Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 486, 2019 г.

Л. В. Розовский

ОБ АСИМПТОТИКЕ СВЕРТКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С РЕГУЛЯРНО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩИМИ ХВОСТАМИ

§1. Результаты.

В работе исследуется асимптотическое поведение на бесконечности распределений и плотностей суммы нескольких независимых случайных величин при предположениях экспоненциального типа относительно поведения их распределений на бесконечности.

Пусть X_j, $j = 1, 2, \ldots,$ – независимые случайные величины с функциями распределения $F_j(\,\cdot\,)$; $\bar{F}_j(\,\cdot\,) = 1 - F_j(\,\cdot\,)$, $Q_n(x) = \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n \geqslant x)$, $n = 1, 2, \ldots.$

Нас интересует асимптотическое поведение вероятности $Q_n(x)$ и ее локального варианта при $x \to \infty$, когда $F_j \in \mathcal{E}R$ согласно терминологии в [1] или [2], т.е. тогда, когда $\bar{F}_j(t) = e^{-\lambda_j t}\, l_j(t)$, где λ_j – положительные числа, а функции $l_j(t)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, правильно меняются (см. [3, Гл.VIII])) на бесконечности с некоторыми показателями ρ_j (в дальнейшем этот факт будет записываться как $l_j \in \mathcal{R}(\rho_j)$).

Класс $\mathcal{E}R$ содержится в заметно более общем классе распределений с т.н. тонкими хвостами, причем свойства этого класса хорошо изучены (см. например, публикации [4–8] и библиографии в них).

Приведем некоторые результаты, которые напрямую связаны с нашим исследованием, адаптируя при необходимости их формулировки к случаю распределений из класса $\mathcal{E}R$.

Предложение 1. *Пусть* $X_1, X_2 \geqslant 0$ *п.н.*

Ключевые слова: сумма независимых случайных величин, большие уклонения, регулярно экспоненциально убывающие хвосты.

Работа поддержана грантом РФФИ No. 19-01-00356.

1. *Пусть при некотором* $\lambda > 0$ *функции* $e^{\lambda t}\,\bar F_j(t) \in \mathcal{R}(\rho_j)$, *где* ρ_j *– любые вещественные числа. Тогда при* $x \to \infty$

$$Q_2(x) \sim I(\rho_1,\rho_2)\,\bar F_1(x) \int\limits_0^{x/2} e^{\lambda\, y}\,F_2(dy) + I(\rho_2,\rho_1)\,\bar F_2(x) \int\limits_0^{x/2} e^{\lambda\, y}\,F_1(dy),$$

где $I(\beta,\gamma) = 1$ *при* $\gamma \leqslant -1$ *и* $I(\beta,\gamma) = (1+\gamma)\,2^{1+\gamma} \int\limits_0^{1/2} t^{\gamma}\,(1-t)^{\beta}\,dt$, *когда* $\gamma > -1$*; в частности,*
если $L_j(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\, X_j} < \infty\,(j=1,2)$, *то* $Q_2(x) \sim L_1(\lambda)\,\bar F_2(x) + L_2(\lambda)\,\bar F_1(x)$;
если $L_2(\lambda) < \infty$, $L_1(\lambda) = \infty$ *и* $\rho_1 > \rho_2$, *то* $Q_2(x) \sim L_2(\lambda)\,\bar F_1(x)$;
если $\rho_1 > -1$ *и* $\rho_2 > -1$, *то* $Q_2(x) \sim \frac{\Gamma(1+\rho_1)\,\Gamma(1+\rho_2)}{\Gamma(2+\rho_1+\rho_2)}\,\lambda\,x\,e^{\lambda x}\,\bar F_1(x)\bar F_2(x)$ *и* $(n \geqslant 1)$

$$1 - F_1^{*n}(x) \sim \frac{\Gamma^n(1+\rho_1)}{\Gamma(n\,(1+\rho_1))}\,(\lambda\,x)^{n-1}\,e^{-\lambda x}\,(e^{\lambda x}\,\bar F_1(x))^n.$$

2. *Если* $e^{\lambda t}\,\bar F_1(t) \in \mathcal{R}(\rho_1)$ *и* $L_2(\gamma) < \infty$, *где* $\gamma > \lambda$, *то* $Q_2(x) \sim L_2(\lambda)\,\bar F_1(x)$, $x \to \infty$.

Предложение 1 вытекает из теоремы 4 и лемм 1 и 4 работы [4].

Предложение 2. *Пусть случайная величина* X *с функцией распределения* $F(t)$ *при некотором* $\lambda > 0$ *удовлетворяет условиям* $e^{\lambda t}\,\bar F(t) \in \mathcal{R}(\gamma)$ *и* $\mathbf{E}e^{\lambda X} < \infty$.

Если $\bar F_j(x) \sim c_j\,\bar F(x)$, $x \to \infty$, *где* c_j *– неотрицательные постоянные, то* $L_j = L_j(\lambda) < \infty$ *и*

$$Q_n(x) \sim \prod_{i=1}^{n} L_i \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{L_j}\,\bar F(x), \quad x \to \infty.$$

Предложение 2 является следствием [6, предложение 1]или [7, приложение].

Перейдем к изложению результатов.

Теорема 1. *Пусть функции распределения* $F_j(x)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, *при некотором* $\lambda > 0$ *и каждом* j, $1 \leqslant j \leqslant n$, *удовлетворяют условию*

$$\widehat{F}_j(y) = e^{\lambda\, y}\,\bar F_j(y) \in \mathcal{R}(\rho_j). \tag{1.1}$$

Тогда

$$Q_n(x) \sim C_n \sum_{j=1}^{n} \bar F_j(x) \prod_{l=1,\, l\neq j}^{n} V_l(x), \quad x \to \infty, \tag{1.2}$$

где

$$V_j(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\lambda y} F_j(dy),$$
$$C_n = \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1+\alpha_j)/\Gamma(1+\alpha), \quad \alpha_j = (1+\rho_j)^+, \quad \alpha = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j. \tag{1.3}$$

В частности, если $L_j = V_j(\infty) < \infty$, *(например,* $\rho_j + 1 < 0$*),* $1 \leqslant j \leqslant n$, *то*

$$Q_n(x) \sim \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_j(x) \prod_{l=1,\, l\neq j}^{n} L_l, \quad x \to \infty,$$

и, если $\rho_j + 1 > 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$, *то*

$$Q_n(x) \sim k_n\, e^{-\lambda x} (\lambda x)^{n-1} \prod_{j=1}^{n} \widehat{F}_j(x), \quad x \to \infty,$$

где $k_n = \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(\alpha_j)/\Gamma(\alpha)$.

Обращаем внимание на то, что в теореме 1, в отличие от предложения 1, не предполагается *неотрицательность* случайных величин X_j.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и, кроме того,* $\mathbf{E}\, e^{\widetilde{\lambda} X_j} < \infty$ *при* $n < j \leqslant n+m$, *где постоянная* $\widetilde{\lambda} > \lambda$ *. Тогда*

$$Q_{n+m}(x) \sim Q_n(x) \prod_{j=n+1}^{n+m} \mathbf{E} e^{\lambda X_j}, \quad x \to \infty.$$

Теперь обратимся к локальным аналогам теорем 1 и 2.

Будем предполагать, что функции распределения $F_j(x)$ имеют плотности $p_j(x)$, причем если $j = 1$, то при всех x, а если $2 \leqslant j \leqslant n$, то при всех $x > x_0$ (т.е. $F_j(x) - F_j(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} p_j(y)\, dy$).

Отсюда, в частности, следует, что распределение $Q_n(x)$ имеет плотность $q_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_1(x-y)\, d\mathbf{P}(X_2 + \cdots + X_n < y)$ (например, [9, гл. 3, §6]).

Теорема 3. *Пусть при некотором* $\lambda > 0$

$$\widehat{p}_j(y) = e^{\lambda\, y}\, p_j(y) \in \mathcal{R}(\rho_j). \tag{1.4}$$

Тогда

$$q_n(x) \sim C_n\, e^{-\lambda\, x}\, (V_1(x) \cdots V_n(x))', \quad x \to \infty, \tag{1.5}$$

где $V_j'(x) := \widehat{p}_j(x)$.

В частности, если $L_j = V_j(\infty) < \infty$, *то*

$$q_n(x) \sim \sum_{j=1}^{n} p_j(x) \prod_{l=1,\, l\neq j}^{n} L_l, \quad x \to \infty;$$

если $\alpha_j = \rho_j + 1 > 0,\ 1 \leqslant j \leqslant n$, *то*

$$q_n(x) \sim k_n\, e^{-\lambda\, x}\, x^{n-1} \prod_{j=1}^{n} \widehat{p}_j(x), \quad x \to \infty.$$

Отметим, что последнее утверждение обобщает теорему 1A из [10].

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы* 3 *и, кроме того, функции распределения* $F_j(x),\ n < j \leqslant n + m$, *при всех достаточно больших* x *имеют плотности* $p_j(x)$, *такие что*

$$\limsup_{x\to\infty} e^{\widetilde{\lambda} x}\, p_j(x) < \infty \quad (\widetilde{\lambda} > \lambda).$$

Тогда

$$q_{n+m}(x) \sim q_n(x) \prod_{j=n+1}^{n+m} \mathbf{E} e^{\lambda X_j}, \quad x \to \infty.$$

В заключение заметим, что теоремы 1–4 позволяют исчерпывающе ответить на поставленные в заметке вопросы.

§2. Доказательства

Начнем с доказательства теоремы 3. Вначале приведем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть функция распределения* $F_1(x)$ *при всех достаточно больших* x *имеет плотность* $p(x)$, *а* λ *– некоторая положительная постоянная. Обозначим*

$$P_*(x) = \int_{-\infty}^{x/2} p(x-y)\, F_2(dy), \quad \widehat{p}(y) = e^{\lambda\, y}\, p(y), \quad V(y) = \int_{-\infty}^{y} e^{\lambda\, t}\, F_2(dt)$$

(таким образом, $L = V(\infty) = \mathbf{E}e^{\lambda X_2}$ *и* $P_*(x) = e^{-\lambda x} \int\limits_{-\infty}^{x/2} \widehat{p}(x-y)\, V(dy)$*),* *и будем предполагать, что функция* $\widehat{p}(y) \in R(\rho)$ *с некоторым показателем* ρ*. Тогда, если* $L < \infty$*, то*

$$P_*(x) \sim L\, p(x), \quad x \to \infty; \tag{2.1}$$

если $L = \infty$*, то*

$$P_*(x) \sim p(x) \int\limits_0^{1/2} (1-t)^\rho \, dV(x\,t), \quad x \to \infty. \tag{2.2}$$

В частности, если функция $V(y) \in \mathcal{R}(\alpha)$ *с некоторым показателем* $\alpha \geqslant 0$ $(L \leqslant \infty)$*, то*

$$P_*(x) \sim C(\alpha,\rho)\, p(x)\, V(x), \quad x \to \infty, \tag{2.3}$$

где $C(\alpha,\rho) = \alpha \int\limits_0^{1/2} t^{\alpha-1}\,(1-t)^\rho\, dt$ *(здесь* $C(0,\rho) = 1 = \lim\limits_{\alpha\to+0} C(\alpha,\rho)$*).*

Замечание 1. Соотношение (2.1) сохраняет справедливость, если вместо правильного поведения функции $\widehat{p}(y)$ ограничиться следующими предположениями:

$$\bar{p}(x) = \sup_{y>x} p(y) = O\,(p(x)), \qquad \sup_{x/2<y<x} \widehat{p}(y) = O\,(\widehat{p}(x)), \quad x \to \infty, \tag{2.4}$$

и при некоторой функции η, стремящейся к бесконечности вместе с x,

$$\lim_{x\to\infty} \sup_{|t|<1} \frac{|\widehat{p}(x+t\eta) - \widehat{p}(x)|}{\widehat{p}(x)} = 0. \tag{2.5}$$

Замечание 2. Если функция распределения $F_2(y)$ при всех достаточно больших y имеет плотность $u(y)$, такую что $\widehat{u}(y) \sim e^{\lambda\, y}\, u(y)$, $y \to \infty$ и $\widehat{u}(y) \in R(\gamma)$, то $V(y) \in R(\alpha)$, где $\alpha = (1+\gamma)^+$. При этом, если $1+\gamma > 0$, то $V(x) \sim x\,\widehat{u}(x)/(1+\gamma)$, $x \to \infty$, а если $1+\gamma \leqslant 0$, то, в зависимости от того будет ли $L < \infty$ или $L = \infty$, либо $V(x) \to L$, либо $V(x) \sim \widehat{V}(x) = \int\limits_0^x \widehat{u}(y)\, dy$. В последнем случае $1+\gamma = 0$ и функция $\widehat{V}(x)$ медленно меняется на бесконечности. В самом деле,

$$(\widehat{V}(kx) - \widehat{V}(x))/\widehat{V}(x) \leqslant \int\limits_x^{kx} \widehat{u}(y)dy \Big/ \int\limits_{\varepsilon x}^{x} \widehat{u}(y)dy = O\,(\ln k/\ln 1/\varepsilon), \quad x \to \infty,$$

при любом фиксированном $k \geqslant 1$ и некоторой функции $\varepsilon = \varepsilon(x) \to +0$.

Доказательство леммы 1. Имеем,

$$P_*(x) = \left(\int\limits_{-\infty}^{-\eta} + \int\limits_{|y|<\eta} + \int\limits_{\eta}^{x/2} \right) p(x-y)\, F_2(dy) = I_1 + I_2 + I_3. \tag{2.6}$$

При этом, если $L < \infty$, то

$$I_1 \leqslant \bar{p}(x+\eta)\, F_2(-\eta), \quad I_3 \leqslant e^{-\lambda\, x}\, (L - V(\eta)) \sup_{x/2<y<x} \widehat{p}(y) \tag{2.7}$$

и

$$I_2 = e^{-\lambda\, x}\, \widehat{p}(x) \int\limits_{|y|<\eta} \Big(1 + \frac{\widehat{p}(x-y) - \widehat{p}(x)}{\widehat{p}(x)} \Big)\, V(dy).$$

Отсюда и из условий (2.4) и (2.5) вытекает соотношение (2.1) (с учетом замечания 1).

Пусть теперь $\widehat{p}(x) \in R(\rho)$. Тогда (см. (2.6) и (2.7)), принимая во внимание свойства медленно меняющихся функций, найдем

$$\begin{aligned} &I_1 = o\,(p(x)), \quad I_2 + I_3 \sim p(x)\, x^{-\rho} \int\limits_{-\eta}^{x/2} (x-y)^\rho\, V(dy) \\ &= p(x) \Big(\int\limits_0^{1/2} (1-t)^\rho\, V(x\, dt) + (1 + o\,(1))\, V(0) \Big), \quad x \to \infty. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Отсюда при $L = \infty$ следует (2.2).

Для проверки (2.3) проинтегрируем в правой части (2.2) по частям. С учетом того, что $V(y) \in R(\alpha)$, получим

$$\int\limits_0^{1/2} (1-t)^\rho\, V(x\, dt) = V(x)\, \big(2^{-\alpha-\rho} - \int\limits_0^{1/2} t^\alpha\, d(1-t)^\rho + o\,(1) \big) - V(0), \quad x \to \infty.$$

Последнее вместе с (2.8), приводит к (2.3). Лемма 1 полностью доказана. □

Вернемся к доказательству теоремы 3. Из равенства

$$q_2(x) = \int_{-\infty}^{x/2} p_1(x-y)\, F_2(dy) + \int_{-\infty}^{x/2} p_2(x-y)\, p_1(y)\, dy \tag{2.9}$$

и леммы 1 следует, что при $x \to \infty$

$$q_2(x) \sim C(\alpha_2, \rho_1)\, p_1(x)\, V_2(x) + C(\alpha_1, \rho_2)\, p_2(x)\, V_1(x). \tag{2.10}$$

Теперь, если $\alpha_j > 0$, $j = 1, 2$, то $V_j(x) \sim x\,\widehat{p}_j(x)/\alpha_j$, $x \to \infty$, по замечанию 2. Значит, $\widehat{p}_1(x)\, V_2(x) \sim x\,\widehat{p}_1(x)\,\widehat{p}_2(x)/\alpha_2$ и $\widehat{p}_2(x)\, V_1(x) \sim x\,\widehat{p}_1(x)\,\widehat{p}_2(x)/\alpha_1$. Отсюда и из (2.10) получим (см. (2.3))

$$\begin{aligned} e^{\lambda x}\, q_2(x) &\sim \left(\int_0^{1/2} t^{\alpha_2-1}\,(1-t)^{\alpha_1-1}\,dt + \int_0^{1/2} t^{\alpha_1-1}\,(1-t)^{\alpha_2-1}\,dt\right) x\,\widehat{p}_1(x)\,\widehat{p}_2(x) \\ &= B\,x\,\widehat{p}_1(x)\,\widehat{p}_2(x) \sim B\,(p_1(x)\,V_2(x) + p_2(x)\,V_1(x))\,(1/\alpha_1 + 1/\alpha_2)^{-1}, \end{aligned}$$

где $B = \Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)/\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)$.

Таким образом, (1.5) при $n = 2$ и $\alpha_j > 0$ выполняется.

Пусть теперь α_1 или α_2 равно нулю. Если это происходит одновременно, то по (2.10) соотношение (1.5), $n = 2$, снова выполняется. Если же, скажем, $\alpha_1 = 0$, а $\alpha_2 > 0$, то при любом $\varepsilon \in (0,1)$

$$V_1(x) \geqslant \int_{\varepsilon x}^{x} \widehat{p}_1(y)\, dy \sim x\,\widehat{p}_1(x)\,\eta(\varepsilon), \quad x \to \infty,$$

где $\eta(\varepsilon) = |\ln\varepsilon|$, если $\rho_1 + 1 = 0$, и $\eta(\varepsilon) = \varepsilon^{\rho_1+1}/|\rho_1+1|$, если $\rho_1 + 1 < 0$, откуда $\widehat{p}_1(x)\, V_2(x) = o\,(\widehat{p}_2(x)\, V_1(x))$ и $e^{\lambda x}\, I_2(x) \sim \widehat{p}_2(x)\, V_1(x) \sim (V_1(x)\, V_2(x))'$.

Итак, утверждение теоремы 3 при $n = 2$ справедливо.

Чтобы доказать общую формулу, воспользуемся индукцией. Будем исходить из равенства $q_{n+1}(x) = q_n * p_{n+1}(x)$, считая без потери общности, что $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \rho_j = \rho_n$. По индукционному предположению (и (1.5))

$$q_n(x) \sim \sum_{j=1}^{n} p_j(x) \prod_{l\neq j} V_l(x). \tag{2.11}$$

Отсюда следует (см. (1.4) и замечание 2), что $e^{\lambda x}\, q_n(x) \in R(\widetilde{\rho})$ при $\widetilde{\rho} = \rho_n + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}$. Положим

$$\widetilde{\alpha} = (1+\widetilde{\rho})^+, \quad \widetilde{V}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\lambda y}\, q_n(y)\, dy,$$
$$\widetilde{C} = \Gamma(1+\widetilde{\alpha})\, \Gamma(1+\alpha_{n+1})/\Gamma(1+\widetilde{\alpha}+\alpha_{n+1}).$$

В соответствии с (1.5), $n=2$, получим

$$q_{n+1}(x) \sim \widetilde{C}\,\big(q_n(x)\, V_{n+1}(x) + p_{n+1}(x)\, \widetilde{V}(x)\big). \tag{2.12}$$

Если $\widetilde{V}(\infty) < \infty$, то $\widetilde{V}(x) \to \prod\limits_{j=1}^{n} V_j(\infty) \sim \prod\limits_{j=1}^{n} V_j(x),\ x \to \infty$ и (см.(1.3)) $\alpha = 0$, $\widetilde{C} = 1$. Поэтому, согласно (2.11) и (2.12), индукционный переход в этом случае осуществлен.

Пусть теперь $\widetilde{V}(\infty) = \infty$. Тогда по индукционному предположению

$$\widetilde{V}(x) \sim \int\limits_{\eta}^{x} e^{\lambda y}\, q_n(y)\, dy \sim C_n \int\limits_{\eta}^{x} e^{\lambda y}\,\Big(\prod_{j=1}^{n} V_j(y)\Big)'\, dy \sim C_n \int\limits_{\eta}^{x} e^{\lambda y} \prod_{j=1}^{n} V_j(x),$$

если только $\eta \to \infty$ достаточно медленно. Поэтому,

$$q_{n+1}(x) \sim \widetilde{C}\, C_n\,\Big(\prod_{j=1}^{n} V_j(x)\Big)'.$$

Но $\widetilde{C}\, C_n$ здесь совпадает с C_{n+1}, так как $\widetilde{\alpha} = \alpha$. Действительно, $\widetilde{\alpha} = (1+\rho_n - \alpha_n + \alpha)^+$ и, если $1+\rho_n \geqslant 0$, то $\widetilde{\alpha} = \alpha^+ = \alpha$, а если $1+\rho_n < 0$, то все α_j равны нулю, и $\widetilde{\alpha} = 0 = \alpha$.

Таким образом, индукционный переход осуществлен и в этом случае. Следовательно, теорема 3 полностью доказана.

Доказательство теоремы 1. Очевидно,

$$\begin{aligned} 1 - F_1 * F_2(x) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{F}_1(x-y)\, F_2(dy) \\ &= \int\limits_{-\infty}^{x/2} \bar{F}_1(x-y)\, F_2(dy) + \int\limits_{-\infty}^{x/2} \bar{F}_2(x-y)\, F_1(dy) + \bar{F}_1(x/2)\, \bar{F}_2(x/2). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Дальнейшие рассуждения будут мало отличаться от доказательства теоремы 3, если вместо (2.9) рассматривать (2.13) и в соответствующих формулах заменить $p_j(\,\cdot\,)$ на $\bar{F}_j(\,\cdot\,)$, $\widehat{p}_j(\,\cdot\,)$ на $\widehat{F}_j(\,\cdot\,)$. В частности, справедливы аналоги замечания 2 и леммы 1, причем без первого условия в (2.4). Надо также иметь в виду, что если $V_j(\infty) = \infty$, то $V_j(x) \sim \lambda \int\limits_\eta^x \widehat{F}_j(y)\,dy$, $x \to \infty$, где $\eta = \eta(x)$ достаточно медленно растет к бесконечности, а если $V_j(\infty) < \infty$, то $\widehat{F}_j(x) \leqslant \int\limits_x^\infty e^{\lambda y}\,F_j(dy) \to 0$, $x \to \infty$. □

Доказательства теорем 2 и 4 проводятся единообразно. Например,

$$Q_{n+1}(x) = \left(\int\limits_{-\infty}^{x/2} + \int\limits_{x/2}^{\infty}\right) Q_n(x-y)\,F_{n+1}(dy) = I_1 + I_2.$$

Имея в виду то, что по (1.1), (1.2) и замечанию 2 функция $e^{\lambda x}\,Q_n(x)$ правильно меняется на бесконечности, в условиях теоремы 2 несложно показать, что

$$I_1 \sim Q_n(x)\,\mathbf{E}\,e^{\lambda X_{n+1}}, \quad I_2 = o\big(Q_n(x)\big), \quad x \to \infty,$$

откуда следует утверждение теоремы 2 при $m = 1$. Общий случай проверяется индукцией по m.

Автор выражает признательность С. Фоссу и Д. Коршунову за полезные консультации.

Список литературы

1. А. А. Боровков, *Асимптотический анализ случайных блужданий. Быстро убывающие распределения приращений*, Москва, Физматлит, 2013.
2. А. А. Боровков, А. А. Могульский, *О больших и сверхбольших уклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера.* — Теория вероятн. и ее примен., **51**, No. 4 (2006), 641–673.
3. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2,Москва, Мир, 1984.
4. D. B. H. Cline, *Convolution tails, product tails and domains of attraction.* — Probab. Theory Relat. Fields **72**, No. 4 (1986), 529–557.
5. A. G. Pakes, *Convolution equivalence and infinite divisibility.* — J. Appl. Probab. **41** (2004), 407–424.
6. С. Захари, С. Г. Фосс, *О точной асимптотике максимума случайного блуждамя с приращениями из одного класса распределений с тонкими хвостами.* — Сиб. матем. журн. **47**, No. 6 (2006), 1265–1274.

7. С. Г. Фосс, *О точной асимптотике стационарного распределения времени пребывания в тандеме систем обслуживания для одного класса распределений с тонкими хвостами.* — Пробл. передачи информ. **43**, No. 4 (2007), 93–108.
8. T. Watanabe, *Convolution equivalence and distributions of random sums.* — Probab. Theory Relat. Fields **142** (2008), 367–397.
9. А. А. Боровков, *Теория вероятностей*, Москва, Эдиториал УРСС, 1999.
10. Л. В. Розовский, *О сверхбольших уклонениях суммы независимых случайных величин с общим абсолютно непрерывным распределением, удовлетворяющим условию Крамера.* — Теория вероятн. и ее примен. **48**, No. 1 (2003), 78–103.

Rozovskii L. V. On the asymptotic behaviour of the convolution of distributions with regularly exponentially decreasing tails.

In the note the asymptotic behaviour of the tail of distribution and density of a sum of independent random variables is studying in the case when the tails of the distributions (densities) of the summands decrease exponentially at infinity.

С.-Петербургский государственный
химико-фармацевтический
университет (СПГХФУ),
ул. проф. Попова 14,
197376 С.-Петербург, Россия
E-mail: L_Rozovsky@mail.ru

Поступило 19 ноября 2019 г.