

Н. М. Белоусов, С. Э. Деркачев

ПОЛНОТА ДЛЯ $3j$ -СИМВОЛОВ ГРУППЫ $SL(2, \mathbb{C})$

§1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о разложении тензорного произведения двух представлений основной унитарной серии на неприводимые была решена М. А. Наймарком в классической работе [5]. Как нам кажется, некоторые доказательства из работы М. А. Наймарка могут быть сделаны более простыми, чему и посвящена данная работа, которая носит в основном методический характер.

Проекторы на неприводимые представления, которые мы для краткости будем называть $3j$ -символами по аналогии с конечномерным случаем, могут быть реализованы в виде интегральных операторов. Таким образом, решение проблемы о разложении тензорного произведения на неприводимые сводится к решению трех проблем разной степени сложности:

- нахождение явного вида ядер интегральных операторов — проекторов на неприводимые представления;
- доказательство ортогональности проекторов;
- доказательство полноты полученной системы проекторов.

Самая простая проблема — нахождение ядер интегральных операторов. Соответствующие функции удовлетворяют системе уравнений, совпадающей с системой тождеств Уорда для трехточечной функции Грина в конформной теории поля [6]. Решение системы фиксируется однозначно с точностью до нормировки.

Следующая по сложности задача, доказательство ортогональности $3j$ -символов, допускает компактное и простое решение при помощи техники диаграмм Фейнмана [9].

Ключевые слова: теория представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$, $3j$ -символы, соотношение полноты, основная унитарная серия представлений, разложение тензорного произведения представлений.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект 19-11-00131).

В данной работе мы приведем, как нам кажется, простое решение третьей и самой сложной задачи — доказательство полноты $3j$ -символов (для четных дискретных частей параметров представлений). Нам приятно отметить, что основной метод — использование подходящего унитарного преобразования для упрощения задачи — аналогичен методу работы [10] и основан на идее Л. Д. Фаддеева.

Кроме того отметим, что в последнее время наблюдается возрождение интереса к исследованию бесконечномерных унитарных представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$ и связанных с ними вопросов теории специальных функций. Проблеме построения операторов Рака посвящены работы Р. С. Исмагилова [7, 8] и работа [9]. Исследованию новых интегральных тождеств и соответствующих специальных функций посвящены работа В. Ф. Молчанова и А. Ю. Неретина [11] и работы А. Ю. Неретина [12, 13].

§2. УНИТАРНАЯ СЕРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $SL(2, \mathbb{C})$

В этой части мы приведем основные формулы, относящиеся к унитарной серии представлений $SL(2, \mathbb{C})$ [1–3]. Представления реализуются в пространстве однозначных функций $\Phi(z, \bar{z})$ на комплексной плоскости. Матрице из группы $SL(2, \mathbb{C})$

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

ставится в соответствие линейный оператор $T^{(s, \bar{s})}$, который действует в этом пространстве функций и определяется следующим образом:

$$(T^{(s, \bar{s})}(g) \Phi)(z, \bar{z}) = (d - bz)^{2s} (\bar{d} - \bar{b}\bar{z})^{2\bar{s}} \Phi\left(\frac{-c + az}{d - bz}, \frac{-\bar{c} + \bar{a}\bar{z}}{\bar{d} - \bar{b}\bar{z}}\right).$$

Представления нумеруются параметрами $(s, \bar{s})$, которые в случае общего положения не являются комплексно-сопряженными друг другу, поскольку требование однозначности получившейся функции приводит только к ограничению на разности: $2s - 2\bar{s} \in \mathbb{Z}$. Мы будем использовать компактное обозначение

$$[z]^a \equiv z^a \bar{z}^{\bar{a}} = |z|^{2a} \bar{z}^{\bar{a}-a} = |z|^{2\bar{a}} z^{a-\bar{a}},$$

где $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ комплексно-сопряжены друг другу и $a - \bar{a} \in \mathbb{Z}$. При специальных значениях параметров представления

$$s = -\frac{1}{2} + \frac{n}{4} + \frac{i\sigma}{2}, \quad \bar{s} = -\frac{1}{2} - \frac{n}{4} + \frac{i\sigma}{2}; \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \sigma \in \mathbb{R} \quad (1)$$

операторы представления унитарны относительно стандартного скалярного произведения

$$\langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle = \int d^2 z \overline{\Phi_1(z, \bar{z})} \Phi_2(z, \bar{z}); \quad \langle T(g) \Phi_1 | T(g) \Phi_2 \rangle = \langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle,$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $d^2 z = dx dy$ и интегрирование ведётся по всей плоскости.

Представления, отвечающие параметрам $(s, \bar{s})$ и $(-1-s, -1-\bar{s})$, эквивалентны. Определяющее соотношение для оператора M , сплетающего эквивалентные представления $T^{(s, \bar{s})}$ и $T^{(-1-s, -1-\bar{s})}$, имеет вид

$$M(s, \bar{s}) T^{(s, \bar{s})}(g) = T^{(-1-s, -1-\bar{s})}(g) M(s, \bar{s}),$$

а решение дается следующей формулой [1, 2]

$$(M(s, \bar{s}) \Phi)(z, \bar{z}) = \frac{i^{-|2s-2\bar{s}|}}{\pi} \frac{\Gamma(s + \bar{s} + |s - \bar{s}| + 2)}{\Gamma(-s - \bar{s} + |s - \bar{s}| - 1)} \int d^2 w \frac{\Phi(w, \bar{w})}{[z - w]^{2s+2}}.$$

Сплетающий оператор хорошо определен для параметров s и $\bar{s}$ в общем положении, но, несмотря на появление расходимостей при дискретных значениях $2s = N$, $2\bar{s} = M$, $N, M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, его можно доопределить в этих точках благодаря специально подобранной нормировке.

§3. РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕНЗОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Представление $T^{(s_1, \bar{s}_1)} \otimes T^{(s_2, \bar{s}_2)}$ приводимо и раскладывается в прямой интеграл неприводимых

$$T^{(s_1, \bar{s}_1)} \otimes T^{(s_2, \bar{s}_2)} = \frac{1}{2} \int Ds \rho(s) T^{(s, \bar{s})},$$

где

$$\begin{aligned} \rho(s) &= -\frac{(2s+1)(2\bar{s}+1)}{4\pi^4}; \\ 2s+1 &= \frac{n}{2} + i\sigma; \\ 2\bar{s}+1 &= -\frac{n}{2} + i\sigma; \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \sigma \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Отметим, что $\rho(s)$ положительна, т. к. $(2s+1)(2\bar{s}+1) = -(n^2/4 + \sigma^2)$. Обозначение $\int Ds = \sum_n \int_{\mathbb{R}} d\sigma$ означает суммирование по n и интегрирование по σ . При этом суммирование по n идет либо только по четным, либо только по нечетным числам в зависимости от того, является ли сумма $n_1 + n_2$, соответственно, четной или нечетной. В силу эквивалентности представления $T^{(s, \bar{s})}$ и $T^{(-1-s, -1-\bar{s})}$ дают один и тот же вклад, так что суммирование по всем значениям допустимых параметров приводит к двойному счету. Решение задачи о разложении на неприводимые представления было получено М. А. Наймарком [5].

Проектор

$$T^{(s_1, \bar{s}_1)} \otimes T^{(s_2, \bar{s}_2)} \xrightarrow{P(s_1, s_2 | s)} T^{(s, \bar{s})}$$

записывается в виде интегрального оператора

$$\Phi(z_1, z_2) \xrightarrow{P(s_1, s_2 | s)} (P(s_1, s_2 | s) \Phi)(z) = \int d^2 z_1 d^2 z_2 W \left(\begin{smallmatrix} s_1, s_2, s \\ z_1, z_2, z \end{smallmatrix} \right) \Phi(z_1, z_2),$$

где ядро дается выражением

$$W \left(\begin{smallmatrix} s_1, s_2, s \\ z_1, z_2, z \end{smallmatrix} \right) = [z_2 - z_1]^{-2-s_1-s_2-s} [z - z_1]^{-s_1+s_2+s} [z_2 - z]^{s_1-s_2+s} \quad (2)$$

и с точностью до общей нормировки однозначно фиксируется требованием ковариантности. Показатели степеней λ в формуле (2) должны удовлетворять ограничению $\lambda - \bar{\lambda} \in \mathbb{Z}$. Это ограничение будет выполнено только при условии, что сумма $n_1 + n_2 + n$ — четное число, где целые числа n_1, n_2, n входят в определение спинов s_1, s_2, s (1).

$$w \xrightarrow{\alpha} z = [z - w]^{-\alpha} = (-1)^{\alpha - \bar{\alpha}} w \xleftarrow{\alpha} z$$

Рис. 1. Линия.

Мы будем использовать диаграммную технику и изображать ядра интегральных операторов при помощи диаграмм. Линия определяется формулой

$$\frac{1}{[z - w]^\alpha} \equiv \frac{1}{(z - w)^\alpha (\bar{z} - \bar{w})^{\bar{\alpha}}} = \frac{(\bar{z} - \bar{w})^{\alpha - \bar{\alpha}}}{|z - w|^{2\alpha}} = \frac{(-1)^{\alpha - \bar{\alpha}}}{[w - z]^\alpha},$$

где $\alpha - \bar{\alpha}$ — целое число, и изображается стрелкой с индексом α из точки w в точку z . Диаграммное представление ядра W в виде конформного треугольника показано на Рис. 2. Название “конформный

треугольник” заимствовано из конформной теории поля и связано с тем, что определяющие соотношения для функции W совпадают с системой тождеств Уорда для трехточечной функции Грина в двумерной конформной теории поля [6].

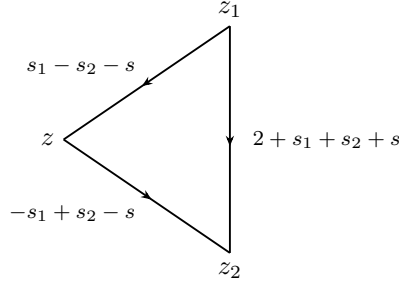


Рис. 2. Диаграммное представление для $3j$ -символа.

Для представлений унитарной серии комплексное сопряжение эквивалентно замене $s \rightarrow -1 - s$, так что:

$$\overline{W} \left(\begin{matrix} s_1, s_2, s \\ z_1, z_2, z \end{matrix} \right) \equiv \overline{W \left(\begin{matrix} s_1, s_2, s \\ z_1, z_2, z \end{matrix} \right)} = W \left(\begin{matrix} -1 - s_1, -1 - s_2, -1 - s \\ z_1, z_2, z \end{matrix} \right). \quad (3)$$

Ядро дуального проектора $T^{(s, \bar{s})} \xrightarrow{P(s|s_1, s_2)} T^{(s_1, \bar{s}_1)} \otimes T^{(s_2, \bar{s}_2)}$ определяется функцией (3)

$$\Phi(z) \xrightarrow{P(s|s_1, s_2)} (P(s|s_1, s_2) \Phi)(z_1, z_2) = \int d^2 z \overline{W \left(\begin{matrix} s_1, s_2, s \\ z_1, z_2, z \end{matrix} \right)} \Phi(z),$$

что можно показать с помощью соотношения ортогональности. Соотношение ортогональности для конформных треугольников имеет следующий вид

$$\begin{aligned} & \int d^2 z_1 d^2 z_2 \overline{W \left(\begin{matrix} s_1, s_2, s' \\ z_1, z_2, z' \end{matrix} \right)} W \left(\begin{matrix} s_1, s_2, s \\ z_1, z_2, z \end{matrix} \right) \\ &= \rho^{-1}(s) \delta(s - s') \delta^2(z - z') + B(s_1, s_2, s) \delta(s + s' + 1) [z - z']^{2s}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\rho(s) = -\frac{(2s+1)(2\bar{s}+1)}{4\pi^4}, \quad B(s_1, s_2, s) = 4\pi^3 \frac{a(s_2 - s_1 - s, 2s+2)}{a(1 + s_2 - s_1 + s)}.$$

Дельта-функции определяются естественным образом

$$\delta(s - s') = \delta_{nn'} \delta(\sigma - \sigma'), \quad \delta^2(z - z') = \delta(x - x') \delta(y - y').$$

Здесь, напомним,

$$2s + 1 = \frac{n}{2} + i\sigma, \quad 2s' + 1 = \frac{n'}{2} + i\sigma'; \quad z = x + iy, \quad z' = x' + iy'.$$

Функция $a(\alpha)$ выражается через гамма-функции

$$a(\alpha) = \frac{\Gamma(1 - \bar{\alpha})}{\Gamma(\alpha)}, \quad a(\alpha, \beta, \dots) \equiv a(\alpha)a(\beta)\dots,$$

и основные формулы, связанные с этой функцией, приведены в (15). Появление второго слагаемого в (4) является прямым следствием того факта, что представления $T^{(s, \bar{s})}$ и $T^{(-1-s, -1-\bar{s})}$ эквивалентны. Ядро сплетающего оператора имеет вид $[z - z']^{-2-2s}$ и одним из проявлений эквивалентности представлений является тождество

$$\int d^2 z' \frac{1}{[z - z']^{2+2s}} W \left(\begin{matrix} s_1, s_2, s \\ z_1, z_2, z' \end{matrix} \right) = A(s_1, s_2, s) W \left(\begin{matrix} s_1, s_2, -1-s \\ z_1, z_2, z \end{matrix} \right), \quad (5)$$

$$A(s_1, s_2, s) = \pi \frac{a(s_1 - s_2 - s, 2 + 2s)}{a(1 + s_1 - s_2 + s)},$$

которое легко доказывается при помощи соотношения звезда-треугольник (16). Применение соотношения (5) к (4) демонстрирует необходимость второго слагаемого с $s \rightarrow -1 - s$.

Соотношение полноты для конформных треугольников было получено в [5] и его форма зависит от четности дискретных параметров n_1, n_2 , определяющих спины s_1, s_2

$$\int Ds \frac{\rho(s)}{2} \int d^2 z \overline{W} \left(\begin{matrix} s_1, s_2, s \\ z'_1, z'_2, z \end{matrix} \right) W \left(\begin{matrix} s_1, s_2, s \\ z_1, z_2, z \end{matrix} \right) = \delta^2(z_1 - z'_1) \delta^2(z_2 - z'_2), \quad (6)$$

где $\int Ds = \sum_n \int_{\mathbb{R}} d\sigma$ означает суммирование по n и интегрирование по σ . Суммирование по n идет либо только по четным, либо только по нечетным числам в зависимости от того, является ли сумма $n_1 + n_2$, соответственно, четной или нечетной.

§4. СООТНОШЕНИЕ ПОЛНОТЫ

В этой части мы приведем новое доказательство соотношения полноты (6) для случая, когда сумма $n_1 + n_2$ четная. Первая идея: свести соотношение на исходные функции к соотношению полноты для более

простых функций. Точно такой же трюк был использован при доказательстве полноты для $3j$ -символов модулярного дубля $SL_q(2, \mathbb{R})$ [10]. В нашем случае более простыми функциями будут исходные $3j$ -символы, взятые при $s_1 = s_2 = -\frac{1}{2}$ (отметим, что с точки зрения эквивалентности представлений с параметрами s и $-1-s$, значение $-\frac{1}{2}$ оказывается выделенным).

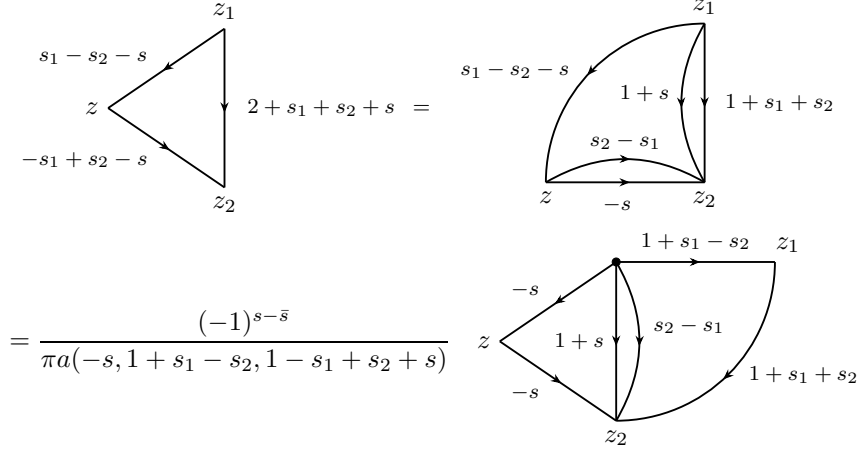


Рис. 3. Преобразование конформного треугольника.

На Рис. 3 показано, как в конформном треугольнике разделить зависимость от s_1, s_2 и s , воспользовавшись соотношением звезда-треугольник (16). Иначе говоря, чтобы получить $3j$ -символ с произвольными s_1, s_2 , нужно подействовать на символ с $s_1 = s_2 = -\frac{1}{2}$

$$W \left(\begin{matrix} s_1, s_2, s \\ z_1, z_2, z \end{matrix} \right) = \frac{(-1)^{s-\bar{s}}}{a(-s, 1 - s_1 + s_2 + s)} \times \int d^2 w U \left(\begin{matrix} s_1, s_2 \\ z_1, z_2, w \end{matrix} \right) W \left(\begin{matrix} -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, s \\ w, z_2, z \end{matrix} \right) \quad (7)$$

с помощью выделившегося справа треугольника

$$U \left(\begin{matrix} s_1, s_2 \\ z_1, z_2, w \end{matrix} \right) = \frac{1}{\pi a(1 + s_1 - s_2)} \times [z_2 - z_1]^{-1-s_1-s_2} [w - z_1]^{-1-s_1+s_2} [z_2 - w]^{s_1-s_2}. \quad (8)$$

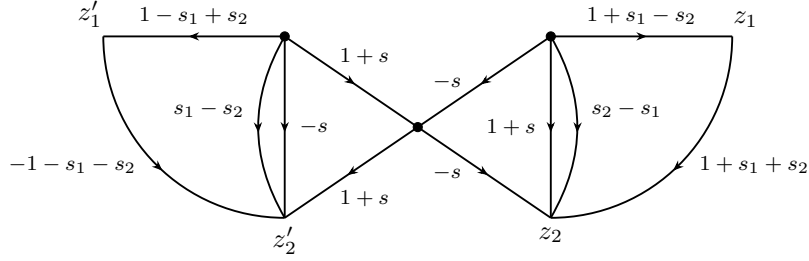


Рис. 4. 3j-символы из соотношения полноты.

Теперь нужно представить в таком виде 3j-символы в соотношении полноты (6). Заметим, что функции $a(\alpha)$ перед интегралом в (7) сокращаются со своими сопряженными

$$\overline{a(-s, 1 - s_1 + s_2 + s)} a(-s, 1 - s_1 + s_2 + s) = 1.$$

Вся зависимость от s_1, s_2 заключена в треугольнике (8) и точно таком же сопряженном ему (Рис. 4). В отсутствие 3j-символов их произведение даст дельта-функцию

$$\int d^2 w \overline{U \left(\begin{smallmatrix} s_1, s_2 \\ z'_1, z_2, w \end{smallmatrix} \right)} U \left(\begin{smallmatrix} s_1, s_2 \\ z_1, z_2, w \end{smallmatrix} \right) = \delta^2(z_1 - z'_1),$$

в чем можно убедиться, воспользовавшись формулой (14). В таком случае нам остается только показать, что

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\equiv \int Ds \frac{\rho(s)}{2} \int d^2 z \overline{W \left(\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, s \\ z'_1, z'_2, z \end{smallmatrix} \right)} W \left(\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, s \\ z_1, z_2, z \end{smallmatrix} \right) \\ &= \delta^2(z_1 - z'_1) \delta^2(z_2 - z'_2), \end{aligned} \quad (9)$$

где, как и раньше, $\int Ds = \sum_n \int_{\mathbb{R}} d\sigma$ и суммирование идет по четным n .

На первом шаге будем интегрировать по s . Мера интегрирования $\rho(s) = -\frac{1}{4\pi^4} [2s + 1]$ можно записать в том же виде, что и линии, с помощью вспомогательной комплексной переменной t

$$[2s + 1] = 4[\partial_t] \Big|_{t=1} [t]^{s+\frac{1}{2}}.$$

Здесь по аналогии с обычными переменными обозначено $[\partial_t] \equiv \partial_t \partial_{\bar{t}}$. Собирая под интегралом все множители с s , получим

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= -\frac{1}{2\pi^4} [\partial_t] \Big|_{t=1} \int d^2 z \frac{[t]^{\frac{1}{2}}}{[z_2 - z_1][z - z'_1][z'_2 - z]} \\ &\quad \times \int Ds \left[\frac{(z - z_1)(z_2 - z)(z'_2 - z'_1)}{(z_2 - z_1)(z - z'_1)(z'_2 - z)} t \right]^s \\ &= -\frac{2}{\pi^2} [\partial_t] \Big|_{t=1} \int d^2 z \frac{1}{[z - z_1][z - z'_1][z_2 - z][z'_2 - z]} \\ &\quad \times \delta^2 \left(\frac{(z'_2 - z'_1)t^{\frac{1}{2}}}{(z - z'_1)(z'_2 - z)} - \frac{(z_2 - z_1)t^{-\frac{1}{2}}}{(z - z_1)(z_2 - z)} \right). \end{aligned}$$

В последнем переходе мы воспользовались формулой

$$\int Ds \left[\frac{w}{v} \right]^s = (2\pi)^2 [v] \delta^2(w - v),$$

которая легко доказывается в полярных координатах $w/v = re^{i\varphi}$. Чтобы аккуратно взять производные по t и $\bar{t}$, напомним преобразование Фурье для дельта-функции через комплексные переменные

$$\delta^2(w) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 p e^{-ipw - i\bar{p}\bar{w}}, \quad (10)$$

где $p = p_x - ip_y$, $\bar{p} = p_x + ip_y$, $d^2 p = dp_x dp_y$. Тогда после взятия производных останется интеграл вида

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2\pi^4} \int d^2 z d^2 p [J(z, p)] e^{iS(z, p) + i\bar{S}(z, p)}. \quad (11)$$

Последний шаг: сделать замену переменной $(z, p) \rightarrow (p_1, p_2)$ так, чтобы в этом интеграле можно было распознать произведение дельта-функций (9). Подходящая замена дается формулами

$$p_1 = \frac{p}{(z - z_1)(z - z'_1)}, \quad p_2 = -\frac{p}{(z_2 - z)(z'_2 - z)}. \quad (12)$$

Заметим, что степень этого отображения равна двум (иначе говоря, двум разным точкам в старых координатах соответствует одна и та же точка в новых). Эту двойку нужно будет учесть, применяя формулу замены переменных. В старых и новых переменных показатель

экспоненты имеет вид

$$S(z, p) = p \frac{z_2 - z_1}{(z - z_1)(z_2 - z)} - p \frac{z'_2 - z'_1}{(z - z'_1)(z'_2 - z)} = p_1(z_1 - z'_1) + p_2(z_2 - z'_2),$$

а коэффициент перед экспонентой совпадает с якобианом перехода

$$\begin{aligned} J(z, p) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial p} & \frac{\partial p_1}{\partial z} \\ \frac{\partial p_2}{\partial p} & \frac{\partial p_2}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= p \frac{(z'_2 - z'_1)(z - z_1)(z - z_2) + (z_2 - z_1)(z - z'_1)(z - z'_2)}{(z - z_1)^2(z - z'_1)^2(z_2 - z)^2(z'_2 - z)^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, после замены переменных

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \frac{1}{\pi^4} \int d^2 p_1 d^2 p_2 e^{ip_1(z_1 - z'_1) + ip_2(z_2 - z'_2) + i\bar{p}_1(\bar{z}_1 - \bar{z}'_1) + i\bar{p}_2(\bar{z}_2 - \bar{z}'_2)} \\ &= \delta^2(z_1 - z'_1) \delta^2(z_2 - z'_2), \end{aligned}$$

где мы снова воспользовались представлением (10), и двойка перед интегралом в (11) сократилась со степенью отображения (12).

В заключение отметим, что в случае, когда сумма $n_1 + n_2$ нечетная, соотношение полноты (6) можно свести к соотношению на более простые функции с помощью точно такого же трюка (нужно только поправить преобразование (7), поскольку треугольник U в этом случае содержит неоднозначные функции: в линии $[z_2 - w]^{s_1 - s_2}$, например, разность степеней $s_1 - s_2 - (\bar{s}_1 - \bar{s}_2) = (n_1 - n_2)/2$ уже не будет целым числом). Однако в случае нечетной суммы доказательство соотношения для более простых функций не продолжается напрямую из доказательства, приведенного выше.

ПРИЛОЖЕНИЕ: ПРАВИЛА ДИАГРАММНОЙ ТЕХНИКИ

На протяжении статьи используется удобное графическое представление различных многократных двумерных интегралов при помощи диаграмм. Элементами диаграммной техники являются линии и вершины.

Линия с индексом α из точки w в точку z соответствует выражению

$$w \xrightarrow{\alpha} z = [z - w]^{-\alpha} = (-1)^{\alpha - \bar{\alpha}} w \xleftarrow{\alpha} z$$

где $\alpha - \bar{\alpha} \in \mathbb{Z}$. На том же самом рисунке показано правило обращения стрелки. Формула для преобразования Фурье [4]

$$\frac{1}{[z]^\alpha} = \frac{i^{\alpha - \bar{\alpha}} a(\alpha)}{\pi} \int d^2 p \frac{e^{-ipz - i\bar{p}\bar{z}}}{[p]^{1 - \alpha}}, \quad (13)$$

где

$$p = p_x - ip_y, \quad \bar{p} = p_x + ip_y, \quad d^2 p = dp_x dp_y,$$

и напомним, что функция $a(\alpha)$ определяется как

$$a(\alpha) = \frac{\Gamma(1 - \bar{\alpha})}{\Gamma(\alpha)}, \quad a(\bar{\alpha}) = \frac{\Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(\bar{\alpha})}, \quad a(\alpha, \beta, \gamma, \dots) \equiv a(\alpha)a(\beta)a(\gamma)\dots$$

С помощью преобразования Фурье (13) можно вывести полезную формулу:

$$\int d^2 w \frac{1}{[z - w]^{1 + \alpha} [z' - w]^{1 - \alpha}} = \pi^2 a(1 + \alpha, 1 - \bar{\alpha}) \delta^2(z - z'). \quad (14)$$

Приведем также основные формулы, связанные с функцией $a(\alpha)$,

$$\begin{aligned} a(\alpha)a(1 - \bar{\alpha}) &= 1, & \frac{a(1 + \alpha)}{a(\alpha)} &= -\frac{1}{\alpha\bar{\alpha}}, \\ a(\alpha)a(1 - \alpha) &= (-1)^{\alpha - \bar{\alpha}}, & a(\alpha) &= (-1)^{\alpha - \bar{\alpha}} a(\bar{\alpha}). \end{aligned} \quad (15)$$

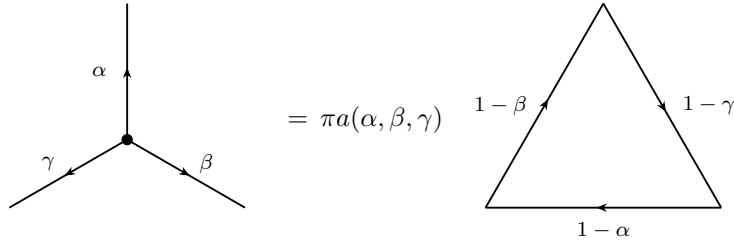


Рис. 5. Соотношение звезда-треугольник, $\alpha + \beta + \gamma = 2$.

Соотношение звезда-треугольник

$$\int d^2w \frac{1}{[z_1 - w]^\alpha [z_2 - w]^\beta [z_3 - w]^\gamma} = \frac{\pi a(\alpha, \beta, \gamma)}{[z_2 - z_1]^{1-\gamma} [z_1 - z_3]^{1-\beta} [z_3 - z_2]^{1-\alpha}}, \quad (16)$$

где $\alpha + \beta + \gamma = 2$ и $\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} = 2$. Это тождество изображено при помощи диаграмм на Рис. 5, где жирная точка в вершине означает, что по соответствующей координате вершины производится интегрирование.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. I. M. Gelfand, M. I. Graev, and N. Ya. Vilenkin, *Generalized functions*, Vol. 5, Academic Press, 1966.
2. I. M. Gelfand, M. A. Naimark, *Unitary representations of the classical groups*. — Trudy Mat. Inst. Steklov **36** (1950), 3–288.
3. М. А. Наймарк, *Теория представлений групп*. М., Наука, 1976.
4. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщённые функции. Вып. 1. Обобщённые функции и действия над ними*. М., Наука, 1959.
5. М. А. Naimark, *Decomposition of a tensor product of irreducible representations of the proper Lorentz group into irreducible representations*. — Tr. Mosk. Mat. Obs. **8** (1959), 121–153.
6. A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*. — Nucl. Phys. B **241**, No. 2 (1984), 333–380.
7. R. S. Ismagilov, *On Racah operators*. — Funktsional. Anal. Prilozhen. **40**, No. 3 (2006), 69–72.
8. R. S. Ismagilov, *Racah operators for principal series of representations of the group $SL(2, \mathbb{C})$* . — Mat. Sbornik **198**, No. 3 (2007), 77–90.
9. S. E. Derkachov, V. P. Spiridonov, *On the 6j-symbols for $SL(2, \mathbb{C})$ group*, [arXiv: 1711.07073](#).
10. S. E. Derkachov, L. D. Faddeev, *3j-symbol for the modular double $SL_q(2, \mathbb{R})$ revisited*, [arXiv: 1302.5400](#).
11. Vladimir F. Molchanov, Yu. A. Neretin, *A pair of commuting hypergeometric operators on the complex plane and bispectrality*, [arXiv: 1812.06766](#).
12. Yu. A. Neretin, *An analog of the Dougall formula and of the de Branges–Wilson integral*, [arXiv: 1812.07341](#).
13. Yu. A. Neretin, *Barnes–Ismagilov integrals and hypergeometric functions of the complex field*, [arXiv: 1910.10686](#).

Belousov N. M., Derkachov S. E. Completeness of the $3j$ -symbols for $SL(2, \mathbb{C})$ group.

The main formulas for the unitary series of representations of the group $SL(2, \mathbb{C})$ are given, and the decomposition of a tensor product of two representations into irreducible is considered. A simple proof of completeness of the $3j$ -symbols is given.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: belousovnikita.m@gmail.com
derkach@pdmi.ras.ru

Поступило 26 ноября 2019 г.