Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 486, 2019 г.

В. Н. Солев

ОЦЕНКА ВЕКТОРНОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ В ГАУССОВСКОМ СТАЦИОНАРНОМ ШУМЕ

§1. Постановка задачи

Статистическая задача, которую мы будем рассматривать, состоит в следующем. Предположим, что на отрезке $|t| \leqslant T$ наблюдаются процессы $y_1, \ldots, y_n$, заданные соотношениями

$$dy_j(t) = s_j(t)\,dt + dx_j(t), \quad j = 1, \ldots, n; \quad |t| \leqslant T. \tag{1}$$

Здесь $x_1, \ldots, x_n$ – стационарные и стационарно связанные гауссовские процессы с нулевым средним и стационарными приращениями (подробнее см. в [1]), неизвестные функции $s_j \in \mathscr{L}_j$, выпуклые подмножества $\mathscr{L}_j$ известны и будут определены позже. Общая задача состоит в построении по наблюдениям (1) подходящей оценки $\widehat{S}_T(t) = \big(\widehat{s}_{1,T}(t), \ldots, \widehat{s}_{n,T}(t)\big)^T$ для векторной функции $S = \big(s_1(t), \ldots, s_n(t)\big)^{\tau}$. Здесь и далее τ – знак транспонирования. В настоящей работе мы ограничимся задачей оценивания по наблюдениям (1) функции $s_1(t)$.

Напомним, что, если скалярный процесс x со стационарными приращениями и нулевым средним имеет спектральную плотность g (функция $g \geqslant 0$), то (см. подробнее [12]) случайные величины

$$x[\varphi] := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\,dx(t) \tag{2}$$

определены, например, для линейного множества D функций φ, удовлетворяющих условию

$$\varphi \in L^2,\ |\widehat{\varphi}(u)|^2 \leqslant \frac{C(\varphi)}{1+u^2}, \text{ где } \widehat{\varphi}(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iut}\varphi(t)\,dt. \tag{3}$$

Ключевые слова: псевдопериодическая функция, непараметрическая оценка, процесс со стационарными приращениями.

Работа поддержана грантом РФФИ 17-01-00828, и программой фундаментальных исследований РАН "Современные проблемы теоретической математики".

При этом

$$\mathbf{E}\, x\big[\varphi\big] = 0, \quad \mathbf{E}\big|x\big[\varphi\big]\big|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|\widehat{\varphi}(u)\big|^2\, g(u)\, du < \infty. \tag{4}$$

Для векторной функции $\varphi = \big(\varphi_1, \dots, \varphi_n\big)$ с координатами $\varphi_j \in D$ мы будем использовать обозначение $X[\varphi] = \big(x_1[\varphi_1], \dots, x_n[\varphi_n]\big)^{\mathcal{T}}$. Мы будем предполагать что векторный процесс со стационарными приращениями $X(t) = \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)^{\mathcal{T}}$ имеет спектральную плотность $\mathbf{f}$. Последнее означает, что существует $n \times n$ неотрицательная матрица функция $\mathbf{f} = (f_{i,j})$, такая что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|f_{i,j}|(u)}{1+u^2}\, du < \infty, \tag{5}$$

причем для $\varphi \in D^n$

$$\mathbf{E}\,(X[\varphi], X[\varphi]) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{f}(u)\widehat{\varphi}(u), \widehat{\varphi}(u))\, du. \tag{6}$$

Здесь $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – скалярное произведение в $\mathbb{C}$. Пусть $D(T) := \big\{\psi : \psi \in D, \operatorname{supp}\psi \subset [-T, T]\big\}$. Используя обозначение для локально квадратично суммируемой функции s и $\varphi \in D(T)$

$$s[\varphi_j] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi_j(t))}\, s(t)\, dt,$$

мы перепишем модель (1) в виде:

$$Y[\varphi] = S[\varphi] + X[\varphi], \quad \varphi \in D^n(T). \tag{7}$$

Здесь для векторной функции $\varphi = \big(\varphi_1, \dots, \varphi_n\big)$ из $D^n(T)$ принято обозначение $S[\varphi] := \big(s_1[\varphi_1], \dots, s_n[\varphi_n]\big)^{\mathcal{T}}$ в предположении, что функции s_j локально квадратично суммируемы.

Перейдем к описанию выпуклого множества $\mathscr{L}_*$, из которого выбираются функции $S(t)$. Пусть $\mathscr{L}$ – банахово пространство локально квадратично суммируемых скалярных функций s, таких что

$$\|s\|^2_{\mathscr{L}} = \sup_x \int\limits_x^{x+1} |s\,(t)|^2\; dt < \infty. \tag{8}$$

Для векторной функции $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ с координатами из $\mathscr{L}$ примем обозначение

$$\|\psi\|^2_{\mathscr{L}^n} := \sup_x \int\limits_x^{x+1} \|\psi(t)\|^2 \, dt, \tag{9}$$

где $\|\psi(t)\|$ – норма вектора $\psi(t)$ в $\mathbb{C}^n$. Обозначим $\mathscr{L}^n$ банахово пространство таких векторных функций ψ с нормой $\|\psi\|_{\mathscr{L}^n}$.

Пусть Λ – счетное множество в $\mathbb{R}$, удовлетворяющее условию отделимости

$$\rho = \rho\,(\Lambda) = \inf_{\substack{u,v\in\Lambda,\\ u\neq v}} |u - v| > 0. \tag{10}$$

Мы также будем предполагать, что точек из Λ в следующем смысле достаточно много на любом отрезке $[-m, m]$, если m достаточно велико: при некотором $d > 0$ и фиксированном $\beta > 1$

$$dm^{2\beta+1} \leqslant \sum_{\substack{u\in\Lambda,\\ |u|\leqslant m}} (1 + |u|)^{2\beta}. \tag{11}$$

Обозначим $\mathscr{L}(\Lambda)$ введенный Степановым (см. подробнее [4]) класс псевдо-периодических функций s,

$$s(T) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)\, e^{iut}, \quad \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2 < \infty. \tag{12}$$

Степановым установлено, что $\mathscr{L}(\Lambda)$ – замкнутое подпространство банахова пространства $\mathscr{L}$. Обозначим $\mathscr{L}^n(\Lambda)$ линейное множество векторных функции $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ с координатами из $\mathscr{L}(\Lambda)$. Очевидно, $\mathscr{L}^n(\Lambda)$ – замкнутое подпространство банахова пространства $\mathscr{L}^n$. Далее, пусть счетные множества $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ попарно не пересекаются, а их объединение удовлетворяет условию (10), причем

$$\Lambda_i \cap \Lambda_j = \varnothing, \text{ если } i \neq j; \quad \rho(\Lambda) > 0, \ \ \Lambda := \bigcup_{j=1}^n \Lambda_j. \tag{13}$$

Кроме того, мы будем предполагать, что каждое множество Λ_j удовлетворяет при фиксированном β условию (11).

Пусть параметрическое множество $\mathscr{L}(\beta, L; \Lambda)$ выделяется при $\beta > 1$ из функционального класса $\mathscr{L}(\Lambda)$ условием

$$\sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2 (|u| + 1)^{2\beta} \leqslant L. \tag{14}$$

Мы будем предполагать, что координаты s_j векторной функции $S(t) = \big(s_1(t), \dots, s_n(t)\big)^\tau$ лежат в соответствующем множествах $\mathscr{L}(\beta, L; \Lambda_j)$ с одинаковыми β и L, обозначая

$$\mathscr{L}_* = \mathscr{L}(\beta, L; \Lambda_1) \times \ldots \times \mathscr{L}(\beta, L; \Lambda_n).$$

Пусть $\widehat{s}_1^{\,T} \in \mathscr{L}(\beta, L; \Lambda_1)$ – оценка неизвестной функции s_1, построенная по наблюдениям

$$X[\varphi] = \big(x_1[\varphi_1], \dots, x_n[\varphi_n]\big)^\tau, \quad [\varphi] = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^\tau \in D^n(T).$$

Риск от использования оценки $\widehat{s}_1^{\,T}$ будем измерять величиной

$$\mathscr{R}_T\big(\widehat{s}_1^{\,T}; \mathbf{f}\mathscr{L}_*;\big) = \sup_{S \in \mathscr{L}_*} \mathbf{E}_{S,\mathbf{f}} \left\|\widehat{s}_1^{\,T} - s_1\right\|_{\mathscr{L}}^2 \tag{15}$$

Обозначим $\mathscr{R}_T$ – минимаксный риск,

$$\mathscr{R}_T(\mathscr{L}_*; \mathbf{f}) = \inf_{\widehat{s}_1^{\,T}} \mathscr{R}_T\big(\widehat{s}_1^{\,T}; \mathscr{L}_*\big). \tag{16}$$

Задача настоящей работы состоит в оценке снизу величины минимаксного риска.

Наряду с банаховой нормой $\|s\|_{\mathscr{L}}$, определенной в (8), будем также рассматривать на $\mathscr{L}(\Lambda)$ гильбертовы нормы

$$\|s\|_* := \left\{\sum_{u \in \Lambda} |a(u)|^2\right\}^{1/2}, \quad \text{и} \quad \|s\|_T := \left\{\frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} |s(t)|^2 \, dt\right\}^{1/2}.$$

Как установлено в [5], при условии отделимости найдутся такие константы $0 < c_1, C_1 < \infty$ и $0 < c_2, C_2 < \infty$, что при $s \in \mathscr{L}(\Lambda)$

$$c_1 \, \|s\|_* \leqslant \|s\|_{\mathscr{L}} \leqslant C_1 \, \|s\|_*\,, \tag{17}$$

и при достаточно большом $T > T_0$

$$c_2 \, \|s\|_T \leqslant \|s\|_{\mathscr{L}} \leqslant C_2 \, \|s\|_T\,. \tag{18}$$

При этом величины c_1, c_2, C_1, C_2, T_0 зависят только от ρ, определенного в (10).

§2. Средние значения спектральной плотности

Пусть $X(t) = \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)^{\mathcal{T}}$ – гауссовский процесс со стационарными приращениями с нулевым средним и со спектральной плотностью $\mathbf{f}$, $H = H(X)$ – пространство, порожденное случайными величинами вида $\xi = x_j(b_j) - x_j(a_j)$ при произвольном выборе интервалов $[a_j, b_j]$ и положительных целых $j \leqslant n$, рассматриваемое как подпространство соответствующего пространства $L^2(dP)$. На H^n, рассматриваемом как линейное множество над полем $\mathbb{C}$, зададим норму $\|\cdot\|_{H^n}$, определив ее соотношением

$$\|X[\varphi]\|^2_{H^n} = \mathbf{E}\,(X[\varphi], X[\varphi]), \quad \varphi \in D^n.$$

Свяжем с неотрицательной $n \times n$ матрицей-функцией $\mathbf{f}$ пространство $L^2_{\mathbf{f}}$ функций φ на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих условию

$$\|\varphi\|^2_{\mathbf{f}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{f}(t)\varphi(t), \varphi(t))\,dt < \infty, \tag{19}$$

где $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$.

Заметим, что отображение $H^n \to L^2_{\mathbf{f}}$, заданное на случайных векторах $X[\varphi]$, $\varphi \in D^n$, соотношением $X[\varphi] \mapsto \widehat{\varphi}$, продолжается до изометрии $H^n \to L^2_{\mathbf{f}}$.

Мы будем рассматривать при $\varepsilon > 0$ усредненные значения $\mathbf{f}_\varepsilon(u)$ матричной функции $\mathbf{f}$ вида

$$\mathbf{f}_\varepsilon(u) := \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{|u-x|\leqslant\varepsilon} \mathbf{f}(u-x)\,dx. \tag{20}$$

Мы будем предполагать, что X – процесс полного ранга (подробнее см. в [1]), в частности, $\det(\mathbf{f}) > 0$ почти всюду.

При $\varepsilon = 1/T$ обозначим

$$\widetilde{\mathbf{f}}_\varepsilon(u) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 T(x-u)}{\pi T(x-u)^2}\,\mathbf{f}(x)\,dx. \tag{21}$$

Пусть $e_1, \dots, e_n$ – стандартный базис в $\mathbb{C}$. Положим

$$f_j(u;\varepsilon) = (\widetilde{\mathbf{f}}^{-1}_\varepsilon(u)\,e_j, e_j), \quad g_j = g_u^T\,e_j, \quad \tilde{g}_j = \frac{\widetilde{\mathbf{f}}^{-1}_\varepsilon(u)\,g_j}{f_j(u;\varepsilon)}. \tag{22}$$

Здесь

$$g_u^T(x) = \frac{\sin T(x-u)}{\sqrt{\pi T}\,(x-u)}.$$

Так что

$$(\tilde g_j, \tilde g_j)_{\mathbf f} = \frac{1}{(\widetilde{\mathbf f}_\varepsilon^{-1}(u)\, e_j, e_j)}, \quad (g_i, g_j)_I = \delta_{i,j}. \tag{23}$$

$$\big(g_i, \tilde g_j\big)_{\mathbf f} = \delta_{i,j}\,\frac{1}{(\widetilde{\mathbf f}_\varepsilon^{-1}(u)\, e_j, e_j)}, \quad \big(g_i, \tilde g_j\big)_I = 1. \tag{24}$$

В последнем равенстве I – матрица-функция, совпадающая с матрицей тождественного оператора. Само же последнее равенство говорит о том, что

$$\tilde g_j = g_j - \sum_{i\neq j} b_i g_i. \tag{25}$$

Из (23), (24) и (25) следует, что

$$\inf_{b_i, i\neq j} \|g_j - \sum_{i\neq j} b_i g_i\|_{\mathbf f}^2 = \frac{1}{f_j(u;\varepsilon)}. \tag{26}$$

Определим теперь для функций $\psi_i \in D$ вектор-функции $g_i^* = \widehat{\psi}_i e_i$. Положим

$$\delta^2(\varepsilon; j) = \inf_{\psi_i, i\neq j} \|g_j - \sum_{i\neq j} g_i^*\|_{\mathbf f}^2.$$

Очевидно,

$$\delta^2(\varepsilon; j) \leqslant \frac{1}{f_j(u;\varepsilon)}. \tag{27}$$

Величина $\delta^2(\varepsilon; j)$ имеет простой смысл. Пусть для $\varphi \in D$ величина $x^j[\varphi]$ – ортогональная проекция в $L^2(dP)$ случайной величины $x_j[\varphi]$ на ортогональное дополнение к подпространству, порожденному величинами $x_i[\varphi_i]$, $\varphi_i \in D$, $i \neq j$. Обозначим f^j спектральную плотность процесса $x^j[\varphi]$, $\varphi \in D$. Тогда

$$\delta^2(\varepsilon; j) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 T(x-u)}{\pi T (x-u)^2}\, f^j(x)\, dx. \tag{28}$$

Мы будем предполагать, что при $j = 1, \dots, n$

$$\sup_{\substack{\varepsilon>0,\\ u\in\Lambda}} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{|u-x|\leqslant\varepsilon} f^j(x-u)\, dx\, \frac{1}{2\varepsilon} \int_{|u-x|\leqslant\varepsilon} \frac{1}{f^j(x-u)}\, dx < \infty. \tag{29}$$

В [12] установлено, что при условии (29) при некоторых константах $0 < c \leqslant C < \infty$

$$c\,\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{|u-x|\leqslant\varepsilon} f^j(x-u)\,dx \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 T(x-u)}{\pi T(x-u)^2}\,f^j(x)\,dx \leqslant C\,\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{|u-x|\leqslant\varepsilon} f^j(x-u)\,dx. \tag{30}$$

§3. Оценка снизу минимаксного риска

Пусть $\mathbf{b} = (b_u,\, u\in\Lambda)$ – вектор с неотрицательными координатами,

$$\sum_{u\in\Lambda_j} b_u^2(1+|u|)^{2\beta} \leqslant L, \quad j=1,\dots,n.$$

Обозначим $\mathscr{K}(\mathbf{b})$ прямоугольник

$$\mathscr{K} = \{\mathbf{a} = (a(u), u\in\Lambda) : |a(u)| \leqslant b(u), u\in\Lambda\}.$$

Положим

$$\mathscr{K}_j = \{\mathbf{a} = (a(u), u\in\Lambda_j) : |a(u)| \leqslant b(u), u\in\Lambda_j\}.$$

Обозначим $\mathscr{L}(b)$ множество векторных функций $S = \big(s_1(t),\dots,s_n(t)\big)^{\mathcal{T}}$, для которых вектор $\mathbf{a}_j = (a(u), u\in\Lambda_j)$ коэффициентов $a(u)$ в разложении

$$s_j(T) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)\,e^{iut}$$

выбирается из $\mathscr{K}_j$. Рассмотрим задачу оценивания координаты s_1 вектора S по наблюдениям (1), когда $S\in\mathscr{L}(\mathbf{b})$. Обозначим $\mathscr{R}_T(\mathscr{L}(\mathbf{b});\mathbf{f})$ минимаксный риск оценивания в этой задаче. Так как $\mathscr{L}(\mathbf{b})\subset\mathscr{L}_*$, то

$$\mathscr{R}_T(\mathscr{L}(\mathbf{b});\mathbf{f}) \leqslant \mathscr{R}_T(\mathscr{L}_*;\mathbf{f}).$$

Прежде, чем построить финальную оценку снизу для величины $\mathscr{R}_T(\mathscr{L}(\mathbf{b});\mathbf{f})$, рассмотрим задачу оценивания координаты s_1 вектора $S\in\mathscr{L}(\mathbf{b})$ по наблюдениям (1).

Стандартный прием, использованный, в частности, в [12], заключается в переходе от модели (1) к дискретной модели. Примем обозначение L_T^2 для L^2-пространства на отрезке $[-T,T]$, построенном по нормированной мере Лебега, со скалярным произведением $(s_1,s_2)_T$ и нормой $\|s\|_T^2 = (s,s)_T$. Продолжим функции из L_T^2 на всю числовую ось, полагая их равными нулю вне отрезка $[-T,T]$. Обозначим $\varphi_u(T;t) = \mathbf{1}_{[-T,T]}(t)\, e^{iut}$. При условии (10) система $\{\varphi_u(T;\,\cdot\,),\ u\in\Lambda\}\}$ является базисом Рисса (в метрике пространства L_T^2) в замыкании своей линейной оболочки. Пусть система функций $\{g_u^T,\ u\in\Lambda\}$ из $D(T)$ выбрана так, что

$$(\varphi_u(T;\,\cdot\,), g_v^T)_T = \delta_{u,v} \quad \text{при} \quad u,v\in\Lambda.$$

Здесь не обязательно предполагать, что функции $g_v^T \in \mathscr{L}(\Lambda)$. В случае, когда все функции системы $\{g_u^T,\ u\in\Lambda\}$ лежат в $\mathscr{L}(\Lambda)$, систему $\{g_u^T,\ u\in\Lambda\}$ будем называть сопряженной к системе $\{\varphi_u(T;\,\cdot\,),\ u\in\Lambda\}\}$. Заметим, что при $s\in\mathscr{L}(\Lambda), u\in\Lambda$

$$\frac{1}{2T}\, s[g_u^T] = a(u) \quad \text{и} \quad s[g_u^T] = 0 \quad ,\text{если} \quad u\in\Lambda_j,\ \ s\notin\mathscr{L}(\Lambda_j). \tag{31}$$

Ясно, что задача оценивания функции $s,\ s\in\mathscr{L}(\Lambda)$, совпадает с задачей оценивания вектора $\mathbf{a} = (a(u),\ u\in\Lambda)$. При этом (в силу (18)) для оценки

$$\widehat{s}_T(t) = \sum_{u\in\Lambda} \widehat{a}_T(u)\, e^{iut},$$

при подходящих $0 < c \leqslant C < \infty$ и достаточно большом T

$$c\,\|s-\widehat{s}_T\|_{\mathscr{L}}^2 \leqslant \sum_{u\in\Lambda} |a(u)-\widehat{a}_T(u)|^2 \leqslant C\,\|s-\widehat{s}_T\|_{\mathscr{L}}^2. \tag{32}$$

Для оценивания коэффициента $a(u)$ при $u\in\Lambda_k$ в силу (31) мы располагаем по крайней мере наблюдениями

$$\mathscr{Y}_k[g_u^T] = a(u) + \mathscr{X}_k[g_u^T] \quad \text{и} \quad \mathscr{Y}_j[g_u^T] = \mathscr{X}_j[g_u^T],\ j\neq k, \tag{33}$$

где

$$\mathscr{X}_k[g_u^T] = \frac{1}{2T}\, x_k[g_u^T]. \tag{34}$$

Пусть $r > T_0$ и $\{\psi_u^r,\ u\in\Lambda\}$ – система из $\mathscr{L}_r(\Lambda)$, сопряженная (в метрике пространства L_r^2) к системе $\{\varphi_u(r;\,\cdot\,),\ u\in\Lambda\}$. При фиксированном $r > T_0$ определим систему $\{g_u^T,\ u\in\Lambda\}$ соотношением

$$g_u^T(t) = \frac{T}{2r(T-r)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_u^r(t-s)\,\varphi_u(T-r;s)\,ds, \quad T > r, \tag{35}$$

Подробнее о свойствах системы $\{g_u^T,\ u\in\Lambda\}$ см. в [12]. Для нас важно будет знать, что (как установлено в [12]) для функции g_u^T при условии

(29) найдутся константы $0 < c(\rho,r) \leqslant C(\rho,r) < \infty$, текие что при $\varepsilon = 1/T$ справедливы оценки

$$c(\rho,r)\,\varepsilon\, f^k{}_{\varepsilon}(u) \leqslant \mathbf{E}\,\mathscr{X}_k^2[g_u^T] \leqslant C(\rho,r)\,\varepsilon\, f^k(u), \tag{36}$$

где f_k – спектральная плотность процесса x_k, условие (29) применяется к f_k.

Для оценивания коэффициента $a(u)$ при $u \in \Lambda_k$ мы можем использовать статистику

$$\mathscr{Y}^k[g_u^T] := \mathscr{Y}_k[g_u^T] - \sum_{j\neq k} c_j\,\mathscr{X}_j[g_u^T] = a(u) + \mathscr{X}_k[g_u^T] - \sum_{j\neq 1} c_j\,\mathscr{X}_j[g_u^T], \tag{37}$$

выбирая коэффициенты c_j так, чтобы величина $\sigma^2_{\mathbf{f}}(u;T;k);= \mathbf{D}\,\mathscr{Y}^k[g_u^T]$ была наименьшей. Величину $\mathscr{Y}^k[g_u^T]$ мы можем рассматривать как оценку величины $a(u)$. Последнее соотношение нам удобно записать в виде

$$\mathscr{Y}^k[g_u^T] = a(u) + \frac{1}{2T}\big(x_k[g_u^T] - \sum_{j\neq k} c_j x_j[g_u^T]\big).$$

Пусть $e_1,\dots,e_n$ – стандартный базис в $\mathbb{C}$, $\tilde g_u^T = \frac{\widehat{g}_u^T}{\|\widehat{g}_u^T\|_2}$, где $\|\cdot\|_2$ – норма в L^2,

$$\mathbf{f}_T(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(t)\,|\tilde g_u^T|^2\,dt, \quad h_j = \tilde g_u^T\,e_j, \quad \tilde h_j = \frac{\mathbf{f}_T^{-1}(u)\,h_j}{(\mathbf{f}_T^{-1}(u)\,e_j,e_j)}.$$

Так что

$$(\tilde h_j,\tilde h_j)_{\mathbf{f}} = \frac{1}{(\mathbf{f}_T^{-1}(u)\,e_j,e_j)}, \quad (h_i,h_j)_I = \delta_{i,j}, \tag{38}$$

$$\big(h_i,\tilde h_j\big)_{\mathbf{f}} = \delta_{i,j}\,\frac{1}{(\mathbf{f}_T^{-1}(u)\,e_j,e_j)}, \quad \big(h_i,\tilde h_j\big)_I = 1. \tag{39}$$

В последнем равенстве I – матрица-функция, совпадающая с матрицей тождественного оператора. Само же последнее равенство говорит о том, что

$$\tilde h_j = h_j - \sum_{i\neq j} b_i h_i. \tag{40}$$

Из (40) и (39) следует, что

$$\sigma^2_{\mathbf{f}}(u;T;k) = \frac{\|\widehat{g}_u^T\|_2^2}{4T^2(\mathbf{f}_T^{-1}(u)\,e_k,e_k)}. \tag{41}$$

Отметим следующее обстоятельство: случайная величина $\mathscr{Y}^k[g_u^T]$ является независимой по отношению к вектору $(\mathscr{Y}_j[g_u^T],\ j \neq k,\ u \in \Lambda_k)$ и при этом распределение указанного случайного вектора не зависит от оцениваемого вектора $(a(u),\ u \in \Lambda_k)$.

Отметим, что при условии (29) из (27), (28), (30) следует, что при некотором $c > 0$

$$\sigma_{\mathbf{f}}^2(u; T; k) \geqslant c\,\varepsilon f_\varepsilon^j(u).$$

Как следует из работы [12], это приводит к оценке

$$\mathscr{R}_T(\mathscr{L}_*; \mathbf{f}) \geqslant C\,\mathscr{R}_T(\mathscr{L}(\Lambda_j); \beta; f^j), \tag{42}$$

справедливой при некоторой константе $C > 0$, а, значит, и к следующей оценке

$$\mathscr{R}_T(\mathscr{L}_*; \mathbf{f}) \geqslant C_* \sum_{j=1}^n \mathscr{R}_T(\mathscr{L}(\Lambda_j); \beta; f^j), \tag{43}$$

справедливой при некоторой другой константе $C_* > 0$.

Список литературы

1. Ю. А. Розанов, *Стационарные процессы.* Мир, М., 1963.
2. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, *Гауссовские процессы.* Мир, М., 1974.
3. D. L. Donoho, Liu Richard C., MacGibbon Brenda, *Minimax Risk over Hyperrectangles, and Implications.* — Ann. Statist. **18**, No. 3, 1416–1437.
4. W. Stepanoff, *Sur quelques generalisations des fonctions presque-periodiques.* — Comptes Rendus, **181** (1925), 90–92.
5. Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной плоскости.* Наука, М., 1964.
6. J. B. Garnett, *Bounded analytic functions.* Academic Press, NY, 1981.
7. В. Н. Солев,*Условие локальной асимптотической нормальности для гауссовских стационарных процессов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **278** (2001), 225–247.
8. С. В. Решетов, *Минимаксный риск для квадратично выпуклых множеств.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **368** (2009), 181–189.
9. С. В. Решетов, *Минимаксная оценка псевдо-периодической функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума.* — Вестник СПбГУ, Серия 1, **2** (2010), 106–115.
10. В. Н. Солев,*Оценка функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума: дискретизация* — Зап. научн. семин. ПОМИ **441** (2015), 286–298.
11. В. Н. Солев,*Адаптивная оценка функции, наблюдаемой на фоне гауссовского стационарного шума* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 261–275.
12. В. Н. Солев,*Локальная версия условия Маккенхаупта и точность оценивания неизвестной псевдо-периодической функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 261–275.

13. В. Н. Солев, *Условие Маккенхаупта и одна задача оценивания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **431** (2014), 186–197.
14. S. R. Treil, A. L. Volberg, *Weighted embeddings and weighted norm inequalities for the Hilbert transform and the maximal operator.* — Алгебра и анализ **7**, No. 6 (1995), 205–226.

Solev V. N. Estimation of a vector valued function in a Gaussian stationary noise.

In the paper, we construct the lower bound of the minimax risk in the estimation problem, as we observe the unknoun pseudo-periodic vector-function in a Gaussian stationary noise with the spectral density satisfying the vector version of the Muckenhoupt condition.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия
E-mail: vnsolev@gmail.com

Поступило 25 ноября 2019 г.