\overline{u(r)}\Big(-\frac{d^2}{dr^2}v(r)+\frac{l(l+1)}{r^2}v(r)\Big)dr=(u,T_lv). \qquad (24)$$

Для того, чтобы не путать дифференциальную операцию T_l, идущую от скалярного произведения, и радиальную часть оператора Лапласа, здесь и далее мы будем обозначать последнюю как $\breve{T}_l$.

Кинетическое слагаемое в гамильтониане (15) можно переписать в следующем виде

$$-\iint\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\delta}{\delta A_k(\vec{x})}P_{kj}(\vec{x},\vec{y})\frac{\delta}{\delta A_j(\vec{x})}\,d^3x\,d^3y$$

$$= -\iint \Big(\frac{\delta}{\delta w_{l'm'}(r')} \frac{\delta w_{l'm'}(r')}{\delta A_k(\vec{x})} + \frac{\delta}{\delta u_{l'm'}(r')} \frac{\delta u_{l'm'}(r')}{\delta A_k(\vec{x})} \Big) P_{kj}(\vec{x},\vec{y})$$

$$\times \Big(\frac{\delta w_{lm}(r)}{\delta A_j(\vec{y})} \frac{\delta}{\delta w_{lm}(r)} + \frac{\delta u_{lm}(r)}{\delta A_j(\vec{y})} \frac{\delta}{\delta u_{lm}(r)} \Big) dr\, dr'\, d^3x\, d^3y. \quad (25)$$

Для того, чтобы проектор $P_{kj}(\vec{x},\vec{y})$

$$P(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{l,m} \Big(\frac{\widetilde{l}}{s} \vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega) - \frac{\partial}{\partial s} \vec{\Psi}_{lm}(\Omega) \Big) T_l^{-1}(s,r) \Big(\frac{\widetilde{l}}{r} \overline{\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega')} + \frac{\partial}{\partial r} \overline{\vec{\Psi}_{lm}(\Omega')} \Big)$$

$$+ \sum_{l,m} s^{-1} \vec{\Phi}_{lm}(\Omega) \delta(s-r) \overline{\vec{\Phi}_{lm}(\Omega')} r^{-1},$$

$$\vec{x} = (s,\Omega), \quad \vec{y} = (r,\Omega')$$

действовал на поперечные функции как единичный оператор, выберем следующую параметризацию новых переменных (u_{lm}, w_{lm}) через $\vec{A}$:

$$w_{lm}(r) = r \int d\Omega \overline{\vec{\Phi}_{lm}(\Omega)} \cdot \vec{A}(r,\Omega) = \frac{1}{r} \int d^3x \delta(r-s) \overline{\vec{\Phi}_{lm}(\Omega)} \cdot \vec{A}(\vec{x}), \quad (26)$$

$$u_{lm}(r) = \int ds T_l^{-1}(r,s) \int d\Omega \big(\widetilde{l} \overline{\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)} - \frac{\partial}{\partial s} s \overline{\vec{\Psi}_{lm}(\Omega)} \big) \cdot \vec{A}(s,\Omega)$$

$$= \int d^3x \Big(\frac{\widetilde{l}}{s^2} T_l^{-1}(r,s) \overline{\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)} + \frac{1}{s} \Big(\frac{\partial}{\partial s} T_l^{-1}(r,s) \Big) \overline{\vec{\Psi}_{lm}(\Omega)} \Big) \cdot \vec{A}(\vec{x}), \quad (27)$$

где опять $\vec{x} = \vec{x}(s,\Omega)$, а T_l^{-1} определен в (4). Несложно увидеть, что эти выражения восстанавливают поля $u_{lm}(r)$, $w_{lm}(r)$ из $\vec{A}(\vec{x})$, представленного в виде (21), и, в то же время, они обнуляются на любой продольной составляющей

$$\vec{A}^L(\vec{x}) = \sum_{0 \leqslant |m| \leqslant l} \big(v'_{lm}(r) \vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega) + \frac{\widetilde{l}}{r} v_{lm}(r) \vec{\Psi}_{lm}(\Omega) \big).$$

Далее подставим вариации $\frac{\delta w_{lm}}{\delta A}$, $\frac{\delta u_{lm}}{\delta A}$, вычисленные из (26), (27), в (25) и получим

$$-\int dr dr' d^3x \bigg(\frac{\delta}{\delta w_{l'm'}(r')} \vec{\Phi}_{l'm'}(\Omega) \frac{\delta(r'-s)}{r'} \cdot \frac{\delta(s-r)}{r} \overline{\vec{\Phi}_{lm}(\Omega)} \frac{\delta}{\delta w_{lm}(r)}$$

$$+ \frac{\delta}{\delta u_{l'm'}(r')} \Big(\frac{\widetilde{l}}{s^2} T_{l'}^{-1}(r',s) \vec{\Upsilon}_{l'm'}(\Omega) + \frac{1}{s} \Big(\frac{\partial}{\partial s} T_{l'}^{-1}(r',s) \Big) \vec{\Psi}_{l'm'}(\Omega) \Big)$$

$$
\times \Big(\frac{\widetilde{l}}{s^2}T_l^{-1}(s,r)\overline{\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)} + \frac{1}{s}(\frac{\partial}{\partial s}T_l^{-1}(s,r))\overline{\vec{\Psi}_{lm}(\Omega)}\Big)\frac{\delta}{\delta u_{lm}(r)}\Big)
$$

$$
= -\int dr\, \frac{\delta}{\delta w_{lm}(r)}\frac{\partial}{\partial w_{lm}(r)}
$$

$$
- \int dr'\, ds\, dr'\, \frac{\delta}{\delta u_{lm}(r')}T_l^{-1}(r',s)\Big(-\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{\widetilde{l}^2}{s^2}\Big)T_l^{-1}(s,r)\frac{\delta}{\delta u_{lm}(r)},
$$

здесь мы сразу опустили перекрестные слагаемые между u и w, которые зануляются ввиду ортогональности VSH. В последнем слагаемом действие T_l^{-1} на T_l дает δ-функцию, в результате чего одно интегрирование снимается. Тут стоит отметить, что появление коэффициента $T_l^{-1}(r,s)$ при квадрате сопряженных "импульсов" (то есть в кинетической части гамильтониана) является естественным, если "координатная" переменная $u_l(r)$ измеряется скалярным произведением (24) с операцией T_l.

Суммируя преобразованные кинетическую и потенциальную части получим следующее выражение для гамильтониана (15) в новых переменных

$$
\mathcal{H}_0 = \sum_{l,m}\Big(-\int\limits_0^\infty dr \frac{\delta}{\delta w_{lm}(r)}\frac{\delta}{\delta w_{lm}(r)} + (w_{lm}, \check{T}_l w_{lm})\Big)
$$

$$
+ \sum_{l,m}\Big(-\iint_0^\infty dr dr' \frac{\delta}{\delta u_{lm}(r')}T_l^{-1}(r',r)\frac{\delta}{\delta u_{lm}(r)} + \langle u_{lm}, \check{T}_l u_{lm}\rangle_l\Big).
$$

Как и следовало ожидать, переменные w_{lm}, u_{lm} разделяются при всех l и m, а вакуумные состояния и возбуждения такого гамильтониана можно искать в виде произведений состояний гамильтонианов

$$
\mathcal{H}_{lm} = -\iint\limits_0^\infty dr dr' \frac{\delta}{\delta u_{lm}(r')}T_l^{-1}(r',r)\frac{\delta}{\delta u_{lm}(r)} + \langle u_{lm}, \check{T}_l u_{lm}\rangle_l
$$

и

$$
\mathcal{H}'_{lm} = -\int\limits_0^\infty dr \frac{\delta}{\delta w_{lm}(r)}\frac{\delta}{\delta w_{lm}(r)} + (w_{lm}, \check{T}_l w_{lm}).
$$

Гамильтонианы $\mathcal{H}'_{lm}$ представляют из себя операторы, которые получаются при переходе к сферическим координатам и разделении переменных для свободного скалярного поля при $l \geqslant 1$. Их собственные векторы, по-видимому определены однозначно, поэтому мы не будем на них останавливаться и далее сосредоточимся только на операторах $\mathcal{H}_{lm}$.

2.3. Расширения квадратичной формы оператора $\breve{T}_1$. В работе [12] показывается, что операторы $\breve{T}_1$ в скалярном произведении $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ являются симметрическими операторами с индексами дефекта $(1,1)$. Такие операторы имеют нетривиальные самосопряженные расширения, которые действуют как смешанные выражения

$$\breve{T}_\kappa u(r) = Tu(r) - \frac{2}{r}u'(0) = -\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{2}{r^2}u(r) - \frac{2}{r}u'(0) \tag{28}$$

на областях определения

$$\mathcal{D}^\kappa = \{u(r):\ \langle u,u\rangle_1 < \infty,\ \langle \breve{T}_{1\kappa}u,\ \breve{T}_{1\kappa}u\rangle_1 < \infty,\ 3u''(0) = 4u'(0)\}. \tag{29}$$

Операторы $\breve{T}_{1\kappa}$ имеют однократный непрерывный спектр, занимающий нетрицательную полуось, которому соответствуют “собственные” функции (ядро спектрального преобразования)

$$p^\kappa_{1\lambda}(r) = \frac{2r}{\sqrt{2\pi}\lambda^2}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}(\cos(\zeta+\lambda r) - \cos\zeta),$$

где фазовый сдвиг ζ определен как

$$e^{2i\zeta} = \frac{\lambda - i\kappa}{\lambda + i\kappa}.$$

При $\kappa < 0$ оператор $\breve{T}_\kappa$ имеет однократное собственное значение $-\kappa$ (дискретный спектр) и собственную функцию

$$q(r) = q_\kappa(r) = \sqrt{-\frac{2}{\kappa^3}}\Big(\kappa e^{\kappa r} + \frac{1-e^{\kappa r}}{r}\Big).$$

Для набора $\{p^\kappa_{1\lambda}, q\}$ выполнены условия ортогональности

$$\langle p^\kappa_{1\lambda}, p^\kappa_{1\mu}\rangle_1 = \delta(\lambda-\mu), \quad \langle p^\kappa_{1\lambda}, q\rangle_1 = 0, \quad \langle q,q\rangle_1 = 1$$

и полноты

$$\int\limits_0^\infty p^\kappa_{1\lambda}(r)T^s_1 p^\kappa_{1\lambda}(s)\,d\lambda + q(r)T^s_1 q(s)\big|_{\kappa<0} = \delta(r-s),$$

здесь индекс s у дифференциальной операции T^s_1 подчеркивает, что она действует на переменную s. Операторы $\breve{T}_{1\kappa}$ порождают расширения $\langle u, \breve{T}_{1\kappa}u\rangle_1$ квадратичных форм из потенциальной части гамильтонианов $\mathcal{H}_{1m}$. Исходная форма $\langle u, \breve{T}_1 u\rangle_1$ задается на множестве два раза дифференцируемых функций, исчезающих в нуле вместе с первой производной

$$\mathcal{W}_0^2 = \{u(r) :\ \langle u, u\rangle_1 < \infty,\ \langle u, \check{T}_1 u\rangle_1 < \infty,\ u(0) = u'(0) = 0\},$$

которое соответствует один раз дифференцируемым полям

$$\vec{A}(\vec{x}) = \sqrt{2}\frac{u_{1m}(r)}{r^2}\vec{\Upsilon}_{1m}(\theta,\varphi) + \frac{u'_{1m}(r)}{r}\vec{\Psi}_{1m}(\theta,\varphi), \tag{30}$$

регулярным в начале координат. Расширенные формы $\langle u, \check{T}_{1\kappa} u\rangle_1$ определены на множестве функций с произвольным ограниченным значением производной в нуле

$$\mathcal{W}_1^2 = \big\{u(r) :\ \langle u, u\rangle_1 < \infty,\ \langle u, \check{T}_{1\kappa} u\rangle_1 < \infty,\ u(0) = 0\big\}.$$

Очевидно, что на множестве $\mathcal{W}_0^2$ выполняется равество

$$\langle u, \check{T}_{1\kappa} u\rangle_1 = \langle u, \check{T}_1 u\rangle_1, \quad u \in \mathcal{W}_0^2,$$

так как последнее слагаемое в (28) исчезает. Мы не будем приводить симметричное предельное выражение для расширенных форм типа (19), и сразу запишем спектральное разложение

$$\langle u, \check{T}_{1\kappa} u\rangle_1 = \int\int_0^\infty Q_\kappa(r,s) T_1^r \overline{u(r)} T_1^s u(s)\, dr\, ds,$$

где

$$Q_\kappa(r,s) = \int_0^\infty p_{1\lambda}^\kappa(r) p_{1\lambda}^\kappa(s) \lambda^2\, d\lambda - \kappa^2 T_1^r q(r) T_1^s q(s)\big|_{\kappa<0},$$

а второе слагаемое присутствует только при $\kappa < 0$.

В заключение части стоит отметить, что форма $\langle u, \check{T}_1 u\rangle_1$ является частным случаем формы $\langle u, \check{T}_{1\kappa} u\rangle_1$, который соответствует значению $\kappa = \infty$ (то есть формой расширения по Фридрихсу симметрического оператора $\check{T}_1$). С точки зрения спектральных свойств этих форм, можно увидеть, что сферическая функция Бесселя

$$p_{1\lambda}(r) = \frac{2r}{\sqrt{2\pi}\lambda^2}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\sin\lambda r,$$

которая входит в параметризацию несингулярного поперечного поля (30), является предельным случаем функции $p_{1\lambda}^\kappa$

$$p_{1,\lambda}(r) = \lim_{\kappa\to\infty} \frac{2r}{\sqrt{2\pi}\lambda^2}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}(\cos(\zeta+\lambda r) - \cos\zeta), \quad \zeta(\kappa) \to -\frac{\pi}{2}.$$

2.4. Собственные состояния гамильтониана при $l = 1$**.** Полученное в предыдущей части спектральное разложение позволяет теперь записать гауссов функционал $\phi_0^\kappa(u)$ для расширенного квантового оператора

$$\mathcal{H}_{1m}^\kappa = -\int\int_0^\infty drds\frac{\delta}{\delta u(s)}T_1^{-1}(s,r)\frac{\delta}{\delta u(r)} + \langle u, \check{T}_{1\kappa}u\rangle_1$$

как экспоненту от интегрального оператора

$$\phi_0^\kappa(u) = \exp\Big\{-\frac{1}{2}\iint Q_\kappa^{\frac{1}{2}}(r,s)T_1^r u(r)T_1^s u(s)\,dr\,ds\Big\},$$

где

$$Q_\kappa^{\frac{1}{2}}(r,s) = \int p_{1\lambda}^\kappa(r)p_{1\lambda}^\kappa(s)\lambda\,d\lambda - i\kappa q(r)q(s)\big|_{\kappa<0}.$$

В этом выражении мы специально вынесли дифференциальные операции T_1^r, T_1^s для того, чтобы получить более гладкое ядро $Q_\kappa^{\frac{1}{2}}$. Несложно увидеть, что функционал ϕ_0^κ удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{H}_{1m}^\kappa\phi_0^\kappa(u) = \Lambda_0^\kappa\phi_0^\kappa(u), \quad \Lambda_0^\kappa = \int_0^\infty T_1^r Q_\kappa^{\frac{1}{2}}(r,r')|_{r=r'}dr$$

с некоторым бесконечным собственным значением Λ_0^κ. Для диагонализации оператора $\mathcal{H}_{1m}^\kappa$ перейдем к спектральному представлению квадратичной формы, то есть сделаем замену

$$\widehat{u}(\lambda) = \int_0^\infty p_{1\lambda}(r)T_1u(r)\,dr, \quad \widehat{u}_d = \int_0^\infty q(r)T_1u(r)\big|_{\kappa<0}$$

(заметим, что все функции здесь вещественные), тогда

$$\mathcal{H}_{1m}^\kappa = \int\Big(-\frac{\delta}{\delta\widehat{u}(\lambda)}\frac{\delta}{\delta\widehat{u}(\lambda)} + \lambda^2\widehat{u}^2(\lambda)\Big)d\lambda - \kappa^2\widehat{u}_d^2\big|_{\kappa<0}.$$

Такому квантовому гамильтониану соответствуют операторы рождения и уничтожения

$$\widehat{b}(\lambda) = \lambda\widehat{u}(\lambda) - \frac{\delta}{\delta\widehat{u}(\lambda)}, \quad \widehat{a}(\lambda) = \lambda\widehat{u}(\lambda) + \frac{\delta}{\delta\widehat{u}(\lambda)}$$

и вакуумное состояние

$$\widehat{\phi}_0(\widehat{u}) = \phi_0(u(\widehat{u})) = \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \widehat{u}^2(\lambda)\lambda\, d\lambda + \frac{i\kappa}{2}\widehat{u}_d^2\big|_{\kappa<0}\Big\}.$$

Собственные n-частичные состояния строятся как интегралы с коэффициентами Бозе-Эйнштейна $\sigma(\lambda_1, \dots \sigma_{\lambda_n})$

$$\widehat{\phi}_{\sigma_n}(\widehat{u}) = \iint \sigma_n(\lambda_1, \dots \lambda_n)\, \widehat{b}(\lambda_1)\dots \widehat{b}(\lambda_n)\, d\lambda_1 \dots d\lambda_n \widehat{\phi}_0(\widehat{u}), \tag{31}$$

и, кроме того, при $\kappa < 0$ есть еще состояния, связанные с возбуждениями точечного спектра.

2.5. Собственные состояния квантового гамильтониана свободного поперечного поля. Собственные состояния квантового гамильтониана $\mathcal{H}^\kappa_{\mathrm{ren}}$, в котором вместо квадратичной формы $Q(A)$ участвует ее расширение (19), строятся как произведения собственных состояний операторов $\mathcal{H}'_{lm}$, $1 \leqslant l, |m| \leqslant l$ $\mathcal{H}_{lm}$, $2 \leqslant l, |m| \leqslant l$ и $\mathcal{H}^\kappa_{1m}$. Для диагонализации первых двух наборов операторов можно использовать стандартное спектральное преобразование

$$\widehat{u}_{lm}(\lambda) = \int\limits_0^\infty p_{l\lambda}(r) T_l u_{lm}(r)\, dr, \quad \widehat{w}_{lm}(\lambda) = \int\limits_0^\infty \lambda p_{l\lambda}(r) w_{lm}(r)\, dr,$$

где $p_{l\lambda}(r)$ – это разновидность сферических функций Бесселя

$$p_{l\lambda}(r) = \frac{2r^l}{\sqrt{2\pi}\lambda^{l+1}}\Big(\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\Big)^l \sin\lambda r.$$

Соответствующие операторы рождения и уничтожения, а также вакуумные состояния выглядят следующим образом

$$\widehat{b}_{lm}(\lambda) = \lambda\widehat{u}_{lm}(\lambda) - \frac{\delta}{\delta\widehat{u}_{lm}(\lambda)}, \quad \widehat{a}_{lm}(\lambda) = \lambda\widehat{u}_{lm}(\lambda) + \frac{\delta}{\delta\widehat{u}_{lm}(\lambda)}$$

$$\widehat{b}'_{lm}(\lambda) = \lambda\widehat{w}_{lm}(\lambda) - \frac{\delta}{\delta\widehat{w}_{lm}(\lambda)}, \quad \widehat{a}'_{lm}(\lambda) = \lambda\widehat{w}_{lm}(\lambda) + \frac{\delta}{\delta\widehat{w}_{lm}(\lambda)},$$

$$\widehat{\phi}_0(\widehat{u}_{lm}) = \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \widehat{u}^2_{lm}(\lambda)\lambda\, d\lambda\Big\},$$

$$\widehat{\phi}'_0(\widehat{w}_{lm}) = \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \widehat{w}^2_{lm}(\lambda)\lambda\, d\lambda\Big\}.$$

Диагонализация гамильтониана $\mathcal{H}^\kappa_{1m}$ с помощью преобразования

$$\widehat{u}_{1m}(\lambda) = \int\limits_0^\infty p^\kappa_{1\lambda}(r) T_1 u_{1m}(r)\, dr,$$

была описана в предыдущей части. Здесь стоит отметить, что в сферически несимметричном случае коэффициенты κ могут быть разными для компонент, соответствующим разным значениям m проекции момента вращения на третью ось координат.

В результате, в переменных $\widehat{u}_{lm}$, $\widehat{w}_{lm}$ получаем гамильтониан

$$hat\mathcal{H}^\kappa_{\mathrm{ren}} = \sum_{-1\leqslant m\leqslant 1} \widehat{\mathcal{H}}^\kappa_{1m} + \sum_{2\leqslant l, |m|\leqslant l} \widehat{\mathcal{H}}_{lm} + \sum_{1\leqslant l, |m|\leqslant l} \widehat{\mathcal{H}}'_{lm},$$

вакуумное состояние

$$\Phi^\kappa_0 = \prod_{-1\leqslant m\leqslant 1} \phi_{1m}(\widehat{u}_{1m}) \times \prod_{2\leqslant l, |m|\leqslant l} \phi_{lm}(\widehat{u}_{lm}) \times \prod_{lm} \phi'_{lm}(\widehat{w}_{lm}),$$

а n-частичные состояния получаются из формулы (31) с помощью замены оператора рождения $\widehat{b}(\lambda)$ на $c(\lambda)$, который может принимать любое из значений $\widehat{b}_{lm}(\lambda)$, $\widehat{b}'_{lm}(\lambda)$, и $\widehat{\phi}_0$ на $\widehat{\Phi}^\kappa_0$

$$\widehat{\Phi}_{\sigma_n}(\widehat{u}) = \iint \sigma_n(\lambda_1, \dots \lambda_n)\, c(\lambda_1) \dots c(\lambda_n)\, d\lambda_1 \dots d\lambda_n \widehat{\phi}_0(\widehat{u}).$$

§3. Заключение и обсуждение

Мы построили систему наборов состояний, удовлетворяющих собственным уравнениям для квантового оператора Гамильтона свободного поперечного поля. Полученные наборы в общем случае зависят от выделенной точки пространства и не обладают масштабной инвариантностью (зависят от размерного параметра). Построение существенным образом использовало свойства расширений квадратичной формы оператора Лапласа, входящей в потенциальное слагаемое гамильтониана. Эти расширения могут быть записаны в “инвариантной” форме (19), которая, как и условие поперечности, не подразумевает переход к сферическим координатам и использование какой-либо выделенной функциональной параметризации типа (21). Здесь возникает естественный вопрос о возможности обобщения формы (19) на случай двух или нескольких выделенных точек пространства

$$Q_{\{\kappa\}}(A) = \lim_{r\to 0}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus\{B_{r,n}\}} \Big(\frac{\partial A_k}{\partial x_j}\Big)^2 d^3x - \sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{5}{3r}+\kappa_n\Big) \int\limits_{\partial B_{r,n}} |\vec{A}(\vec{x})|^2 d^2s\Big),$$

– удовлетворяет ли такая форма условиям теоремы VIII.15 из [10], соответствует ли ей самосопряженный оператор, можно ли вычислить его спектральное представление? Важные результаты в этом направлении были получены в работе [15], однако их применение к физической модели еще требует доработки.

Другим важным замечанием является то, что по-видимому представление физического объекта (поля взаимодействия) в виде векторной функции на трехмерном пространстве не является правильным способом описания задачи. Две функции с сингулярностями в разных точках, которые могут являться представлениями одного и того же физического объекта в разные моменты времени, не выражаются через общий базис, то есть не имеют общего представления через один ортогональный набор. И, таким образом, имеется существенное препятствие в описании возможной динамики классической системы.

Список литературы

1. P. A. M. Dirac, *Quantum theory of emission and absorption of radiation.* — Proc. Roy. Soc. Lond. A **114** (1927), 243.
2. C. M. Becchi, *Second quantization*, `doi:10.4249/scholarpedia.7902`, `http://www.scholarpedia.org/article/Second_quantization`
3. Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, *Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом.* — Докл. АН СССР **137**, No. 5 (1961), 1011–1014.
4. R. Jackiw, *Delta function potentials in two-dimensional and three-dimensional quantum mechanics.* — In: R. Jackiw, Diverse topics in theoretical and mathematical physics* 35–53 (1991).
5. L. D. Faddeev, *Mass in Quantum Yang-Mills Theory (comment on a Clay millenium problem).* — Bull. Brazil. Math. Soc., **33**, No. 2 (2002) 201–212.
6. Л. Д. Фаддеев, *Замечания о расходимостях и размерной трансмутации в теории Янга-Миллса.* — Теор. мат. физ. **148** (2006), 133.
7. Р. Д. Рихтмайер, *Принципы современной математической физики*, том 1, М., Мир 1982.
8. А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, М., Наука 1988.
9. K. Friedrichs, *Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren*, Math. Ann. **109** (1934), 465–487;

   M. Stone, in *Linear Transformations in Hilbert spaces and their Applications in*

Analysis, Amer. Math. Soc. Colloquium Publication **15**, Providence, R.I., 1932; or see theorem X.23 in [11].

10. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. 1. Функциональный анализ*, М., Мир 1977.
11. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. 2. Гармонический анализ и самосопряженность*, М., Мир 1978.
12. Т. А. Болохов, *Свойства радиальной части оператора Лапласа при l=1 в специальном скалярном произведении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **434** (2015).
13. B. F. Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge University Press 1982;
    E. L. Hill, *The Theory of Vector Spherical Harmonics*, Am. J. Phys. **22** (1954).
14. Т. А. Болохов, *Расширения квадратичной формы векторного поперечного оператора Лапласа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **433** (2015).
15. Т. А. Болохов, *Скалярные произведения для регулярных аналитических векторов оператора Лапласа в соленоидальном подпространстве.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **473** (2018).

Bolokhov T. A. Quantum Hamiltonian eigenstates for a free transverse field.

We demonstrate that quantum Hamiltonian operator for a free transverse field within the framework of the second quantization reveals an alternative set of states satisfying the eigenstate functional equations. The construction is based upon extensions of the quadratic form of the transverse Laplace operator which are used as a source of spherical basis functions with singularity at the origin. This basis then naturally takes place of the one of plane or spherical waves in the process of Fourrier or spherical variable separation.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: timur@pdmi.ras.ru

Поступило 26 ноября 2019 г.