Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 486, 2019 г.

М. В. Платонова, С. В. Цыкин

ОБ ОДНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ, СВЯЗАННОЙ С РЕШЕНИЕМ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПОРЯДКА $\alpha \in \bigcup\limits_{m=3}^{\infty}(m-1,m)$

§1. Введение

Рассмотрим задачу Коши

$$-i\,\frac{\partial u}{\partial t} = c_\alpha \mathcal{D}^\alpha u, \ \ u(0,x) = \varphi(x), \tag{1}$$

где

$$\alpha \in \bigcup_{m=3}^{\infty}(m-1,m),$$

$\mathcal{D}^\alpha$ – симметричный оператор дробного дифференцирования порядка α, а константа c_α имеет вид

$$c_\alpha = -\frac{1}{\alpha\cos(\frac{\pi\alpha}{2})}.$$

Оператор $\mathcal{D}^\alpha$ является псевдодифференциальным оператором с символом $\cos(\frac{\pi\alpha}{2})|p|^\alpha$. При $\alpha = 2$ оператор $\mathcal{D}^\alpha$ – это оператор дифференцирования второго порядка, а соответствующая задача Коши (1) отвечает уравнению Шрёдингера.

В работах [5, 6] был предложен метод построения вероятностной аппроксимации решения задачи Коши (1) для

$$\alpha \in \bigcup_{m=2}^{\infty}(m-1,m).$$

Для построения вероятностной аппроксимации в этой работе использовалось семейство $\xi_\varepsilon(t)$ сложных пуассоновских процессов. При каждом

Ключевые слова: дробные производные, уравнение Шрёдингера, предельные теоремы.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 19-71-30002.

$\varepsilon > 0$ процесс $\xi_\varepsilon(t)$ определялся, как

$$\xi_\varepsilon(t) = \int\limits_{[0,t]\times(\varepsilon,\infty)} x\,\nu(dt,dx),$$

где ν – пуассоновская случайная мера на $(0,\infty)\times(0,\infty)$ с интенсивностью

$$d\mu = \frac{dt\,dx}{\big|\Gamma(1-\alpha)\big|x^{1+\alpha}}.$$

Далее для каждого $\varepsilon > 0$ определялась полугруппа P^t_ε операторов в $L_2(\mathbf{R})$. Каждый такой оператор действовал на $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ по формуле

$$P^t_\varepsilon\varphi(x) = \mathbf{E}\left[(P_-\varphi * g_\varepsilon)(x-\sigma\xi_\varepsilon(t)) + (P_+\varphi * g_\varepsilon)(x+\sigma\xi_\varepsilon(t))\right],$$

где $P_\pm$ – проекторы Рисса, действующие из $L_2(\mathbf{R})$ на пространства Харди $H^2(\mathbf{C}_\pm)$ в верхней и нижней полуплоскостях, $\sigma = e^{\frac{\pi i}{2}(1-\frac{1}{\alpha})}$, а функция $g_\varepsilon(x)$ определялась своим преобразованием Фурье: для $m = 2k,\ k \in \mathbf{N}$, формулой

$$\widehat{g_\varepsilon}(p) = \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^\infty \sum_{j=1}^{m-1}\frac{(i|p|\sigma x)^j}{j!}d\mu(x)\Big)\exp\Big(t\int\limits_0^\varepsilon \frac{(i|p|\sigma x)^m}{m!}d\mu(x)\Big),$$

а для $m = 2k+1$ формулой

$$\widehat{g_\varepsilon}(p) = \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^\infty \sum_{j=1}^{m-1}\frac{(i|p|\sigma x)^j}{j!}\,d\mu(x)\Big)$$
$$\times\exp\Big(t\int\limits_0^\varepsilon \Big(\frac{(i|p|\sigma x)^m}{m!}+\frac{(i|p|\sigma x)^{m+1}}{(m+1)!}\Big)\,d\mu(x)\Big).$$

В [5, 6] было показано, что при $\varepsilon \to 0$ полугруппы P^t_ε аппроксимируют в смысле сильной операторной сходимости полугруппу

$$P^t = \exp\big(itc_\alpha\mathcal{D}^\alpha\big)$$

(напомним, что по определению для каждого $t > 0$ оператор P^t переводит начальную функцию φ в решение задачи Коши (1)).

В работах [1] и [2] были построены два типа аппроксимации решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера ($\alpha = 2$) средними значениями функционалов от стохастических процессов: в первом случае решение аппроксимировалось средними значениями функционалов от пуассоновского точечного поля, а во втором случае – средними значениями функционалов от нормированных сумм независимых случайных величин с общим симметричным распределением и конечным четвертым моментом.

В данной работе будет показано, что решение задачи Коши (1) также может быть аппроксимировано математическими ожиданиями функционалов от сумм независимых одинаково распределенных случайных величин со степенной асимптотикой хвостового распределения.

§2. Основные обозначения и определения

Прямое преобразование Фурье в настоящей работе определяется как

$$\widehat{\varphi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{ipx} dx,$$

а, соответственно, обратное преобразование как

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(p) e^{-ipx} dp.$$

Через $W_2^k(\mathbf{R})$ обозначим пространство функций Соболева, определенных на $\mathbf{R}$ и имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные до порядка k включительно (см. [8, стр. 146]). Стандартная норма в пространстве $W_2^k(\mathbf{R})$ определяется формулой

$$\|\psi\|_k^2 = \sum_{l=0}^{k} \int_{\mathbf{R}} |\psi^{(l)}(x)|^2 \, dx.$$

Нам удобно использовать в пространстве $W_2^k(\mathbf{R})$ другую норму, эквивалентную стандартной (см. [8], стр. 190),

$$\|\psi\|_{W_2^k(\mathbf{R})}^2 = \int_{\mathbf{R}} (1 + |p|^{2k}) |\widehat{\psi}(p)|^2 dp.$$

Оператор A, действующий по правилу

$$(A\varphi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-ipx} A(p) \widehat{\varphi}(p) dp,$$

называется псевдодифференциальным оператором с символом $A(p)$.

Для ограниченного оператора $A : W_2^k(\mathbf{R}) \to W_2^l(\mathbf{R})$ через

$$\|A\|_{W_2^k \to W_2^l}$$

будем обозначать соответствующую операторную норму.

Для $\alpha > 0$ через $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ будем обозначать целую и дробную часть числа α.

Симметричный оператор дробной производной определяется на гладких функциях f формулой (подробнее см. [7])

$$(\mathcal{D}^\alpha f)(x) = \frac{1}{2\Gamma(-\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y) - f(x) + \sum\limits_{j=1}^{[\alpha]} \frac{(-1)^{j-1} y^j f^{(j)}(x)}{j!}}{|y|^{1+\alpha}}\, dy,$$

где $\alpha \in \bigcup_{m=3}^{\infty}(m-1, m)$. Оператор дробного дифференцирования является псевдодифференциальным оператором. Легко показать, что для преобразования Фурье дробной производной справедливо

$$\widehat{(\mathcal{D}^\alpha \varphi)}(p) = \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)|p|^\alpha \widehat{\varphi}(p),$$

то есть оператор $\widehat{\mathcal{D}^\alpha}$ – оператор умножения на $\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)|p|^\alpha$.

Через $\mathbf{C}$ обозначим комплексную плоскость, а через $\mathbf{C}_+$ и $\mathbf{C}_-$ – соответственно верхнюю и нижнюю полуплоскости.

Далее напомним определение классов Харди $H^2(\mathbf{C}_+)$ и $H^2(\mathbf{C}_-)$. Функция F, аналитическая в верхней (нижней) полуплоскости комплексной плоскости, принадлежит классу $H^2(\mathbf{C}_+)$ (соответственно, $H^2(\mathbf{C}_-)$), если существует константа C, такая что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 dx \leqslant C,$$

при всех $y > 0\,(y < 0)$. Хорошо известно (см. [7]), что носитель преобразования Фурье граничного значения функции из $H^2(\mathbf{C}_-)$ лежит на положительной полуоси, а носитель преобразования Фурье граничного значения функции из $H^2(\mathbf{C}_+)$ содержится на отрицательной полуоси. Кроме того, верно и обратное утверждение. Именно, если $\Phi \in L_2(\mathbf{R})$ и $\Phi(p) = 0$ почти всюду при $p \geqslant 0$ $(p \leqslant 0)$, то существует функция F из $H^2(\mathbf{C}_+)$ (или $H^2(\mathbf{C}_-)$), для которой $\widehat{F}(p) = \Phi(p)$.

§3. Вероятностная аппроксимация решения задачи Коши

Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин с общим распределением $\mathcal{P}$. Предположим, что распределение $\mathcal{P}$ абсолютно непрерывно, и плотность распределения удовлетворяет следующим условиям:

$$q(x) = \frac{1+h(x)}{|\Gamma(1-\alpha)|x^{1+\alpha}},$$

где

$$-1 \leqslant h(x) \leqslant 0,$$

а при $|x| \to \infty$

$$|h(x)| \leqslant \frac{C}{x^{\beta}}, \quad \beta > m - 2\Big[\frac{m}{2}\Big] + 1 - \{\alpha\}. \tag{2}$$

Обозначим

$$\varkappa_j = \mathbf{E}\,\xi_1^j = \int\limits_0^{\infty} x^j q(x)\,dx, \quad j = 1, \dots, m-1,$$

$$a_j = \frac{1}{|\Gamma(1-\alpha)|}\int\limits_0^{\infty} \frac{h(x)x^j}{x^{1+\alpha}}\,dx < 0, \quad j = m,\, m+1.$$

Заметим, что из условия (2) следует, что при $\alpha \in (2k-1, 2k)$ величина a_{2k} конечна, а при $\alpha \in (2k, 2k+1)$ конечны величины a_{2k+1} и a_{2k+2}.

Пусть $\eta(t)$, $t \in [0,\infty)$ независимый от последовательности $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ пуассоновский процесс с интенсивностью единица. Для каждого натурального n определим случайный процесс $\zeta_n(t)$, $t \in [0,T]$, где

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j.$$

Представим начальную функцию φ в виде

$$\varphi(x) = P_+\varphi(x) + P_-\varphi(x) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x),$$

где P_+, P_- – проекторы Рисса, определяемые на $L_2(\mathbf{R})\cap L_1(\mathbf{R})$ как

$$P_+\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ipx}\,\widehat{\varphi}(p)\,dp,\quad P_-\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ipx}\,\widehat{\varphi}(p)\,dp.$$

Отметим, что функция φ_+ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, а функция φ_- аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость.

Выберем комплексное число

$$\sigma=e^{\frac{\pi i}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}.$$

Заметим, что $\sigma\in\mathbf{C}_+$ и $\operatorname{Re}\sigma>0$.

Для $n\in\mathbb{N}$ определим полугруппу операторов P_n^t, которая действует на $\varphi\in L_2(\mathbf{R})$ как

$$P_n^t\varphi(x)=\mathbf{E}\big[(\varphi_-*R_n^t)(x-\sigma\zeta_n(t))+(\varphi_+*R_n^t)(x+\sigma\zeta_n(t))\big],\qquad(3)$$

где функция R_n^t определяется своим преобразованием Фурье: при $m=2k$, $k\in\mathbf{N}$ формулой

$$\widehat{R_n^t}(p)=\exp\Big(-tn\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(i|p|\sigma)^j\varkappa_j}{n^{j/\alpha}j!}\Big)\exp\Big(-tn\frac{(i|p|\sigma)^m a_m}{n^{m/\alpha}m!}\Big),$$

а при $m=2k+1$, $k\in\mathbf{N}$ формулой

$$\widehat{R_n^t}(p)=\exp\Big(-tn\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(i|p|\sigma)^j\varkappa_j}{n^{j/\alpha}j!}\Big)$$
$$\times\exp\Big(-tn\frac{(i|p|\sigma)^m a_m}{n^{m/\alpha}m!}-tn\frac{(i|p|\sigma)^{m+1}a_{m+1}}{n^{m+1/\alpha}(m+1)!}\Big).$$

Покажем, что $\widehat{R_n^t}(p)$ убывает на бесконечности. Для этого заметим, что в случае $m=2k$ знак вещественной части коэффициента при $|p|^m$ под знаком экспоненты определяется величиной

$$\operatorname{Re}(i\sigma)^{2k}=\cos\left(\frac{\pi k}{\alpha}\right)<0,$$

а при $m=2k+1$ знак вещественной части коэффициента при $|p|^{m+1}$ под знаком экспоненты определяется величиной

$$\operatorname{Re}(i\sigma)^{2k+2}=\cos\left(\frac{\pi(k+1)}{\alpha}\right)<0.$$

Таким образом функция $\widehat{R^t_n}(p)$ убывает по p со скоростью $e^{-c_n p^m t}$ при $m = 2k$ и со скоростью $e^{-c_n p^{m+1} t}$ при $m = 2k+1$, где c_n некоторая положительная константа, зависящая от n.

Теорема 1. 1. *Оператор P^t_n является псевдодифференциальным оператором с символом*

$$r_{n,t}(p) = \exp\Big(-\frac{it|p|^\alpha}{\alpha}\Big) H_n(t,p), \tag{4}$$

где

$$H_n(t,p) = \begin{cases} \exp\Big(nt\int\limits_0^\infty \big(e^{\frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}} - \sum\limits_{j=0}^{m} \frac{(i|p|\sigma y)^j}{n^{j/\alpha} j!}\big) \frac{h(y)\,dy}{|\Gamma(1-\alpha)| y^{1+\alpha}}\Big), \ m = 2k, \\ \exp\Big(nt\int\limits_0^\infty \big(e^{\frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}} - \sum\limits_{j=0}^{m+1} \frac{(i|p|\sigma y)^j}{n^{j/\alpha} j!}\big) \frac{h(y)\,dy}{|\Gamma(1-\alpha)| y^{1+\alpha}}\Big), \ m = 2k+1. \end{cases}$$

2. *Для любых n, t, p справедливо неравенство*

$$|H_n(t,p)| \leqslant 1. \tag{5}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $\sigma = e^{\frac{\pi i}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}$. Тогда*

$$\frac{1}{|\Gamma(1-\alpha)|}\int\limits_0^\infty \Big(e^{i|p|\sigma y} - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(i|p|\sigma y)^j}{j!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} = \frac{-i|p|^\alpha}{\alpha}.$$

Лемма 2. *Пусть $\sigma = e^{\frac{\pi i}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}$ и $2k-2 < \alpha < 2k$, $\alpha \neq 2k-1$, $k = 2, 3, \ldots$. Для любого $x \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\operatorname{Re}\Big(e^{i\sigma x} - \sum_{j=0}^{2k} \frac{(i\sigma x)^j}{j!}\Big) \geqslant 0.$$

Доказательства данных утверждений можно найти в работе [6].

Заметим, что при каждом фиксированном n величина, стоящая под знаком математического ожидания в (3), ограничена. Пользуясь теоремой Фубини, получаем

$$P_n^t\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} \widehat{\varphi_+}(p)\widehat{R_n^t}(p)e^{-ipx}\mathbf{E}\,e^{-ip\sigma\zeta_n(t)}dp$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \widehat{\varphi_-}(p)\widehat{R_n^t}(p)e^{-ipx}\mathbf{E}\,e^{ip\sigma\zeta_n(t)}dp$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(p)\widehat{R_n^t}(p)e^{-ipx}\mathbf{E}\,e^{i|p|\sigma\zeta_n(t)}dp.$$

В силу теоремы Кэмпбелла (см. [4, стр. 44]), имеем

$$\mathbf{E}\,e^{i|p|\sigma\zeta_n(t)} = \exp\Big(nt\int_0^\infty \big(e^{\frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}}-1\big)q(y)\,dy\Big).$$

Из леммы 1 следует первое утверждение теоремы, а из леммы 2 следует второе утверждение. □

Далее, обозначим через P^t полугруппу операторов

$$P^t = \exp\bigg(-\frac{it}{\alpha\cos\frac{\pi\alpha}{2}}\mathcal{D}^\alpha\bigg).$$

По определению оператор P^t переводит начальную функцию φ в решение задачи Коши (1).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. 1. *Пусть $m = 2k$. Тогда для любого $l \geqslant 0$ существует число $C = C(l) > 0$, такое что для любой функции $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$ и всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\|P^t\varphi - P_n^t\varphi\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant Ctn^{-\frac{1-\{\alpha\}}{\alpha}}\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})}.$$

2. *Пусть $m = 2k+1$. Тогда для любого $l \geqslant 0$ существует число $C = C(l) > 0$, такое что для любой функции $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+2}(\mathbf{R}), l \geqslant 0$ и всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\|P^t\varphi - P_n^t\varphi\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant Ctn^{-\frac{2-\{\alpha\}}{\alpha}}\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+2}(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Для доказательства утверждения воспользуемся известной формулой теории возмущений. Именно, пусть A – оператор в некотором гильбертовом пространстве, такой что существует ограниченная ($t \geqslant 0$) операторная полугруппа

$$U_A(t) = e^{tA}.$$

Пусть B – некоторое возмущение оператора A, такое что полугруппа

$$U_{A+B}(t) = e^{t(A+B)}$$

также ограничена. Тогда справедливо следующее равенство (см. [3, гл. IX, §2, п. 1, стр. 614])

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int\limits_0^t e^{\tau(A+B)} B e^{(t-\tau)A} d\tau. \tag{6}$$

Применим формулу (6) для случая, когда $A = -\frac{i}{\alpha \cos \frac{\pi\alpha}{2}} \mathcal{D}^\alpha$, а $A + B = F_n$, где F_n – генератор полугруппы P_n^t. Из (4) следует, что F_n есть псевдодифференциальный оператор с символом $\widehat{f}_n(p)$, где

$$\widehat{f}_n(p) = \frac{1}{t} \ln(H_n(t,p)) - \frac{i|p|^\alpha}{\alpha}.$$

В нашем случае для любого $q > 0$ справедливо равенство

$$\|U_A(\tau)\|_{W_2^q \to W_2^q} = 1.$$

Заметим, что оператор B является псевдодифференциальным оператором с символом

$$\widehat{b}_n(p) = \frac{1}{t} \ln(H_n(t,p)).$$

При $m = 2k$ оценим норму оператора $\|B\|_{W_2^{l+[\alpha]+1} \to W_2^l}$. Имеем

$$\begin{aligned}
\|\widehat{B\varphi}\|^2_{W_2^l(\mathbf{R})} &= \int\limits_{\mathbf{R}} dp\,(1 + |p|^{2l}) |\widehat{B\varphi}(p)|^2 \\
&\leqslant C\, n^2 \int\limits_{\mathbf{R}} dp\,(1 + |p|^{2l}) |\widehat{\varphi}(p)|^2 \Big(\int\limits_0^\infty \big(e^{\frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}} - \sum_{j=0}^m \frac{(i|p|\sigma y)^j}{n^{j/\alpha} j!} \big) \frac{h(y)\, dy}{y^{1+\alpha}} \Big)^2 \\
&\leqslant C\, n^{2-2m/\alpha} \int\limits_{\mathbf{R}} dp\,(1 + |p|^{2l+2m}) |\widehat{\varphi}(p)|^2 \leqslant C\, n^{-\frac{2(1-\{\alpha\})}{\alpha}} \|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})}.
\end{aligned}$$

При $m = 2k+1$ оценим норму оператора $\|B\|_{W_2^{l+[\alpha]+2} \to W_2^l}$. Имеем

$$\|\widehat{B\varphi}\|^2_{W_2^l(\mathbf{R})} = \int\limits_{\mathbf{R}} dp\,(1+|p|^{2l})|\widehat{B\varphi}(p)|^2$$

$$\leqslant C\,n^2 \int\limits_{\mathbf{R}} dp\,(1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi}(p)|^2 \Big(\int\limits_0^\infty \big(e^{\frac{i|p|\sigma y}{n^{1/\alpha}}} - \sum_{j=0}^{m+1} \frac{(i|p|\sigma y)^j}{n^{j/\alpha} j!}\big) \frac{h(y)\,dy}{y^{1+\alpha}}\Big)^2$$

$$\leqslant C n^{2-\frac{2(m+1)}{\alpha}} \int\limits_{\mathbf{R}} dp\,(1+|p|^{2l+2m+2})|\widehat{\varphi}(p)|^2 \leqslant C n^{-\frac{2(2-\{\alpha\})}{\alpha}} \|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+2}(\mathbf{R})}.$$

Для доказательства утверждения остается заметить, что из (5) следует оценка для нормы оператора $\|U_{A+B}(\tau)\|_{W_2^q \to W_2^q}$ для любого $q > 0$. Именно,

$$\|U_{A+B}(\tau)\|_{W_2^q \to W_2^q} \leqslant 1.$$

Отсюда следует утверждение теоремы. □

Авторы выражают благодарность Н. В. Смородиной за внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

1. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Об одной предельной теореме, связанной с вероятностным представлением решения задачи Коши с оператором Шрёдингера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 158–175.
2. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Вероятностная аппроксимация оператора эволюции.* — Функц. анализ и его прил. **52**, No. 2 (2018), 25–39.
3. Т Като, *Теория возмущений линейных операторов,* Мир, М., 1972.
4. Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы,* МЦНМО, М., 2007.
5. М. В. Платонова, С. В. Цыкин, *Вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера с оператором дробного дифференцирования.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 257–272.
6. М. В. Платонова, С. В. Цыкин, *Вероятностный подход к решению задачи Коши для уравнения Шрёдингера с оператором дробного дифференцирования порядка* $\alpha \in \bigcup\limits_{m=3}^{\infty} (m-1, m)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **474** (2018), 199–212.
7. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения,* Наука и техника, Минск, 1987.
8. Д. К. Фаддеев, Б. З. Вулих, Н. Н. Уральцева, *Избранные главы анализа и высшей алгебры,* Издательство Ленинградского университета, 1981.

Platonova M. V., Tsykin S. V. On a limit theorem related to a Cauchy problem solution for the Schrödinger equation with a fractional derivative operator of the order $\alpha \in \bigcup\limits_{m=3}^{\infty}(m-1, m)$.

We prove a limit theorem on convergence of mathematical expectations of functionals of sums of independent random variables to a Cauchy problem solution for the nonstationary Schrödinger equation with a symmetric fractional derivative operator of the order $\alpha \in \bigcup\limits_{m=3}^{\infty}(m-1, m)$ in the right hand side.

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский государственный университет, Лаборатория им. П. Л. Чебышева
С.-Петербург, Россия

Поступило 5 ноября 2019 г.

С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
С.-Петербург 199034, Россия

E-mail: mariyaplat@rambler.ru

E-mail: sergei.tcykin@gmail.com