Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 486, 2019 г.

Б. П. Харламов

О ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧКИ ПЕРВОГО ВЫХОДА ДВУМЕРНОГО ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА С ОБРЫВОМ ИЗ МАЛОЙ КРУГОВОЙ ОКРЕСТНОСТИ ЕГО НАЧАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Введение. Рассматривается двумерный однородный диффузионный процесс с обрывом. Распределение плотности точки первого выхода такого процесса из произвольной окрестности нуля G как функция от начальной точки процесса $x \in G$ определяется эллиптическим дифференциальным уравнением второго порядка с частными производными и с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^{2} b_i D_1 u - cu = 0, \tag{1}$$

где D_i, D_{ij} – операторы частных производных первого и второго порядка по соответствующим аргументам функции u. Предполагается, что коэффициенты a_{ij} неотрицательны и, кроме того, матрица $[a_{ij}]$ – положительно определена, коэффициент c положителен; на коэффициенты b_i не накладывается никаких ограничений. Ясно, что при этих условиях существует замена переменных, преобразующая уравнение 1 в уравнение вида

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{2} A_i D_i u - Bu = 0, \tag{2}$$

где Δ – двумерный оператор Лапласа. Мы будем в дальнейшем называть такое уравнение возмущенным уравнением Лапласа.

Решение задачи Дирихле для возмущенного уравнения Лапласа. Пусть $H_G : C^0 \to C^0$ – оператор, определяемый для любой непрерывной функции ϕ и области G с гладкой границей ∂G условиями: $H_G(\phi|x)$ – решение задачи Дирихле для уравнения 1, если $x \in G$, и $H_G(\phi|x) = \phi(x)$, если $x \notin G$.

Ключевые слова: функция Грина, задача Дирихле, ядро Пуассона, интегральное уравнение, итерация.

Пусть $G_1 \subset G_2$. Тогда из единственности решения задачи Дирихле следует, что для любого $x \in G_1$

$$H_{G_2}(\phi|x) = H_{G_1}(H_{G_2}(\phi|\cdot)|x). \tag{3}$$

Мы будем называть это свойство обобщенным полугрупповым свойством семейства операторов H_G, а само это семейство обобщенной полугруппой операторов Дирихле.

Плотность распределения точки первого выхода. Теперь обратим внимание на момент первого выхода диффузионного процесса из окрестности G его начальной точки x. Пусть $h_G(x,y)$ – условная плотность распределения точки первого выхода процесса на границе области G. Из марковского свойства процесса относительно момента первого выхода следует уравнение

$$h_{G_2}(x,z) = \int_{\partial G_1} h_{G_1}(x,y) h_{G_2}(y,z) ds(y), \tag{4}$$

где $ds(y)$ – дифференциальный элемент границы. Пусть

$$h_G(\phi|x) = \int_{\partial G} h_G(x,y)\phi(y) ds(y). \tag{5}$$

Тогда очевидно, что справедливо обобщенно полугрупповое свойство семейства операторов (h_G) (с учетом естественного определения $h_G(\phi|x) = \phi(x)$ при $x \notin G$).

Это позволяет уточнить определение двумерного диффузионного процесса, соответствующего дифференциальному уравнению 1, а именно – это процесс, для которого обобщенная полугруппа операторов (h_G) является обобщенной полугруппой операторов Дирихле этого уравнения.

Заметим, что это определение допускает очевидное обобщение на любую конечную размерность $n > 2$, а также на любое эллиптическое дифференциальное уравнение, удовлетворяющее условию единственности решения задачи Дирихле.

Далее мы будем изучать свойства обобщенной полугруппы операторов Дирихле для двумерного возмущенного уравнения Лапласа.

Асимптотика плотности распределения точки первого выхода: достаточное условие. По примеру одномерного диффузионного процесса, для которого определена вероятность первого выхода из начальной точки на любую из двух граничных точек интервала значений процесса, мы будем искать необходимые и достаточные условия удовлетворения возмущенному уравнению Лапласа в терминах асимптотики плотности распределения точки первого выхода из малой круговой окрестности начальной точки процесса. По нашему предположению, эта асимптотика должна иметь вид плотности точки первого выхода двумерного винеровского процесса из круговой окрестности, искаженной постоянным сносом в направлении с углом θ и возможной остановкой процесса в этой окрестности. При нулевой начальной точке процесса эта плотность должна иметь вид

$$h_r(0,(r\cos\theta,r\sin\theta))=\frac{1}{2\pi r}\left[1+\alpha A_1 r\cos\theta+\alpha A_2 r\sin\theta+\beta r^2 B+o(r^2)\right], \tag{6}$$

где α и β – некоторые константы. Для дальнейших вычислений удобно представить r^2 в виде $r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta$.

Из уравнения (5) следует, что справедливо уравнение

$$h_G(\phi|0)=\int\limits_{\partial B_r} h_r(0,y)h_G(\phi|y)ds(y), \tag{7}$$

где $h_r\equiv h_{B_r}$, $B_r\subset G$ – круг радиуса r с центром в нуле В этом уравнении положим оператор h_r вида (6). Обозначим $F(y)\equiv h_G(\phi|y)$. Предположим, что эта функция дважды непрерывно дифференцируема и разлагается в двумерный ряд Тейлора в точке $y\in\partial B_r$

$$F(y)=F(0)+D_1F(0)y_1+D_2F(0)y_2+\frac{1}{2}D_{11}F(0)y_1^2+\frac{1}{2}D_{22}F(0)y_2^2$$
$$+D_{12}F(0)y_1y_2+o(r^2).$$

Перемножая выражение (6) и это разложение и интегрируя произведение по границе круга B_r, получаем уравнение

$$0=\frac{1}{2}\Delta F(0)+\alpha(A_1D_1F(0)+A_2D_2F(0))+\beta\,\frac{\int y_1^2+\int y_2^2}{\int y_1^2}BF(0),$$

При $\alpha=\frac{1}{2}$ и $\beta=-\frac{1}{4}$ это уравнение превращается в возмущенное уравнение Лапласа (2). Итак, доказана теорема

Теорема 1. *Если при $r\to 0$ для любого вектора $x_0=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ выполняется условие*

$$h_r(0,x_0)=\frac{1}{2\pi r}\left[1+\frac{1}{2}A_1 r\cos\theta+\frac{1}{2}A_2 r\sin\theta-\frac{1}{4}r^2B+o(r^2)\right],$$

то функции $u(x) \equiv h_G(\phi \,|\, x)$ *является решением задачи Дирихле для уравнения*

$$\Delta u + A_1 D_1 u + A_2 D_2 u - Bu = 0.$$

Асимптотика плотности распределения точки первого выхода: необходимое условие. Применим к уравнению (2) формулу Грина (Гильбарт и Трудингер с.29) для решения задачи Дирихле уравнения Пуассона $\Delta u = f$, $u(x) = \phi(x)$ $(x \in \partial B_r)$, полагая

$$f = -\sum_{i=1}^{2} A_i D_i u + Bu.$$

В результате получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$u = \int\limits_{\partial B_r} P_r(\cdot\,, y)\phi(y)ds(y) + \int\limits_{B_r} Q_r(\cdot\,, y) \left[-\sum_{i=1}^{2} A_i D_i u(y) + Bu(y) \right] dv(y), \quad (8)$$

где $dv(y)$ – дифференциальный элемент площади круга,

$$P_r(x,\, y) = \frac{r^2 - |x|^2}{2\pi r |x-y|^2}$$

– ядро Пуассона для круга, $Q_r(x,\, y)$ – функция Грина; для двумерного случая

$$Q_r(x,y) = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y} - \ln \sqrt{\frac{|x|^2 |y|^2}{r^2} + r^2 - 2x \cdot y} \right]. \quad (9)$$

Чтобы избавиться от производной под знаком интеграла в уравнении (8) используем интегрирование по частям с учетом того, что $Q_r(x,\, y) = 0$ при $y \in \partial B_r$. В результате получаем

$$u = \psi_r(\phi|\cdot) + \int\limits_{B_r} \left[\sum_{i=1}^{2} A_i D_i Q_r(\cdot,\, y) u(y) + B Q_r(\cdot, y) u(y) \right] dv(y) \qquad (10)$$

– интегральное уравнение относительно неизвестной функции u, где

$$\psi_r(\phi|x) = \int\limits_{\partial B_r} P_r(x,\, y)\phi(y)ds(y).$$

Обратимся к интерпретации решения уравнения (10) как к интегралу по границе круга от функции $\phi(y)$, умноженной на плотность распределения $h_r(\cdot, y)$.

$$u(x) = \int\limits_{\partial B_r} h_r(x,y)\phi(y)ds(y).$$

Чтобы получить решение непосредственно в терминах плотностей, мы фиксируем произвольную точку x_0 на границе круга и найдём уравнение с заменой произвольной $\phi(y)$ на дельта-функцию $\delta_{x_0}(y)$. Возможность такой замены легко обосновывается с помощью предельного перехода. Обозначим $u(x) = h_r(x, x_0)$. Уравнение (10) переходит в форму

$$h_r(x,x_0) = \psi_r(x,x_0) + \int\limits_{B_r} K_r(x,y)h_r(y,x_0)dv(y), \tag{11}$$

где

$$\psi_r(x,x_0) = \frac{r^2 - |x|^2}{2\pi r|x-x_0|^2}, \tag{12}$$

$$K_r(x,y) = \sum_{i=1}^{2} A_i D_i Q_r(x,y) + BQ_r(x,y).$$

Первые два члена асимптотики мы получим из первой итерации уравнения (11):

$$h_r(x,x_0) = \psi_r(x,x_0) + \int\limits_{B_r} K_r(x,y)\psi_r(y,x_0)dv(y) + \int\limits_{B_r} K_r^{(2)}(x,y)h_r(y,x_0)dv(y),$$

где

$$K_r^{(2)}(x,y) = \int\limits_{B_r} K_r(x,z)K_r(z,y)dv(z).$$

Рассмотрим ядро $K_r(x,y)$. Из определения (9) следует, что производная по второй переменной равна

$$D_i Q_r(x,y) = \frac{1}{2\pi U}(y_i - x_i) - \frac{1}{2\pi V}((|x|^2/r^2)y_i - x_i),$$

где

$$U \equiv |x|^2 + |y|^2 - 2x\cdot y, \quad V \equiv \frac{|x|^2|y|^2}{r^2} + r^2 - 2x\cdot y,$$

$x\cdot y$ – скалярное произведение двух векторов. При $x=0$ мы найдём начальные члены асимптотики. Учитывая условие $|x_0| = r$, мы получаем из (12), что $\psi_r(0, x_0) = \frac{1}{2\pi r}$ – нулевое приближение. Далее

$$h_r(0, x_0) = \frac{1}{2\pi r} + \int\limits_{B_r} K_r(0, y) \frac{r^2 - |y|^2}{2\pi r |y - x_0|^2} dv(y) + C_1$$

$$= \frac{1}{2\pi r} + \int\limits_{B_r} \left[\sum_{i=1}^{2} A_i \frac{y_i}{2\pi |y|^2} + \frac{B}{2\pi} (\ln|y| - \ln r) \right] \frac{r^2 - |y|^2}{2\pi r |y - x_0|^2} dv(y) + C_1,$$

где C_1 – остальные члены первой итерации.

Множители при коэффициентах A_i. Множитель при A_1 равен

$$c(A_1) = \int\limits_0^r \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho \cos\theta}{2\pi \rho^2} \cdot \frac{r^2 - \rho^2}{2\pi r W} \cdot d\theta \, \rho \, d\rho,$$

где $x_0 = (r\cos\theta_0,\ r\sin\theta_0)$, $y = (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)$,

$$W \equiv |y|^2 + |x_0|^2 - 2y \cdot x_0 = \rho^2 + r^2 - 2\rho\, r \cos(\theta - \theta_0).$$

Итак

$$c(A_1) = \int\limits_0^r \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{2\pi} \cdot \frac{r^2 - \rho^2}{2\pi r W} \cdot d\theta \, d\rho,$$

Во внутреннем интеграле

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{\rho^2 + r^2 - 2\rho\, r \cos(\theta - \theta_0)} \, d\theta$$

обозначим $x = \theta - \theta_0$. При этом $d\theta = dx$ и $\cos\theta = \cos(x + \theta_0) = \cos x \cos\theta_0 - \sin x \sin\theta_0$. Очевидно, что

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{a^2 + b^2 - 2ab\cos x} \, dx = 0,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x}{a^2 + b^2 - 2ab\cos x} \, dx = 2 \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos x}{a^2 + b^2 - 2ab\cos x} \, dx.$$

Последний интеграл является табличным (см. [2, с. 198]). Мы будем использовать следующие 3 интеграла, придавая коэффициентам a и b различные значения:

$$\int_0^\pi \frac{\cos x\,dx}{a^2+b^2-2ab\cos x} = \begin{cases} \frac{\pi\,a/b}{b^2-a^2}, & a<b \\ frac\pi\,b/aa^2-b^2, & a>b, \end{cases} \tag{13}$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos^2 x\,dx}{a^2+b^2-2ab\cos x} = \begin{cases} \frac{\pi\,(b^2+a^2)}{2b^2(b^2-a^2)}, & a<b \\ \frac{\pi\,(b^2+a^2)}{2a^2(a^2-b^2)}, & a>b, \end{cases} \tag{14}$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 x\,dx}{a^2+b^2-2ab\cos x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2b^2}, & a<b \\ \frac{\pi}{2a^2}, & a>b. \end{cases} \tag{15}$$

Эти и подобные им интегралы легко могут быть найдены методами теории вычетов (см. [5, с. 128]). В частности, по формуле (13), где $\rho<r$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x\,dx}{W} = \frac{2\pi\rho}{r(r^2-\rho^2)}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} c(A_1) &= \int_0^r \frac{r^2-\rho^2}{(2\pi)^2 r} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta d\theta}{W}\,d\rho \\ &= \int_0^r \frac{r^2-\rho^2}{(2\pi)^2 r} \cos\theta_0 \frac{2\pi\rho}{r(r^2-\rho^2)}\,d\rho = \int_0^r \frac{1}{2\pi r^2}\cos\theta_0\,\rho\,d\rho \\ &= \frac{\cos\theta_0}{2\pi r^2}\int_0^r \rho\,d\rho = \frac{\cos\theta_0}{2\pi r^2}\frac{r^2}{2} = \frac{1}{2\pi r}\cdot\frac{r\cos\theta_0}{2}. \end{aligned}$$

Аналогично, пользуясь представлением

$$\sin(x+\theta_0) = \sin x\cos\theta_0 + \cos x\sin\theta_0,$$

мы получаем значение множителя при коэффициенте A_2:

$$c(A_2) = \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{\rho\sin\theta}{2\pi\rho^2}\cdot\frac{r^2-\rho^2}{2\pi r W}\cdot d\theta\,\rho\,d\rho = \frac{1}{2\pi r}\cdot\frac{r\sin\theta_0}{2}.$$

Это в точности те же значения, которые выше были проверены как достаточные.

Множитель при коэффициенте B. Рассмотрим множитель

$$\begin{aligned}
c(B) &= \int\limits_{B_r} \left[\frac{1}{2\pi}(\ln|y| - \ln r)\right] \frac{r^2 - |y|^2}{2\pi r|y - x_0|^2} dv(y) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2 r} \int\limits_{B_r} (\ln|y| - \ln r) \frac{1}{|y - x_0|^2} dv(y) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2 r} \int\limits_0^r (r^2 - \rho^2)(\ln\rho - \ln r) \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{W}\, d\theta\, \rho d\rho.
\end{aligned}$$

Внутренний интеграл является табличным (см. Двайт, с.). Его значение

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{W}\, d\theta = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos x} = \frac{2\pi}{r^2 - \rho^2}.$$

Отсюда, используя формулу $(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4})' = x\ln x$, получаем

$$c(B) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_0^r (\ln\rho - \ln r)\,\rho\, d\rho = \frac{1}{2\pi r}\left(-\frac{r^2}{4}\right).$$

Это в точности то же значение, которое выше было проверено как достаточное.

О сходимости ряда итераций. Для доказательства сходимости ряда итераций нам нужно оценить порядок интегрального оператора, стоящего справа в уравнении (10). Для этого мы сделаем в интеграле замену масштаба вида

$$\int\limits_{B_r} f(x)\, dV_r(x) = \int\limits_{B_1} f(rx)\, r^2 dv_1(x),$$

где $dv_1(x)$ – дифференциальный элемент площади единичного круга. Преобразуем ядра $Q_r(x,y)$ и $D_iQ_r(x,y)$. Имеем

$$Q_r(rx,ry)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\sqrt{|rx|^2+|ry|^2-2r^2x\cdot y}-\ln\sqrt{\frac{r^4|x|^2|y|^2}{r^2}+r^2-2r^2x\cdot y)}\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\sqrt{|x|^2+|y|^2-2x\cdot y}-\ln\sqrt{|x|^2|y|^2+1-2x\cdot y)}\right)=Q_1(x,y).$$
$$D_iQ_r(rx,ry)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{ry_i-rx_i}{|rx|^2+|ry|^2-2r^2x\cdot y}-\frac{|x|^2ry_i-rx_i}{r^2|x|^2|y|^2+r^2-2r^2x\cdot y}\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi r}\left(\frac{y_i-x_i}{|x|^2+|y|^2-2x\cdot y}-\frac{|x|^2y_i-x_i}{|x|^2|y|^2+1-2x\cdot y}\right)=\frac{1}{r}D_iQ_1(x,y).$$

Отсюда

$$h_r(rx,rx_0)$$
$$=\psi_r(rx,rx_0)+\int\limits_{B_r}\left[\sum_{i=1}^{2}A_iD_iQ_r(rx,y)+BQ_r(rx,y)\right]h_r(y,rx_0)\,dv_r(y)$$
$$=\psi_r(rx,rx_0)+\int\limits_{B_1}\left[\sum_{i=1}^{2}A_iD_iQ_r(rx,ry)+BQ_r(rx,ry)\right]h_r(ry,rx_0)\,r^2dv_1(y)$$
$$=\psi_r(rx,rx_0)+\int\limits_{B_1}\left[r\sum_{i=1}^{2}A_iD_iQ_1(x,y)+r^2BQ_1(x,y)\right]h_r(ry,rx_0)\,dv_1(y).$$

В ядре последнего интеграла явно выразилась зависимость от r. Чтобы сделать неизвестную функцию ограниченной в нуле, умножим обе части уравнения на нормирующий множитель r. Обозначим $H_r(x,x)=rh_r(rx,rx)$ и $\Psi(x,y)=\psi_r(rx,ry)$ При этом

$$\Psi_r(x,y)=\frac{1-|x|^2}{2\pi|x-y|^2},$$

и уравнение получает законченный вид:

$$H_r(x,x_0)=\Psi(x,x_0)+\int\limits_{B_1}\left[r\sum_{i=1}^{2}A_iD_iQ_1(x,y)+r^2BQ_1(x,y)\right]H_r(y,x_0)\,dv_1(y),\tag{16}$$

где $x\in B_1$, $x_0\in\partial B_1$.

Очевидно, что при достаточно малом r ряд итераций этого уравнения сходится, и его решение представимо в виде

$$H_r(x, x_0) = \Psi(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_1} K_r^{(k)}(x, y)\Psi(y, x_0)\, dv_1(y). \tag{17}$$

О членах асимптотики второго порядка. Из формулы (16) видно, что все члены ряда итераций, начиная с третьего имеют порядок малости три или более. Порядок 2 априори возможен лишь для члена второй итерации, который содержит произведение членов первого порядка первой итерации. Наша задача оценить множители коэффициентов величин A_1^2, A_1A_2, A_2^2.

При начальной точке $x = 0$ рассмотрим члены второй итерации, содержащие эти коэффициенты. Из уравнения (10) следует, что множители $c(A_1^2)$ и $c(A_2^2)$ при коэффициентах A_1^2, A_2^2 имеют вид

$$c(A_1^2) = \int\limits_{B_r} \frac{r^2 - |z|^2}{2\pi r W} \int\limits_{B_r} \frac{y_1}{2\pi |y|^2} \left[\frac{z_1 - y_1}{2\pi U} - \frac{(|y|^2/r^2)z_1 - y_1}{2\pi V}\right] dv_r(y)\, dv_r(z)$$

$$c(A_2^2) = \int\limits_{B_r} \frac{r^2 - |z|^2}{2\pi r W} \int\limits_{B_r} \frac{y_2}{2\pi |y|^2} \left[\frac{z_2 - y_2}{2\pi U} - \frac{(|y|^2/r^2)z_2 - y_2}{2\pi V}\right] dv_r(y)\, dv_r(z)$$

Заметим, что из определения функции Грина и её производной следует, что множитель при произведении A_1A_2 равен 0 (данное сочетание коэффициентов не реализуется). Перепишем предыдущие интегралы в полярной системе координат.

$$\begin{aligned} c(A_1^2) = \int\limits_0^r \int\limits_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho_2^2}{2\pi r W} \int\limits_0^r \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \bigg[&\frac{\rho_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \rho_1 \cos^2\theta_1}{2\pi U} \\ &- \frac{(\rho_1^2/r^2)\rho_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \rho_1 \cos^2\theta_1}{2\pi V}\bigg]\, d\rho_1\, d\theta_1\, \rho_2\, d\rho_2\, d\theta_2. \end{aligned} \tag{18}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} c(A_2^2) = \int\limits_0^r \int\limits_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho_2^2}{2\pi r W} \int\limits_0^r \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \bigg[&\frac{\rho_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 - \rho_1 \sin^2\theta_1}{2\pi U} \\ &- \frac{(\rho_1^2/r^2)\rho_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 - \rho_1 \sin^2\theta_1}{2\pi V}\bigg]\, d\rho_1\, d\theta_1\, \rho_2\, d\rho_2\, d\theta_2. \end{aligned} \tag{19}$$

Отсюда следует, что

$$c(A_1^2)+c(A_2^2)=\frac{1}{(2\pi)^3 r}\int_0^r\int_0^{2\pi}\frac{(r^2-\rho_2^2)}{W}\int_0^r\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2)-\rho_1}{U}\right.$$

$$\left.-\frac{(\rho_1^2/r^2)\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2)-\rho_1}{V}\right]d\rho_1\,d\theta_1\,\rho_2\,d\rho_2\,d\theta_2.$$

Пользуясь формулой (13) и суммой равенств (14) и (15) при $a=\rho_1$, $b=\rho_2$, получаем

$$m_1\equiv\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\theta_1-\theta_2)}{U}\,d\theta_1=\int_0^{2\pi}\frac{\cos x\,dx}{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos x}=\begin{cases}\frac{2\pi\,\rho_1/\rho_2}{\rho_2^2-\rho_1^2}, & \rho_1<\rho_2\\ \frac{2\pi\,\rho_2/\rho_1}{\rho_1^2-\rho_2^2}, & \rho_2<\rho_1\end{cases},$$

$$m_{23}\equiv\int_0^{2\pi}\frac{1}{U}\,d\theta_1=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos x}=\begin{cases}\frac{2\pi}{\rho_2^2-\rho_1^2}, & \rho_1<\rho_2\\ \frac{2\pi}{\rho_1^2-\rho_2^2}, & \rho_2<\rho_1\end{cases}.$$

То же при $a=\rho_1\rho_2/r$ и $b=r$:

$$m_4\equiv\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\theta_1-\theta_2)}{V}\,d\theta_1=\int_0^{2\pi}\frac{\cos x\,dx}{\frac{\rho_1^2\rho_2^2}{r^2}+r^2-2\rho_1\rho_2\cos x}=2\pi\rho_1\rho_2\cdot\frac{1}{r^4-\rho_1^2\rho_2^2}$$

$$m_{56}\equiv\int_0^{2\pi}\frac{1}{V}\,d\theta_1=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\frac{\rho_1^2\rho_2^2}{r^2}+r^2-2\rho_1\rho_2\cos x}\,d\theta_1=2\pi\frac{r^2}{r^4-\rho_1^2\rho_2^2}.$$

Отсюда

$$c(A_1^2)+c(A_2^2)=\frac{1}{(2\pi)^3 r}\int_0^r\int_0^r\rho_2(r^2-\rho_2^2)\int_0^{2\pi}\frac{dx}{W}$$

$$\times\left[\rho_2 m_1-\rho_1 m_{23}-\frac{\rho_1^2\rho_2}{r^2}m_4+\rho_1 m_{56}\right]d\rho_2\,d\rho_1$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3 r}\int_0^r\int_0^r\rho_2(r^2-\rho_2^2)\left(\frac{2\pi}{r^2-\rho_2^2}\right)\times\left[\rho_2 m_1-\rho_1 m_{23}-\frac{\rho_1^2\rho_2}{r^2}m_4+\rho_1 m_{56}\right]d\rho_2 d\rho_1$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\int_0^r\int_0^r \rho_2\left[\rho_2\left\{\begin{matrix}\frac{\rho_1/\rho_2}{\rho_2^2-\rho_1^2}\\ \frac{\rho_2/\rho_1}{\rho_1^2-\rho_2^2}\end{matrix}\right\}\right.$$

$$\left. -\rho_1\left\{\begin{matrix}\frac{1}{\rho_2^2-\rho_1^2}\\ \frac{1}{\rho_1^2-\rho_2^2}\end{matrix}\right\} - \frac{\rho_1^3\rho^2}{r^2(r^4-\rho_1^2\rho_2^2)} + \frac{\rho_1 r^2}{r^4-\rho_1^2\rho_2^2}\right] d\rho_2\, d\rho_1$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\int_0^r \rho_1\int_0^r \rho_2\left\{\begin{matrix}\frac{1}{r^2}\\ -\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{r^2}\end{matrix}\right\} d\rho_2\, d\rho_1$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\int_0^r \rho_1\left[\int_0^{\rho_1}\left(-\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{r^2}\right)\rho_2\, d\rho_2 + \int_{\rho_1}^r \frac{\rho_2}{r^2}\, d\rho_2\right] d\rho_1 = 0. \quad (20)$$

Рассмотрим $c(A_1^2)$. Из формулы (18) получаем

$$c(A_1^2) = \frac{1}{(2\pi)^3 r}\int_0^r\int_0^r \rho_2(r^2-\rho_2^2)\int_0^{2\pi}\frac{1}{W}\times\left[\rho_2\cos\theta_2\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta_1\, d\theta_1}{U}\right.$$

$$\left.-\rho_1\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta_1 d\theta_1}{U} - (\rho_1^2/r^2)\rho_2\cos\theta_2\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta_1 d\theta_1}{V} + \rho_1\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta_1 d\theta_1}{V}\right] d\theta_2 d\rho_2 d\rho_1$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3 r}\int_0^r\int_0^r \rho_2(r^2-\rho_2^2)\left[\rho_2 m_1\left(m_7\cos^2\theta_0 + m_8\sin^2\theta_0\right)\right. \quad (21)$$

$$-\rho_1 m_3\big(m_7\sin^2\theta_0 + m_8\cos^2\theta_0\big) - \rho_1 m_2\big(m_7\cos^2\theta_0 + m_8\sin^2\theta_0\big)$$

$$-\frac{\rho_1^2\rho_2}{r^2} m_4\big(m_7\cos^2\theta_0 + m_8\sin^2\theta_0\big) + \rho_1 m_6\big(m_7\sin^2\theta_0 + m_8\cos^2\theta_0\big)\ ,$$

$$\left. + \rho_1 m_5\big(m_7\cos^2\theta_0 + m_8\sin^2\theta_0\big)\right] d\rho_2\, d\rho_1,$$

где

$$m_1 \equiv \int_0^{2\pi}\frac{\cos x\, dx}{U}, \qquad m_2 \equiv \int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 x\, dx}{U}, \qquad m_3 \equiv \int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x\, dx}{U},$$

$$m_4 \equiv \int_0^{2\pi}\frac{\cos x\, dx}{V}, \qquad m_5 \equiv \int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 x\, dx}{V}, \qquad m_6 \equiv \int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x\, dx}{V}, \quad (22)$$

$$m_7 \equiv \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x\,dx}{W}, \qquad m_8 \equiv \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{W}.$$

Пользуясь тем, что

$$m_7 \equiv \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x\,dx}{W} = \frac{\pi(r^2+\rho_2^2)}{r^2(r^2-\rho_2^2)}, \qquad m_8 \equiv \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{W} = \frac{\pi}{r^2},$$

получаем

$$\left(m_7 \cos^2\theta_0 + m_8 \sin^2\theta_0\right) = \frac{r^2+\rho_2^2\cos 2\theta_0}{r^2(r^2-\rho_2^2)},$$

$$\left(m_7 \sin^2\theta_0 + m_8 \cos^2\theta_0\right) = \frac{r^2-\rho_2^2\cos 2\theta_0}{r^2(r^2-\rho_2^2)}.$$

Следовательно, $c(A_1^2) = F_1 + F_2\cos 2\theta_0$, где

$$F_2 = \frac{1}{(2\pi)^2 r}\int_0^r \rho_1 \int_0^r \rho_2 \left[\rho_2 m_1\left(\rho_2^2\right) - \rho_1 m_2\left(\rho_2^2\right)\right.$$

$$\left. - \rho_1 m_3\left(-\rho_2^2\right) - \frac{\rho_1^2\rho_2}{r^2} m_4\left(-\rho_2^2\right) + \rho_1 m_5\left(\rho_2^2\right) + \rho_1 m_6\left(-\rho_2^2\right)\right] d\rho_2\, d\rho_1.$$

Тем же путём выводится, что $c(A_2^2) = F_1 - F_2\cos 2\theta_0$ (см. Приложение 1). Отсюда ясно, что $F_1 = 0$ и для оценки порядка малости $c(A_1^2)$ и $c(A_2^2)$ надо вывести значение коэффициента F_2. Это значение выводится стандартным способом (см. Приложение 2) и равно

$$F_2 = \frac{1}{2\pi r}\cdot\frac{r^2}{16}.$$

Это доказывает присутствие других членов порядка 2 в необходимом условии асимптотического разложения для справедливости возмущенного уравнения Лапласа относительно интеграла произвольной функции от точки первого выхода двумерного однородного диффузионного процесса из окрестности его начальной точки. Достаточное условие не является необходимым.

Итак, доказаны теоремы:

Теорема 2. *Если при любой открытой окрестности нуля G и $x \in G$ функция $u(x) \equiv h_G(\phi\,|\,x)$ является решением задачи Дирихле для уравнения*

$$\Delta u + A_1 D_1 u + A_2 D_2 u - Bu = 0,$$

то при $r \to 0$ *для любого вектора* $x_0 = (r\cos\theta_0, r\sin\theta_0)$ *имеет место асимптотика*

$$h_r(0, x_0) = \frac{1}{2\pi r}\left(1 + \frac{1}{2}A_1 r\cos\theta_0 + \frac{1}{2}A_2 r\sin\theta_0 - \frac{1}{4}Br^2 \right.$$
$$\left. + (A_1^2 - A_2^2)\frac{r^2}{16}\cos 2\theta_0 + o(r^2)\right).$$

Именно так постоянный снос и параметр обрыва искажают плотность равномерного распределения точки первого выхода стандартного винеровского процесса на границу малой круговой окрестности нуля.

Теорема 3. *Функция* $h_G(\phi\,|\,x)$ *является решением задачи Дирихле для уравнения*

$$\Delta u + A_1 D_1 u + A_2 D_2 u = 0,$$

в области G *тогда и только тогда, когда при* $r \to 0$ *для любого вектора* $x_0 = (r\cos\theta_0, r\sin\theta_0)$ *имеет место асимптотика*

$$h_r(0, x_0) = \frac{1}{2\pi r}\left(1 + \frac{r}{2}A_1\cos\theta_0 + \frac{r}{2}A_2 r\sin\theta_0 + o(r)\right).$$

Доказательство. Доказательство очевидным образом следует из теорем 1 и 2. □

Ничто не мешает обобщить эти результаты на пространство любой конечной размерности кроме представления о чрезмерной громоздкости предполагаемых аналитических преобразований.

Приложение 1. Из формулы (19) получаем (обозначения см. (22))

$$c(A_2^2) = \frac{1}{(2\pi)^3 r}\int_0^r\int_0^r \rho_2(r^2 - \rho_2^2)\left[\int_0^{2\pi}\frac{1}{W}\times\left(\rho_2\sin^2\theta_2\int_0^{2\pi}\frac{\cos x\,dx}{U}\right.\right.$$
$$-\rho_1\cos^2\theta_2\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x dx}{U} - \rho_1\sin^2\theta_2\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 x dx}{U} - (\rho_1^2/r^2)\rho_2\sin^2\theta_2\int_0^{2\pi}\frac{\cos x dx}{V}$$
$$\left.\left. + \rho_1\cos^2\theta_2\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{V} + \rho_1\sin^2\theta_2\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 x\,dx}{V}\right)d\theta_2\right]d\rho_2\,d\rho_1$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3 r} \int_0^r \int_0^r \rho_2 (r^2 - \rho_2^2) \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{W} \times \Big(\rho_2 m_1 \sin^2\theta_2 - \rho_1 m_3 \cos^2\theta_2 - \rho_1 m_2 \sin^2\theta_2 \right.$$

$$\left. - (\rho_1^2/r^2)\rho_2 m_4 \sin^2\theta_2 + \rho_1 m_6 \cos^2\theta_2 + \rho_1 m_5 \sin^2\theta_2 \Big) \, d\theta_2 \right] d\rho_2 \, d\rho_1$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3 r} \int_0^r \int_0^r \rho_2 (r^2 - \rho_2^2) \Big[\rho_2 m_1 \left(m_7 \sin^2\theta_0 + m_8 \cos^2\theta_0 \right)$$

$$- \rho_1 m_3 \left(m_7 \cos^2\theta_0 + m_8 \sin^2\theta_0 \right) - \rho_1 m_2 \left(m_7 \sin^2\theta_0 + m_8 \cos^2\theta_0 \right)$$

$$- \frac{\rho_1^2 \rho_2}{r^2} m_4 \left(m_7 \sin^2\theta_0 + m_8 \cos^2\theta_0 \right) + \rho_1 m_6 \left(m_7 \cos^2\theta_0 + m_8 \sin^2\theta_0 \right)$$

$$+ \rho_1 m_5 \left(m_7 \sin^2\theta_0 + m_8 \cos^2\theta_0 \right) \Big] \, d\rho_2 \, d\rho_1.$$

Пользуясь тем, что

$$m_7 \equiv \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x \, dx}{W} = \frac{\pi(r^2 + \rho_2^2)}{r^2(r^2 - \rho_2^2)}, \qquad m_8 \equiv \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{W} = \frac{\pi}{r^2},$$

получаем

$$\left(m_7 \cos^2\theta_0 + m_8 \sin^2\theta_0 \right) = \frac{r^2 + \rho_2^2 \cos 2\theta_0}{r^2(r^2 - \rho_2^2)},$$

$$\left(m_7 \sin^2\theta_0 + m_8 \cos^2\theta_0 \right) = \frac{r^2 - \rho_2^2 \cos 2\theta_0}{r^2(r^2 - \rho_2^2)}.$$

Подставим эти выражения в предыдущее представление $c(A_2^2)$. Сравнивая знаки перед множителем $\cos 2\theta_0$ в коэффициентах $c(A_1^2)$ и $c(A_2^2)$ (см.(21)), мы видим, что

$$c(A_2^2) = F_1 - F_2 \cos 2\theta_0.$$

Тем же путём получаем, что независящие от $\cos 2\theta_0$ члены множителей $c(A_1^2)$ и $c(A_2^2)$ равны друг другу, и благодаря равенству (20) получаем, что $F_1 = 0$.

Приложение 2. Используя формулы из [2]

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{U} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\pi}{\rho_2^2} \\ \frac{\pi}{\rho_1^2} \end{matrix} \right\}, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x \, dx}{U} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\pi}{\rho_2^2} \, \frac{\rho_2^2 + \rho_1^2}{\rho_2^2 - \rho_1^2} \\ \frac{\pi}{\rho_1^2} \, \frac{\rho_2^2 + \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \end{matrix} \right\},$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{V} = \frac{\pi}{r^2}, \qquad \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x\,dx}{V} = \frac{\pi}{r^2}\,\frac{r^4+\rho_1^2\rho_2^2}{r^4-\rho_1^2\rho_2^2},$$

получаем

$$F_2 = \frac{1}{(2\pi)^2 r^3} \int\limits_0^r \int\limits_0^r \rho_2^3 \left[\rho_2 \begin{Bmatrix} \frac{2\pi\rho_1/\rho_2}{\rho_2^2-\rho_1^2} \\ \frac{2\pi\rho_2/\rho_1}{\rho_1^2-\rho_2^2} \end{Bmatrix} - \rho_1 \begin{Bmatrix} \frac{2\pi(\rho_2^2+\rho_1^2))}{2\rho_2^2(\rho_2^2-\rho_1^2)} \\ \frac{2\pi(\rho_1^2+\rho_2^2)}{2\rho_1^2(\rho_1^2-\rho_2^2)} \end{Bmatrix} + \rho_1 \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{\rho_2^2} \\ \\ \frac{\pi}{\rho_1^2} \end{Bmatrix} \right.$$
$$\left. - \frac{\rho_1^2\rho_2}{r^2} \cdot \frac{2\pi\rho_1\rho_2}{r^4-\rho_1^2\rho_2^2} + \rho_1 \frac{\pi}{r^2} \cdot \frac{r^4+\rho_1^2\rho_2^2}{r^4-\rho_1^2\rho_2^2} - \rho_1 \frac{\pi}{r^2} \right] d\rho_2\, d\rho_1.$$

Очевидно, что сумма трёх последних членов в квадратных скобках равна нулю. Далее

$$F_2 = \frac{1}{4\pi r^3} \int\limits_0^r \int\limits_0^r \rho_2^3 \begin{Bmatrix} \frac{\rho_1}{\rho_2^2-\rho_1^2} - \frac{\rho_1(\rho_2^2+\rho_1^2)}{2\rho_2^2(\rho_2^2-\rho_1^2)} + \frac{\rho_1}{2\rho_2^2} \\ \\ \frac{\rho_2^2/\rho_1}{\rho_1^2-\rho_2^2} - \frac{\rho_1(\rho_2^2+\rho_1^2)}{2\rho_1^2(\rho_1^2-\rho_2^2)} + \frac{\rho_1}{2\rho 2_1^2} \end{Bmatrix} d\rho_2\, d\rho_1.$$

Очевидно, что выражение в нижнем ряду фигурной скобки равно нулю, а в верхнем ряду – равно $\frac{\rho_1}{\rho_2^2}$. В результате получаем

$$F_2 = \frac{1}{4\pi r^3} \int\limits_0^r \rho_1 \int\limits_{\rho_!}^r \rho_2\, d\rho_2\, d\rho_1 = \frac{r^2}{2\pi r} \cdot \frac{1}{16}.$$

Это выражение имеет тот же порядок, что и коэффициент перед B, и поэтому не может быть отнесено к остатку $o(r^2)$.

Список литературы

1. Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Москва, Наука, 1989.
2. Г. Б. Двайт, *Таблицы интегралов и другие математические формулы*, Москва, Наука, 1978.
3. Е. Б. Дынкин, *Марковские процессы*, Москва, ФМ, 1963.
4. С. Г. Михлин, *Курс математической физики*, Москва, Наука, 1968.
5. А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов, *Теория функций комплексной переменной*, Москва, Наука, 1979.
6. Б. П. Харламов, *Непрерывные полумарковские процессы*, С.-Петербург, Наука, 2001.

Harlamov B. P. On distribution density of the first exit point of a diffusion process with break from a small circle neighborhood of its initial point.

A two-dimensional homogeneous diffusion process with break is considered. A distribution of the first exit point of such a process from an arbitrary neighborhood of zero as a function of the initial point of the process is determined by an elliptic partial differential equation of second order with constant coefficients and corresponds to the solution of the Dirichlet problem for this equation. A connection of this Dirichlet problem with a distribution density of the first exit point of the process from a small circle neighborhood of zero is proved. In terms of this asymptotic the necessary and sufficient conditions are proved for a function of the initial point of the process to satisfy a partial view of the elliptical partial differential equation of second order, which corresponds to a standard Wiener process with drift and break.

Институт проблем машиноведения РАН,
Большой пр. В.О. 61
199034 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: b.p.harlamov@gmail.com

Поступило 13 сентября 2019 г.