Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 486, 2019 г.

М. В. Платонова, К. С. Рядовкин

О ДИСПЕРСИИ ЧИСЛЕННОСТИ ЧАСТИЦ НАДКРИТИЧЕСКОГО ВЕТВЯЩЕГОСЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ НА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРАФАХ

§1. Введение

Теория ветвящихся случайных блужданий (ВСБ) является одним из важных разделов теории стохастических процессов. Задачи, связанные с ВСБ, возникают в биологии [7], экономике [9], химической кинетике [4], популяционной динамике [2].

Для описания ВСБ необходимо определить по каким правилам происходит случайное блуждание, множество точек, в которых частицы могут производить потомков, и механизм ветвления в данных точках. В данной работе рассматривается случайное блуждание на $\mathbf{Z}^d$. Как и классические ветвящиеся процессы, ВСБ можно классифицировать на надкритические, критические и докритические, в зависимости от интенсивности ветвления в источниках и свойств случайного блуждания. Надкритический режим характеризуется тем, что локальная численность частиц растет экспоненциально быстро.

В работе [22] было показано, что поведение численности частиц зависит от свойств некоторого оператора, а моменты локальной и полной численности частиц являются решениями дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, и вопрос об изучении асимптотического поведения моментов может быть сведен к изучению спектра этого оператора. Было показано, что если в спектре оператора существует положительное собственное значение, то численность частиц в данном ВСБ растет экспоненциально, а значит ВСБ является надкритическим. Свойства численностей частиц надкритического ВСБ с конечным числом источников и однородной матрицей интенсивностей переходов случайного блуждания исследовались в работах [6, 13, 22].

Ключевые слова: ветвящееся случайное блуждание, периодическое возмущение, эволюционное уравнение.

Работа выполнена при поддержке программы социальных инвестиций “Родные города” ПАО “Газпром нефть”.

В работе [6] было показано, что если в спектре оператора существует положительное собственное значение λ, то при $t \to +\infty$ для локальной (т.е. относящейся к точке $u \in \mathbf{Z}^d$) $\mu(t,u)$ и полной численностей частиц $\mu(t)$ справедливо

$$\lim_{t\to+\infty} \mu(t,u)e^{-\lambda t} = \xi\psi(u), \quad \lim_{t\to+\infty} \mu(t)e^{-\lambda t} = \xi,$$

где $\psi(u)$ – некоторая функция на $\mathbf{Z}^d$, а ξ – невырожденная случайная величина. Отметим, что в этой работе нет ограничений на дисперсию скачков случайного блуждания. Данные результаты обобщают результаты, в которых рассматривалась модель ВСБ с одним источником ветвления и конечной дисперсией скачков случайного блуждания (см. [13, 22]).

В работе [12] была введена другая модель ВСБ – каталитическое ветвящееся случайное блуждание по $\mathbf{Z}$ с одним источником ветвления в начале координат. Был введен дополнительный параметр, отвечающий за соотношение между "ветвлением" и "блужданием" в источнике ветвления, что привело к нарушению симметрии генератора случайного блуждания. В последующих работах [14, 16–18] было продолжено исследование таких моделей для случая целочисленной решетки произвольной конечной размерности $\mathbf{Z}^d$. Отметим, что в работах [17, 18] было исследовано асимптотическое поведение вероятностей невырождения такого процесса к моменту $t \to +\infty$ и наличия в нуле хотя бы одной частицы в момент времени $t \to +\infty$, а также доказаны условные предельные теоремы для количества частиц, находящихся в момент времени t в начале координат и вне его. Отметим еще работу [15], в которой данные результаты обобщаются на случай конечного числа источников ветвления. В этих работах используется другой подход, основанный на представлении ВСБ как ветвящегося процесса с несколькими типами частиц, а также на применении многомерных теорем восстановления.

Оператор, отвечающий за поведение численностей частиц, оказывается дискретным оператором Лапласа. Исследование спектральных свойств такого оператора Лапласа на конечных графах можно найти, например, в [3, 10], а на периодических графах в – [1, 5, 8].

Ветвящиеся случайные блуждания с бесконечным числом источников, расположенных периодически на $\mathbf{Z}^d$, исследованы мало. В работе авторов [20] было найдено асимптотическое поведение локальной средней численности частиц ВСБ на периодическом графе с периодически расположенными источниками ветвления. В данной работе исследуется асимптотическое поведение второго момента локальной численности частиц в надкритическом случае.

Случайное блуждание. Пусть $g_1, \ldots, g_d \in \mathbf{Z}^d$ – набор линейно независимых векторов с целочисленными координатами. Будем называть решеткой множество

$$\Gamma = \Big\{ g \in \mathbf{Z}^d : g = \sum_{j=1}^{d} n_j g_j,\ n_j \in \mathbf{Z},\ j = 1, \ldots, d \Big\},$$

а множество $\{g_j\}_{j=1}^d$ будем называть базисом решетки Γ. Отметим, что различные базисы могут порождать одну и ту же решетку.

Введем на $\mathbf{Z}^d$ отношение эквивалентности следующим образом: точки $u, v \in \mathbf{Z}^d$ назовем эквивалентными, если $u - v \in \Gamma$. Соответствующее фактор-пространство обозначим через $\Omega = \mathbf{Z}^d/\Gamma$. Множество Ω конечно. Через p обозначим число элементов этого множества. Будем называть Ω фундаментальным множеством вершин. Его удобно отождествить с некоторым множеством $\{v_1, \ldots, v_p\}$ попарно неэквивалентных элементов $\mathbf{Z}^d$. Для фиксированного выбора $\Omega = \{v_1, \ldots, v_p\}$ любая вершина $u \in \mathbf{Z}^d$ единственным образом представляется в виде

$$u = \omega_u + \gamma_u, \tag{1}$$

где $\omega_u \in \Omega$ и $\gamma_u \in \Gamma$. Мы будем называть вершину ω_u проекцией вершины u на фундаментальное множество, а вектор γ_u – проекцией u на решетку Γ.

Будем обозначать через $\|g\|$ евклидову норму вектора в $\mathbf{R}^d$. Предположим, что случайное блуждание частиц имеет матрицу переходных интенсивностей $\big(a(v,u)\big)_{v,u \in \mathbf{Z}^d}$, для элементов которой выполнены условия

(i) $a(v,u) \geqslant 0, \quad v \neq u$;
(ii) $a(v,v) < 0$;
(iii) $\sum\limits_{u \in \mathbf{Z}^d} a(v,u) = 0$;
(iv) $a(v,u) = a(u,v) = a(v+g, u+g), \quad \forall g \in \Gamma$;
(v) $\sum\limits_{u \in \mathbf{Z}^d} \|u\|^2 |a(v,u)| < +\infty,\ v \in \mathbf{Z}^d$;
(vi) Граф $G = (\mathbf{Z}^d, \mathcal{E})$ с множеством вершин $\mathbf{Z}^d$ и множеством ребер

$$\mathcal{E} = \big\{(v,u) :\ a(v,u) > 0,\ v,u \in \mathbf{Z}^d\big\} \ \text{ является связным.}$$

Условие (iv) означает, что матрица интенсивностей переходов является симметричной, а ее коэффициенты инвариантны относительно сдвига на любой вектор из Γ. Условие (v) означает конечность дисперсии скачков случайного блуждания. Условие (vi) означает, что блуждание неприводимо (см. [19, §6, гл. 3]), то есть каждая вершина $\mathbf{Z}^d$ является достижимой. Существование данного марковского процесса обеспечивает [19, теорема 2, §3, гл. 7].

Механизм ветвления. Размножение и гибель частиц в источнике ветвления задается процессом Бьенэме–Гальтона–Ватсона с непрерывным временем. Источник ветвления в вершине $v \in \mathbf{Z}^d$ в рассматриваемой нами модели описывается производящей функцией

$$B(v,s) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(v) s^k, \tag{2}$$

где функции $b_k(v)$ – интенсивности деления частицы на k потомков – удовлетворяют следующим условиям:

(a) $b_k(v) \geqslant 0, \quad k \neq 1$;
(b) $b_1(v) \leqslant 0$;
(c) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k(v) = 0$;
(d) $\beta_1(v) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k b_k(v) = \partial_s B(v,s)\Big|_{s=1} < +\infty$;
$\beta_2(v) = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} k(k-1) b_k(v) = \partial_s^2 B(v,s)\Big|_{s=1} < +\infty$;
(e) $\beta_1(v+g) = \beta_1(v), \quad \beta_2(v+g) = \beta_2(v), \quad \forall g \in \Gamma$.

Условие (e) означает, что функции $\beta_n(v)$, $n = 1, 2$, являются инвариантными относительно сдвига на любой вектор из Γ. Соответственно, в общем случае на всем $\mathbf{Z}^d$ есть источники p различных интенсивностей. Если мы отождествляем Ω с множеством $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$, то соответствующие коэффициенты $b_k(v_j)$ будем обозначать b_{jk}. Отметим, что случаю отсутствия источника в вершине v_j соответствует $b_{jk} = 0$ для любого k.

Таким образом, каждая частица, находящаяся в момент времени t в некоторой точке $v = v_j + \gamma_v$, $\gamma_v \in \Gamma$, независимо от остальных частиц в системе, может на малом интервале времени $[t, t+\tau)$ перейти с вероятностью $a(v,u)\tau + o(\tau)$ в точку $u \neq v$, или произвести $k \neq 1$ потомков, находящихся в точке v, с вероятностью $b_{jk}\tau + o(\tau)$, или сохраниться (то есть никаких изменений не произойдет) с вероятностью

$$1 - \sum_{u \neq v} a(v,u)\tau - \sum_{k \neq 1} b_{jk}\tau + o(\tau) = 1 + a(v,v)\tau + b_{j1}\tau + o(\tau).$$

Основные результаты. Обозначим через $M_1(v,u,t)$ и $M_2(v,u,t)$ первый и второй моменты числа частиц в вершине u в момент времени t при условии, что в начальный момент времени была одна частица в вершине v.

В [20] было показано, что изучение асимптотического поведения среднего числа частиц $M_1(v,u,t)$ сводится к изучению спектра оператора

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + Q, \tag{3}$$

где $\mathcal{A}_0$ – это генератор случайного блуждания (оператор, определяемый матрицей A_0)

$$\mathcal{A}_0 f(v) = \sum_{u \in \mathbf{Z}^d} a(v,u) f(u),$$

а Q – оператор поточечного умножения на функцию, периодическую относительно решетки Γ,

$$\begin{aligned} &(Qf)(v) = Q(v)f(v), \quad Q(v) = Q(v+g), \quad \forall g \in \Gamma, \\ &\quad Q(v_j) = \beta_j, \quad v_j \in \Omega. \end{aligned}$$

Оператор Q описывает механизм ветвления в источниках.

Было показано, что спектр оператора $\mathcal{A}$ может быть выражен через собственные значения семейства матриц

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11}(\theta) + \beta_1 & \widetilde{a}_{12}(\theta) & \cdots & \widetilde{a}_{1p}(\theta) \\ \widetilde{a}_{21}(\theta) & \widetilde{a}_{22}(\theta) + \beta_2 & \cdots & \widetilde{a}_{2p}(\theta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{a}_{p1}(\theta) & \widetilde{a}_{p2}(\theta) & \cdots & \widetilde{a}_{pp}(\theta) + \beta_p \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где коэффициенты матрицы $\widetilde{a}_{jk}(\theta)$ выражаются через коэффициенты матрицы переходных интенсивностей

$$\widetilde{a}_{jk}(\theta) = \sum_{g \in \Gamma} a(v_j + g, v_k) e^{-i\langle g, \theta \rangle},$$

а через $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ обозначено стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$.

Вспомогательная переменная θ определена на множестве

$$\widetilde{\mathcal{C}} = \{\theta \in \mathbf{R}^d : \theta = \sum_{j=1}^{d} \theta_j \widetilde{g}_j,\ 0 \leqslant \theta_j < 1,\ j = 1, \ldots, d\}, \tag{5}$$

где базис $\{\widetilde{g}_j\}_{j=1}^d$ является двойственным базисом к $\{g_j\}_{j=1}^d$, то есть

$$\langle \widetilde{g}_i, g_j \rangle = 2\pi\delta_{ij}.$$

Замечание. Матрица $A(\theta)$ является периодической в $\mathbf{R}^d$ с периодом $\widetilde{\mathcal{C}}$. Из-за этого множество $\widetilde{\mathcal{C}}$ можно рассматривать как d-мерный тор. Это позволяет считать, что собственные числа матрицы (4) как функции аргумента θ имеют компактную область определения, содержащую точку нуль.

Через $\lambda_1(\theta) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_p(\theta)$ обозначим собственные значения матрицы $A(\theta)$, а через $\psi_j(v_k, \theta)$ – k-ую компоненту собственного вектора матрицы $A(\theta)$, соответствующего собственному значению $\lambda_j(\theta)$. Через $H(\theta)$ обозначим матрицу Гессе функции $\lambda_1(\cdot)$ в точке θ

$$H(\theta) = \Big\{ \frac{\partial^2 \lambda_1(\theta)}{\partial\theta_j \partial\theta_k} \Big\}_{j,k=1}^{p}. \tag{6}$$

Отметим, что правый край спектра оператора $\mathcal{A}$ совпадает со старшим собственным значением матрицы $A(0)$, то есть с $\lambda_1(0)$ (см. [20]). При этом собственный вектор $\psi_1(0)$ матрицы $A(0)$ может быть выбран таким образом, что все его координаты строго положительны.

В [20] было показано, что при выполнении условий (i)–(vi) и (a)–(e), старший член $M_1(v, u, t)$ имеет вид

$$M_1(v, u, t) = e^{\lambda_1(0)t} t^{-\frac{d}{2}} \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\, \psi_1(\omega_v, 0)\, \psi_1(\omega_u, 0)}{|\widetilde{\mathcal{C}}| \sqrt{|\det H(0)|}} \big(1 + O(t^{-1})\big), \tag{7}$$

где $\lambda_1(0)$ – старшее собственное значение матрицы $A(0)$, а $\psi_1(\,\cdot\,, 0)$ – отвечающая ему собственная функция.

Предположим, что $\lambda_1(0) > 0$, то есть у оператора $\mathcal{A}$ есть спектр на положительной полуоси. В этом случае среднее число частиц в каждой вершине решетки экспоненциально растет, то есть ВСБ является надкритическим. В данной работе показано, что при выполнении условий (i)–(vi), (a)–(e) для второго момента локальной численности частиц надкритического ВСБ при $t \to +\infty$ справедливо

$$M_2(v, u, t) = e^{2\lambda_1(0)t} t^{-d} m_2(v, u)(1 + O(t^{-1})), \tag{8}$$

где

$$m_2(v,u) = \frac{(2\pi)^d \psi_1^2(\omega_u,0)}{|\widetilde{\mathcal{C}}|^2 |\det H(0)|} \sum_{j=1}^{p} \sum_{w\in\Omega} \frac{\beta_2(w)\psi_1^2(w,0)\psi_j(w,0)\psi_j(\omega_v,0)}{2\lambda_1(0)-\lambda_j(0)}.$$

Структура работы. Во втором параграфе настоящей работы мы получим уравнение для второго момента локальной численности частиц ветвящегося случайного блуждания, а также приведем некоторые результаты о спектре оператора $\mathcal{A}$, полученные в [20]. В третьем параграфе мы получим асимптотическое поведение второго момента локальной численности частиц при $t \to +\infty$.

§2. Основное уравнение и некоторые свойства спектра оператора $\mathcal{A}$

Рассмотрим ветвящееся случайное блуждание с источниками ветвления, расположенными периодически на $\mathbf{Z}^d$. Именно, будем считать, что источник типа j располагается в точках $v_j+\Gamma$, то есть в точках решетки $\mathbf{Z}^d$, которые получаются сдвигом вершины v_j на вектор решетки $g \in \Gamma$. Ветвление в точке v_j определяется производящей функцией $B(v_j,s)$, определенной (2).

Пусть $N_v(t)$ – общее число частиц в момент времени t при условии, что в начальный момент времени $t=0$ была одна частица в точке v. Через $\xi_v^{(k)}(t)$ обозначим процесс, отвечающий случайному блужданию k-ой частицы. Определим полугруппу P^t, полагая

$$P^t f(v) = \mathbf{E}\Big(\prod_{k=1}^{N_v(t)} f(\xi_v^{(k)}(t))\Big).$$

Вычислим генератор полугруппы P^t. Если $v=v_j+g$, где $g\in\Gamma$, то при $t\to 0$ имеем

$$P^t f(v) = f(v)(1+a(v,v)t+b_{j1}t)+t\sum_{u\neq v} a(v,u)f(u)+t\sum_{k\neq 1}\big(f(v)\big)^k b_{jk}+o(t),$$

следовательно, генератор $\mathcal{A}^B : \ell^2(\mathbf{Z}^d)\to\ell^2(\mathbf{Z}^d)$ полугруппы P^t имеет вид

$$\mathcal{A}^B f(v) = \sum_{u\in\mathbf{Z}^d} a(v,u)f(u) + B(v,f(v)).$$

Через $F(t,v,u;s)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(N_v(t,u)=k)s^k$ обозначим производящую функцию числа частиц $N_v(t,u)$ в точке $u\in\mathbf{Z}^d$ в момент времени t при условии, что в начальный момент времени была одна частица в точке $v\in\mathbf{Z}^d$.

Теорема 2.1. *Функция $F(t,v,u;s)$, как функция аргументов v и t, является решением задачи Коши*

$$\begin{cases}\partial_t F(t,v,u;s) &= \big(\mathcal{A}_0 F\big)(t,v,u;s)+B(v,F(t,v,u;s)),\\ F(0,v,u,s) &= s^{\delta_u(v)},\end{cases}$$

где $\delta_u(\,\cdot\,)$ – индикаторная функция одноточечного множества $\{u\}$.

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что

$$F(t,v,u;s)=\big(P^t s^{\delta_u}\big)(v),$$

а оператор $\mathcal{A}^B$ является генератором полугруппы P^t. □

Напомним, что через $M_2(v,u,t)$ обозначен второй момент числа частиц ветвящегося случайного блуждания в вершине u в момент времени t при условии, что в начальный момент времени была одна частица в вершине v.

Следствие 2.2. *Функция $M_2(v,u,t)$ является единственным решением задачи Коши*

$$\begin{cases}\partial_t M_2(v,u,t) &= \big(\mathcal{A}M_2\big)(v,u,t)+\beta_2(v)M_1^2(v,u,t),\\ M_2(v,u,0) &= \delta_u(v),\end{cases}\tag{9}$$

где оператор $\mathcal{A}$ определен формулой (3), *а величина $\beta_2(v)$ определена в условии* (d).

Доказательство. Так как

$$M_2(v,u,t)=\Big(s\frac{d}{ds}\Big)^2 F(t,v,u;s)\Big|_{s=1},$$

то результат следует из теоремы 2.1. □

Замечание. Известно (см. [20]), что первый момент локальной численности частиц $M_1(v,u,t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases}\partial_t M_1(v,u,t)=\big(\mathcal{A}M_1\big)(v,u,t),\\ M_1(v,u,0)=\delta_u(v).\end{cases}\tag{10}$$

Это может быть получено из теоремы 2.1 так же как и следствие 2.2.

Исследование спектра оператора $\mathcal{A}$. Обозначим через $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$ гильбертово пространство суммируемых с квадратом комплекснозначных функций $f : \mathbf{Z}^d \to \mathbf{C}$ с нормой

$$\|f\|^2_{\ell^2(\mathbf{Z}^d)} = \sum_{v\in\mathbf{Z}^d} |f(v)|^2 < +\infty,$$

а через $\ell^2_0(\mathbf{Z}^d)$ подпространство функций из $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$, имеющих компактный носитель.

Обозначим через $\mathcal{H}$ множество суммируемых с квадратом p-мерных вектор-функций над множеством $\widetilde{\mathcal{C}}$, определенном в (5):

$$\mathcal{H} = \int\limits_{\widetilde{\mathcal{C}}} \oplus\, \mathbf{C}^p \, d\theta,$$

со стандартной для такого пространства нормой

$$\|f\|^2_{\mathcal{H}} = \int\limits_{\widetilde{\mathcal{C}}} |f(\theta)|^2 \, d\theta.$$

Определим оператор $U : \ell^2_0(\mathbf{Z}^d) \to \mathcal{H}$ равенством

$$(Uf)(v,\theta) = |\widetilde{\mathcal{C}}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{g\in\Gamma} e^{-i\langle g,\theta\rangle} f(v+g), \quad v \in \Omega, \tag{11}$$

где, как и раньше, через $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ обозначено стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$. Этот оператор можно по непрерывности доопределить до унитарного оператора $\ell^2(\mathbf{Z}^d) \to \mathcal{H}$ (см. доказательство теоремы 3 из [20]). Также в [20] было показано, что оператор $\mathcal{A} : \ell^2(\mathbf{Z}^d) \to \ell^2(\mathbf{Z}^d)$, определенный (3), унитарно эквивалентен прямому интегралу операторов

$$U\mathcal{A}U^{-1} = \int\limits_{\widetilde{\mathcal{C}}} \oplus A(\theta)\, d\theta,$$

где оператор в слое $A(\theta) : \mathbf{C}^p \to \mathbf{C}^p$ – это оператор умножения на матрицу (4). Эта формула означает, что для любой функции $f \in \ell^2(\mathbf{Z}^d)$ и любых $v \in \Omega$, $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}$ выполнено равенство

$$(U\mathcal{A}f)(v,\theta) = A(\theta)(Uf)(v,\theta). \tag{12}$$

Оператор $A(\theta)$ при каждом $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}$ является самосопряженным оператором в $\mathbf{C}^p$. Это значит, что его спектр состоит из конечного набора вещественных собственных значений

$$\lambda_1(\theta) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_p(\theta),$$

где p – число точек фундаментального множества Ω.

В силу условия (v), коэффициенты оператора $A(\theta)$ как функции $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}$ имеют две непрерывных производных. Тогда для каждого $j = 1, \ldots, p$ собственное значение $\lambda_j(\theta)$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией вне множества таких θ, что $\lambda_j(\theta) = \lambda_k(\theta)$ при некотором $k \neq j$ и, по крайней мере, непрерывной функцией при всех $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}$. Отсюда и из теоремы [11, XIII.85] следует, что спектр $\sigma(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ состоит из p (возможно перекрывающихся) спектральных зон

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup_{j=1}^{p} \lambda_j(\widetilde{\mathcal{C}}),$$

где через $\lambda_j(\widetilde{\mathcal{C}})$ обозначена область значений функции $\lambda_j(\theta)$, $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}$.

Для исследования асимптотического поведения моментов локальной численности частиц при больших временах необходимо изучить поведение старшей зонной функции $\lambda_1(\theta)$ в окрестности правого края спектра оператора $\mathcal{A}$. Ниже мы приведем некоторые результаты о правом крае спектра, полученные в [20].

Лемма 2.3. *Для функции $\lambda_1(\theta)$ справедливы следующие утверждения.*

1. *При всех $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}$ выполнено*

$$\lambda_1(0) - \lambda_1(\theta) \geqslant 0, \tag{13}$$

причем равенство достигается только при $\theta = 0$.

2. *Правый край спектра оператора $\mathcal{A}$ совпадает с $\lambda_1(0)$, то есть*

$$\max \sigma(\mathcal{A}) = \lambda_1(0). \tag{14}$$

3. *Расстояние от правого края спектра оператора $\mathcal{A}$ до правого края второй зоны строго положительно, то есть*

$$\lambda_1(0) - \max_{\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}} \lambda_2(\theta) > 0. \tag{15}$$

4. *Существуют такие постоянные $r > 0$, $C > 0$, что при всех $\|\theta\| \leqslant r$ функция $\lambda_1(\theta)$ дважды непрерывно дифференцируема, и выполнено неравенство*
$$\lambda_1(0) - \lambda_1(\theta) \geqslant C\|\theta\|^2. \tag{16}$$
5. *При всех $\|\theta\| \leqslant r$ матрица вторых производных $H(\theta)$ функции $\lambda_1(\theta)$ имеет ненулевой определитель*
$$\det H(\theta) \neq 0.$$
6. *Старший собственный вектор $\psi_1(0)$ матрицы $A(0)$ может быть выбран таким образом, что все его координаты положительны, т.е.*
$$\psi_1(v_j, 0) > 0, \quad j = 1, \ldots, p.$$

Ниже мы приводим простую оценку, которая понадобится нам в дальнейшем.

Лемма 2.4. *Решение задачи Коши* (10) *при всех $t \geqslant 0$ удовлетворяет неравенству*
$$\|M_1(\,\cdot\,, u, t)\|_{\ell^2(\mathbf{Z}^d)} \leqslant e^{\lambda_1(0)t}.$$

Доказательство. Так как функция $M_1(v, u, t)$ является решением однородного уравнения (10), то
$$M_1(v, u, t) = e^{\mathcal{A}t}\delta_u(v).$$
Поэтому для нормы функции $M_1(v, u, t)$ имеем
$$\|M_1(\,\cdot\,, u, t)\|_{\ell^2(\mathbf{Z}^d)} \leqslant e^{\max\sigma(\mathcal{A})}\|\delta_u(\,\cdot\,)\|_{\ell^2(\mathbf{Z}^d)} = e^{\lambda_1(0)t}. \qquad \square$$

§3. Асимптотическое поведение второго момента локальной численности частиц ВСБ

В этом параграфе мы получим старший член в асимптотическом разложении для второго момента локальной численности частиц (8) (теорема 3.5). Леммы 3.1, 3.2, 3.4, а также следствие 3.3 носят технический характер и используются для доказательства теоремы 3.5.

Лемма 3.1. *Пусть $f(v) \in \ell^2(\mathbf{Z}^d)$. Обозначим через $f_\xi(v)$, $\xi \in \widetilde{\mathcal{C}}$, функцию*
$$f_\xi(v) = f(v)e^{i\langle\gamma_v, \xi\rangle},$$

где γ_v *– это проекция вершины* v *на решетку* Γ*, определенная в* (1). *Тогда*

$$(Uf_\xi)(v,\theta) = (Uf)(v,\theta-\xi).$$

Доказательство. Отметим, что если $v \in \Omega$, то $\gamma_{v+g} = g$. Из определения оператора U имеем

$$\begin{aligned}(Uf_\xi)(v,\theta) =& |\widetilde{\mathcal{C}}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{g\in\Gamma} f_\xi(v+g) e^{-i\langle g,\theta\rangle} \\ =& |\widetilde{\mathcal{C}}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{g\in\Gamma} f(v+g) e^{-i\langle g,\theta\rangle} e^{i\langle g,\xi\rangle} = (Uf)(v,\theta-\xi). \qquad \square\end{aligned}$$

Лемма 3.2. *Пусть* K *– компактное подмножество* $\mathbf{R}^d$*, содержащее точку нуль. Предположим, что функция* $f : K \to \mathbf{R}$ *является четной, имеет единственный глобальный максимум в нуле и две непрерывных производных в некоторой окрестности нуля. Пусть* $H_f(\theta)$ *– матрица Гессе* (6) *функции* $f(\,\cdot\,)$ *в точке* θ *и пусть*

$$\det H_f(0) \neq 0.$$

Определим функцию $g(\theta,\xi)$ *равенством*

$$g(\theta,\xi) = f\Big(\theta - \frac{\xi}{2}\Big) + f\Big(\theta + \frac{\xi}{2}\Big).$$

Тогда существует такое $r > 0$*, что при каждом* $\|\xi\| \leqslant r$ *точка* $\theta = 0$ *является единственным глобальным максимумом функции* $g(\theta,\xi)$ *на множестве* K.

Доказательство. Пусть f имеет две непрерывных производных в шаре радиусом r_1 и центром в нуле. Если $\|\theta\|+\|\xi\| < r_1$, то для любого $j = 1,2,\dots,d$ функцию $\frac{\partial f}{\partial\theta_j}\Big(\theta - \frac{\xi}{2}\Big)$ можно разложить в ряд Тейлора по θ в окрестности точки $-\frac{\xi}{2}$

$$\frac{\partial f}{\partial\theta_j}\Big(\theta - \frac{\xi}{2}\Big) = \frac{\partial f}{\partial\theta_j}\Big(-\frac{\xi}{2}\Big) + \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial\theta_j\partial\theta_k}\Big(-\frac{\xi}{2}\Big)\theta_k + o(\|\theta\|^2).$$

Аналогично, для функции $\frac{\partial f}{\partial\theta_j}\Big(\theta + \frac{\xi}{2}\Big)$ при любом $j = 1,2,\dots,d$ имеем

$$\frac{\partial f}{\partial\theta_j}\Big(\theta + \frac{\xi}{2}\Big) = \frac{\partial f}{\partial\theta_j}\Big(\frac{\xi}{2}\Big) + \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial\theta_j\partial\theta_k}\Big(\frac{\xi}{2}\Big)\theta_k + o(\|\theta\|^2).$$

В силу четности функции $f(\theta)$ выполнены равенства

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_j}\Big(-\frac{\xi}{2}\Big) = -\frac{\partial f}{\partial \theta_j}\Big(\frac{\xi}{2}\Big),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta_j \partial \theta_k}\Big(-\frac{\xi}{2}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_j \partial \theta_k}\Big(\frac{\xi}{2}\Big).$$

Тогда

$$\frac{\partial g}{\partial \theta_j}(\theta,\xi) = 2\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_j \partial \theta_k}\Big(\frac{\xi}{2}\Big)\theta_k + o(\|\theta\|^2).$$

Отсюда получаем

$$\nabla g(\theta,\xi) = 2H_f\Big(\frac{\xi}{2}\Big)\theta + o(\|\theta\|^2).$$

Так как 0 является точкой глобального максимума функции f, можно выбрать такое $r_2 > 0$, что при $\|\xi\| < r_2$ гессиан функции $f(\xi)$ не обращается в нуль. Тогда при $\|\xi\| < r_2$ единственным экстремумом функции $g(\theta,\xi)$ может являться только точка $\theta = 0$.

Функция $g(\theta,\xi)$ ограничена сверху величиной $2f(0)$, при этом граница достигается только при $\xi = \theta = 0$. Так как при $\xi \to 0$ верно $g(0,\xi) \to 2f(0)$, то существует r_3, такое что при $\|\xi\| < r_3$ глобальный максимум функции $g(\theta,\xi)$ находится внутри шара $\|\theta\| < \frac{r_3}{2}$. Так как $\theta = 0$ – единственная точка экстремума в этом шаре, то $\theta = 0$ является точкой глобального максимума. Для завершения доказательства осталось положить $r = \min\{r_1, r_2, r_3\}$. □

Следствие 3.3. *Существует такое $r > 0$, что при $\|\xi\| < r$ единственным глобальным максимумом функции*

$$\lambda_1\Big(\theta - \frac{\xi}{2}\Big) + \lambda_1\Big(\theta + \frac{\xi}{2}\Big)$$

является точка $\theta = 0$.

Доказательство. В силу замечания после определения (5) можно считать, что функция $\lambda_1(\theta)$ задана на компактном множестве, содержащем точку нуль. Покажем, что $\lambda_1(\theta)$ удовлетворяет условиям на функцию f из леммы 3.2. Из определения матрицы $A(\theta)$ следует, что

$$A(\theta) = A^t(-\theta).$$

Спектр матрицы и транспонированной к ней совпадают. Отсюда следует, что функция $\lambda_1(\theta)$ является четной. В силу неравенства (16) и того, что равенство в (13) достигается только при $\theta = 0$, точка $\theta = 0$ является единственной точкой глобального максимума функции $\lambda_1(\theta)$. Функция $\lambda_1(\theta)$ является дважды непрерывно дифференцируемой вне малой окрестности тех точек, где $\lambda_1(\theta) = \lambda_j(\theta)$ для некоторого $j = 2, \dots, p$. Поэтому $\lambda_1(\theta)$ является дважды непрерывно дифференцируемой в малой окрестности нуля в силу (15). $\square$

Обозначим через $\widetilde{\delta}_{\omega_v}(\,\cdot\,)$ индикаторную функцию вершины ω_v на множестве $\mathbf{C}^p$

$$\widetilde{\delta}_{\omega_v}(w) = \begin{cases} 1, & \omega_v = w, \\ 0, & \omega_v \neq w. \end{cases} \tag{17}$$

Пусть P_v – периодический относительно решетки Γ проектор

$$(P_v f)(w) = \begin{cases} f(w), & v - w \in \Gamma, \\ 0, & v - w \notin \Gamma. \end{cases}$$

Так как P_v – это оператор умножения на Γ-периодическую функцию, то для всех $w \in \Omega$

$$UP_v f(w, \theta) = \widetilde{\delta}_{\omega_v}(w) U f(w, \theta).$$

Следующая техническая лемма является основной при исследовании второго момента.

Лемма 3.4. *Существует $r > 0$ такое, что при всех $\|\xi\| < r$ и всех $v, u \in \mathbf{Z}^d$ справедливо следующее асимптотическое равенство*

$$\sum_{g \in \Gamma} M_1^2(v + g, u, t) e^{-i\langle g, \xi\rangle} = e^{2\lambda_1(\xi/2)t} t^{-d/2} c(v, u, \xi)(1 + O(t^{-1})),$$

где

$$c(v, u, \xi) = \frac{\pi^{d/2} e^{i\langle \gamma_v - \gamma_u, \xi\rangle} \psi_1\bigl(\omega_v, \frac{\xi}{2}\bigr) \overline{\psi_1\bigl(\omega_v, -\frac{\xi}{2}\bigr) \psi_1\bigl(\omega_u, \frac{\xi}{2}\bigr)} \psi_1\bigl(\omega_u, -\frac{\xi}{2}\bigr)}{|\widetilde{\mathcal{C}}| \sqrt{|\det H\bigl(\frac{\xi}{2}\bigr)|}}. \tag{18}$$

Доказательство. Рассмотрим величину $\sum\limits_{g\in\Gamma} M_1^2(v+g,u,t)e^{-i\langle\gamma_v+g,\xi\rangle}$. В силу унитарности оператора U, равенства (12) и леммы 3.1, имеем:

$$\sum_{g\in\Gamma} M_1^2(v+g,u,t)e^{-i\langle\gamma_v+g,\xi\rangle}$$
$$=\langle P_v M_1(w,u,t)e^{i\langle\gamma_w,-\xi/2\rangle}, M_1(w,u,t)e^{i\langle\gamma_w,\xi/2\rangle}\rangle_{\ell^2(\mathbf{Z}^d)}$$
$$=\int\limits_{\widetilde{\mathcal{C}}} UM_1\Big(\omega_v,u,t,\theta+\frac{\xi}{2}\Big)\overline{UM_1\Big(\omega_v,u,t,\theta-\frac{\xi}{2}\Big)}\,d\theta,$$

где ω_v – это проекция вершины v на фундаментальное множество вершин, определенная (1). Так как функция $M_1(\,\cdot\,,u,t)$ является решением задачи Коши (10), то

$$M_1(\,\cdot\,,u,t)=e^{\mathcal{A}t}\delta_u(\,\cdot\,).$$

Имеем:

$$\sum_{g\in\Gamma} M_1^2(v+g,u,t)e^{-i\langle\gamma_v+g,\xi\rangle}$$
$$=\int\limits_{\widetilde{\mathcal{C}}} e^{A(\theta+\xi/2)t}U\delta_u\Big(\omega_v,\theta+\frac{\xi}{2}\Big)\overline{e^{A(\theta-\xi/2)t}U\delta_u\Big(\omega_v,\theta-\frac{\xi}{2}\Big)}\,d\theta.$$

По определению (11) оператора U его действие на функцию $\delta_u(\,\cdot\,)$ имеет вид

$$U\delta_u(v,\theta)=|\widetilde{\mathcal{C}}|^{-\frac{1}{2}}\sum_{g\in\Gamma}e^{-i\langle g,\theta\rangle}\delta_u(v+g)=|\widetilde{\mathcal{C}}|^{-\frac{1}{2}}e^{-i\langle\gamma_u,\theta\rangle}\widetilde{\delta}_{\omega_u}(\omega_v),$$

где $\widetilde{\delta}_{\omega_u}(\,\cdot\,)$ – индикаторная функция вершины ω_u на множестве $\mathbf{C}^p$, определенная (17).

Разложим функцию $\widetilde{\delta}_{\omega_u}(\,\cdot\,)$ по собственным векторам матрицы $A(\theta)$:

$$\widetilde{\delta}_{\omega_u}(\,\cdot\,)=\sum_{j=1}^{p}\overline{\psi_j(\omega_u,\theta)}\psi_j(\,\cdot\,,\theta).$$

При таком разложении действие оператора $e^{A(\theta)t}$ можно представить в виде

$$e^{A(\theta)t}U\delta_u(\,\cdot\,,\theta) = |\widetilde{\mathcal{C}}|^{-\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{p} e^{\lambda_j(\theta)t}\overline{\psi_j(\omega_u,\theta)}\psi_j(\,\cdot\,,\theta)e^{-i\langle\gamma_u,\theta\rangle}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{g\in\Gamma} M_1^2(v+g,u,t)e^{-i\langle\gamma_v+g,\xi\rangle} = \frac{1}{|\widetilde{\mathcal{C}}|}\int\limits_{\widetilde{\mathcal{C}}}\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\Big(e^{(\lambda_j(\theta+\xi/2)+\lambda_k(\theta-\xi/2))t}$$

$$\psi_j\Big(\omega_v,\theta+\frac{\xi}{2}\Big)\overline{\psi_j\Big(\omega_u,\theta+\frac{\xi}{2}\Big)\psi_k\Big(\omega_v,\theta-\frac{\xi}{2}\Big)}\psi_k\Big(\omega_u,\theta-\frac{\xi}{2}\Big)e^{-i\langle\gamma_u,\xi\rangle}\Big)\,d\theta.$$

При $t\to+\infty$ основной вклад в интеграл дает экспонента с наибольшим показателем. В силу непрерывности функций $\lambda_j(\theta)$, $j=1,\dots,p$, и условий (14), (15), существует r_1, такое что при $\|\xi\|<r_1$ максимальным будет значение показателя $\lambda_1(\theta+\frac{\xi}{2})+\lambda_1(\theta-\frac{\xi}{2})$. При этом вклад от экспонент с другими показателями будет экспоненциально мал. В силу следствия 3.3, существует такое r_2, что при $\|\xi\|<r_2$ максимум показателя $\lambda_1\big(\theta+\frac{\xi}{2}\big)+\lambda_1\big(\theta-\frac{\xi}{2}\big)$ достигается при $\theta=0$. В силу четности функции $\lambda_1(\theta)$, имеем для значения гессиана показателя экспоненты

$$\det\Big(H\Big(-\frac{\xi}{2}\Big)+H\Big(\frac{\xi}{2}\Big)\Big) = 2^d\det H\Big(\frac{\xi}{2}\Big).$$

Так как $\lambda_1(\theta)$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией в окрестности $\theta=0$ и $\det H(0)\neq 0$, то существует такое r_3, что $\det H(\frac{\xi}{2})\neq 0$ при всех $|\xi|<r_3$. Тогда, используя многомерный метод Лапласа (см. теорему 4.2 в [21]), получаем

$$\sum_{g\in\Gamma} M_1^2(v+g,u,t)e^{i\langle g,\xi\rangle} = \frac{e^{2\lambda_1(\xi/2)t}}{t^{d/2}}c(v,u,\xi)(1+O(t^{-1})),$$

где

$$c(v,u,\xi) = \frac{\pi^{d/2}e^{i\langle\gamma_v-\gamma_u,\xi\rangle}\psi_1\big(\omega_v,\frac{\xi}{2}\big)\overline{\psi_1\big(\omega_v,-\frac{\xi}{2}\big)\psi_1\big(\omega_u,\frac{\xi}{2}\big)}\psi_1\big(\omega_u,-\frac{\xi}{2}\big)}{|\widetilde{\mathcal{C}}|\sqrt{|\det H\big(\frac{\xi}{2}\big)|}}.\ \square$$

Перейдем к асимптотике второго момента.

Теорема 3.5. *При* $t\to+\infty$ *и* $\lambda_1(0)>0$ *справедлива асимптотика*

$$M_2(v,u,t) = e^{2\lambda_1(0)t}t^{-d}m_2(v,u)(1+O(t^{-1})),$$

где

$$m_2(v,u) = \frac{(2\pi)^d \psi_1^2(\omega_u,0)}{|\widetilde{\mathcal{C}}|^2 |\det H(0)|} \sum_{j=1}^{p} \sum_{w\in\Omega} \frac{\beta_2(w)\psi_1^2(w,0)\psi_j(w,0)\psi_j(\omega_v,0)}{2\lambda_1(0)-\lambda_j(0)}.$$

Доказательство. Так как $M_2(v,u,t)$ является решением задачи Коши (9), то

$$M_2(v,u,t) = e^{\mathcal{A}t} M_2(v,u,0) + \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-s)} \beta_2(v) M_1^2(v,u,s)\, ds.$$

Так как $M_2(v,u,0) = \delta_u(v)$, то, используя результаты работы [20], можно получить асимптотическое поведение при $t \to +\infty$ первого слагаемого

$$e^{\mathcal{A}t} M_2(v,u,0) = e^{\lambda_1(0)t} t^{-\frac{d}{2}} \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\, \psi_1(\omega_u,0)\, \psi_1(\omega_v,0)}{|\widetilde{\mathcal{C}}| \sqrt{|\det H(0)|}} (1 + O(t^{-1})).$$

Найдем асимптотику второго слагаемого. Используя унитарность оператора U, определенного в (11), и формулу (12), получаем

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e^{\mathcal{A}(t-s)} \beta_2(v) M_1^2(v,u,s) ds \\
&\qquad = \int_0^t \Big\langle \beta_2(\,\cdot\,) e^{\mathcal{A}(t-s)} M_1^2(\,\cdot\,,u,s), \delta_v(\,\cdot\,) \Big\rangle_{l^2(z^d)} ds \\
&\qquad = \int_0^t \int_{\widetilde{\mathcal{C}}} \Big\langle \beta_2(\,\cdot\,) U e^{\mathcal{A}(t-s)} M_1^2(\,\cdot\,,u,s,\theta), U\delta_v(\,\cdot\,,\theta) \Big\rangle_{\mathbf{C}^p} d\theta\, ds \\
&\qquad = \int_0^t \int_{\widetilde{\mathcal{C}}} \Big\langle \beta_2(\,\cdot\,) e^{\mathcal{A}(\theta)(t-s)} U M_1^2(\,\cdot\,,u,s,\theta), U\delta_v(\,\cdot\,,\theta) \Big\rangle_{\mathbf{C}^p} d\theta\, ds.
\end{aligned}$$

Для $w \in \Omega$ имеем

$$U\delta_v(w,\theta) = |\widetilde{\mathcal{C}}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{g\in\Gamma} e^{-i\langle g,\theta\rangle} \delta_v(w+g) = |\widetilde{\mathcal{C}}|^{-\frac{1}{2}} e^{-i\langle \gamma_v,\theta\rangle} \widetilde{\delta}_{\omega_v}(w),$$

где функция $\widetilde{\delta}_{\omega_v}(w)$ определена в (17). Разложим функцию $\beta(\,\cdot\,)UM_1^2(\,\cdot\,,u,s,\theta)$ по собственным функциям оператора $A(\theta)$ при каждом $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}$:

$$\beta_2(w)UM_1^2(w,u,s,\theta) = \sum_{j=1}^{p} x_j(\omega_u,s,\theta)\psi_j(w,\theta),$$

где

$$\begin{aligned} x_j(\omega_u,s,\theta) =& \langle \beta_2(\,\cdot\,)UM_1^2(\,\cdot\,,u,s,\theta),\psi_j(\,\cdot\,,\theta)\rangle_{\mathbf{C}^p} \\ =& |\widetilde{\mathcal{C}}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{w\in\Omega} \overline{\psi_j(w,\theta)}\beta_2(w)\sum_{g\in\Gamma} M_1^2(w+g,u,s)e^{-i\langle g,\theta\rangle}. \end{aligned}$$

При таком разложении действие экспоненты от оператора $A(\theta)$ может быть представлено в виде

$$e^{A(\theta)(t-s)}UQ_2M_1^2(\,\cdot\,,u,s,\theta) = \sum_{j=1}^{p} e^{\lambda_j(\theta)(t-s)}x_j(\omega_u,s,\theta)\psi_j(\,\cdot\,,\theta).$$

Для внутреннего интеграла имеем

$$\int\limits_{\widetilde{\mathcal{C}}} \Big\langle \beta_2(\,\cdot\,)e^{\mathcal{A}(\theta)(t-s)}UM_1^2(\,\cdot\,,u,s,\theta),U\delta_v(\,\cdot\,,\theta)\Big\rangle_{\mathbf{C}^p} d\theta = \frac{1}{|\widetilde{\mathcal{C}}|}\int\limits_{\widetilde{\mathcal{C}}} \sum_{j=1}^{p} e^{\lambda_j(\theta)(t-s)}$$
$$\psi_j(\omega_v,\theta)e^{i\langle\gamma_u,\theta\rangle}\sum_{w\in\Omega}\overline{\psi_j(w,\theta)}\beta_2(w)\sum_{g\in\Gamma}M_1^2(w+g,u,s)e^{-i\langle g,\theta\rangle}\,d\theta.$$

Для краткости введем обозначение:

$$\begin{aligned} &X_j(v,u,s,\theta) \\ &= \frac{e^{i\langle\gamma_u,\theta\rangle}\psi_j(\omega_v,\theta)}{|\widetilde{\mathcal{C}}|}\sum_{w\in\Omega}\overline{\psi_j(w,\theta)}\beta_2(w)\sum_{g\in\Gamma}M_1^2(w+g,u,s)e^{-i\langle g,\theta\rangle}. \end{aligned}$$

Рассмотрим внешний интеграл от j-ого члена. Сделаем замену $s = tx$

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\widetilde{\mathcal{C}}} e^{\lambda_j(\theta)(t-s)}X_j(v,u,s,\theta)d\theta ds = t\int\limits_0^1 \int\limits_{\widetilde{\mathcal{C}}} e^{t\lambda_j(\theta)(1-x)}X_j(v,u,xt,\theta)d\theta dx.$$

Разобьем внешний интеграл в сумму интеграла от 0 до $\frac{1}{2}$ и интеграла от $\frac{1}{2}$ до 1. В силу леммы 2.4, для функции $X_j(v,u,xt,\theta)$ справедливо неравенство

$$|X_j(v,u,xt,\theta)| \leqslant CM_1^2(u,xt) = Ce^{2\lambda_1(0)xt}.$$

Тогда для интеграла от 0 до $\frac{1}{2}$ имеем

$$t\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\widetilde{\mathcal{C}}} e^{t\lambda_j(\theta)(1-x)}X_j(v,u,xt,\theta)d\theta dx \leqslant Cte^{3t\lambda_1(0)/2}.$$

Из леммы 3.4 следует, что при каждом $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, $j=1,\dots,p$ и $t\to+\infty$ выполнено равенство

$$X_j(v,u,tx,\theta)$$
$$=\frac{e^{2\lambda_1(\theta/2)xt}}{t^{d/2}x^{d/2}|\widetilde{\mathcal{C}}|}\psi_j(\omega_v,\theta)\sum_{w\in\Omega}\overline{\psi_j(w,\theta)}\beta_2(w)c(w,u,\theta)(1+O(t^{-1})),$$

где $c(v,u,\theta)$ определена формулой (18). Тогда для интеграла по отрезку $\left[\frac{1}{2},1\right]$ для j-ого слагаемого при $t\to+\infty$ имеем

$$t\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{\widetilde{\mathcal{C}}} e^{t\lambda_j(\theta)(1-x))}X_j(v,u,xt,\theta)\,d\theta dx=\frac{1+O(t^{-1})}{t^{d/2-1}|\widetilde{\mathcal{C}}|}$$
$$\int_{\widetilde{\mathcal{C}}}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{e^{t\left(2\lambda_1(\theta/2)x+\lambda_j(\theta)(1-x)\right)}}{x^{d/2}}\psi_j(\omega_v,\theta)\sum_{w\in\Omega}\overline{\psi_j(w,\theta)}\beta_2(w)c(w,u,\theta)\,dxd\theta$$
$$=\frac{1+O(t^{-1})}{t^{d/2}|\widetilde{\mathcal{C}}|}\int_{\widetilde{\mathcal{C}}}\frac{e^{2t\lambda_1(\theta/2)}}{2\lambda_1\left(\frac{\theta}{2}\right)-\lambda_j(\theta)}\psi_j(\omega_v,\theta)\sum_{w\in\Omega}\overline{\psi_j(w,\theta)}\beta_2(w)c(w,u,\theta)\,d\theta.$$

Применяя многомерный метод Лапласа при каждом $j=1,\dots,p$, получаем, что для второго момента локальной численности частиц при $t\to+\infty$ справедливо соотношение

$$M_2(v,u,t)=e^{2\lambda_1(0)t}t^{-d}m_2(v,u)(1+O(t^{-1})),$$

где

$$m_2(v,u)=\frac{(2\pi)^d\psi_1^2(\omega_u,0)}{|\widetilde{\mathcal{C}}|^2|\det H\left(0\right)|}\sum_{j=1}^{p}\sum_{w\in\Omega}\frac{\beta_2(w)\psi_1^2(w,0)\overline{\psi_j(w,0)}\psi_j(\omega_v,0)}{2\lambda_1(0)-\lambda_j(0)}.$$

Так как $A(0)$ – вещественная симметричная матрица, то $\overline{\psi_j(w,0)}=\psi_j(w,0)$ при всех $w\in\Omega$. □

Следствие 3.6. *Для дисперсии $D(v,u,t)$ локальной численности частиц надкритического* ВСБ *при $t \to +\infty$ справедливо соотношение*

$$D(v,u,t) = e^{2\lambda_1(0)t} t^{-d} d(v,u)(1 + O(t^{-1})),$$

где величина $d(v,u)$ равна

$$d(v,u) = \frac{(2\pi)^d \psi_1^2(\omega_u, 0)}{|\widetilde{\mathcal{C}}|^2 |\det H(0)|} \left(\sum_{j=1}^{p} \sum_{w \in \Omega} \frac{\beta_2(w)\psi_1^2(w,0)\psi_j(w,0)\psi_j(\omega_v,0)}{2\lambda_1(0) - \lambda_j(0)} - \psi_1^2(\omega_v, 0) \right).$$

Список литературы

1. G. Berkolaiko, P. Kuchment, *Introduction to quantum graphs.* — Amer. Math. Soc., 2013, 186.
2. M. Bessonov, S. Molchanov, J. Whitmeyer, *A multi-class extension of the mean field Bolker-Pacala population model.* — Random Oper. Stoch. Equ. **26**, No. 3 (2018), 163–174.
3. D. M. Cvetkovic, M. Doob, M. Sachs, *Spectra of Graphs.* 10. Academic Press, New York, 1980.
4. J. Gärtner, S. A. Molchanov, *Parabolic problems for the Anderson model.* I. *Intermittency and related topics.* — Comm. Math. Phys. **132**, No. 3 (1990), 613–655.
5. Y. Higuchi, Y. Nomura, *Spectral structure of the laplacian on a covering graph.* — Eur. J. Combin. **30**, No. 2 (2009), 570–585.
6. И. И. Христолюбов, Е. Б. Яровая, *Предельная теорема для надкритического ветвящегося блуждания с источниками различной интенсивности.* — Теория вероятн. и ее примен. **64**, No. 3 (2019), 456–480.
7. M. Kimmel, D. E. Axelrod, *Branching Processed in Biology.* Interdisciplinary Applied Mathematics, 2002.
8. E. Korotyaev, N. Saburova, *Schrödinger operators on periodic discrete graphs.* — J. Math. Anal. Appl. **420**, No. 1 (2014), 576–611.
9. B. G. Malkiel, K. McCue, *A Ranndom Walk Down Wall Street.* New York, Norton, 1985.
10. J. J. Molitierno, *Applications of combinatorial matrix theory to Laplacian matrices of graphs.* Chapman and Hall/CRC, 2016.
11. M. Reed, B. Simon, *IV: Analysis of Operators*, Elsevier, 1978.
12. V. Topchii, V. Vatutin, E. Yarovaya, *Catalytic branching random walk and queueing systems with random number of independent ververs.* — Theory Probab. Math. Statist. **69** (2004), 1–15.
13. Л. В. Богачев, Е. Б. Яровая, *Моментный анализ ветвящегося случайного блуждания на решетке с одним источником.* — Докл. РАН **363**, No. 4 (1998), 439–442.
14. Е. Вл. Булинская, *Каталическое ветвящееся случайное блуждание по двумерной решетке.* — Теория вероятн. и ее примен. **55**, No. 1 (2010), 142–148.
15. Е. Вл. Булинская, *Полная классификация каталических ветвящихся процессов.* — Теория вероятн. и ее примен. **59**, No. 4 (2014), 639–666.

16. В. А. Ватутин, В. А. Топчий, *Предельная теорема для критических каталических ветвящихся случайных блужданий.* — Теория вероятн. и ее примен. **49**, No. 3 (2004), 461–484.
17. В. А. Ватутин, В. А. Топчий, *Каталические ветвящиеся случайные блуждания на* $\mathbb{Z}^d$ *с ветвлением в нуле.* — Матем. труды **14**, No. 2 (2011), 28–72.
18. В. А. Ватутин, В. А. Топчий, Ю. Ху, *Ветвящееся случайное блуждание по решетке* $\mathbb{Z}^4$ *с ветвлением лишь в начале координат.* — Теория вероятн. и ее примен. **56**, No. 2 (2011), 224–247.
19. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов.* Наука, 1977.
20. М. В. Платонова, К. С. Рядовкин, *Ветвящиеся случайные блуждания на* $\mathbb{Z}^d$ *с периодически расположенными источниками ветвления.* — Теория вероятн. и ее примен. **64**, No. 2 (2019), 283–307.
21. М. В. Федорюк, *Метод перевала.* Наука, 1977.
22. Е. Б. Яровая, *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде.* М., ЦПИ при мехмате Моск. ун-та, 2007.

Platonova M. V., Ryadovkin K. S. On the variance of the particle number of the supercritical branching random walk on periodic graphs.

An asymptotic behavior of the variance of the local particle number of a supercritical branching random walk with branching sources which are located periodically on $\mathbf{Z}^d$ is obtained.

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова;
СПбГУ, Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
С.-Петербург, Россия
E-mail: mariyaplat@rambler.ru
E-mail: kryadovkin@gmail.com

Поступило 5 ноября 2019 г.