Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 486, 2019 г.

В. В. Петров

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ СУММ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть $\{X_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ – последовательность случайных величин на некотором вероятностном пространстве, $\{a_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ – последовательность положительных чисел, такая, что $a_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Положим $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. В [1] найдены новые условия применимости обобщённого закона повторного логарифма в форме

$$\limsup S_n/a_n \leqslant 1 \text{ п.н.} \tag{1}$$

при дополнительном условии неубывания числовой последовательности $\{a_n\}$. В данной заметке получены достаточные условия для неравенства (1) при отказе от этого последнего условия.

В [1] введено следующее условие D: для любых положительных ε и $\varepsilon_0 < \varepsilon$ существует число $\gamma > 0$, такое что

$$\mathbf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k > (1+\varepsilon)a_n) \leqslant \gamma \mathbf{P}(S_n > (1+\varepsilon_0)a_n) \tag{2}$$

для всех достаточно больших n. Это условие имеет своим отправным пунктом классическое неравенство Колмогорова

$$\mathbf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k \geqslant x) \leqslant 2\mathbf{P}(S_n \geqslant x - (2B_n)^{1/2}) \tag{3}$$

для любого x и суммы S_n независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и конечными дисперсиями, где $B_n = \mathbf{E}{S_n}^2$ [2] (см. также [3, теорема 7.1 и неравенство (2.12)]).

В [1] приведены условия, достаточные для (1), при отсутствии условий независимости случайных величин из исходной последовательности и условий существования каких-либо моментов, однако добавлено условие неубывания числовой последовательности $\{a_n\}$. Последнее условие не выполнено, например, для последовательностей m-зависимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями, конечными дисперсиями и классическом выборе последовательности $\{a_n\}$:

$$a_n = (2B_n \log\log B_n)^{1/2}, \ \ B_n = \mathbf{E}{S_n}^2. \tag{4}$$

Ключевые слова: закон повторного логарифма, суммы случайных величин.

Последовательности m-зависимых случайных величин введены Хёфдингом и Роббинсом [4], получившими также первые предельные теоремы для сумм m-зависимых случайных величин. К настоящему времени литература по предельным теоремам для сумм m-зависимых случайных величин обширна.

При исследовании достаточных условий применимости закона повторного логарифма в форме (1) к последовательностям m-зависимых случайных величин с определением a_n равенствами (4) нарушение условия неубывания числовых последовательностей $\{B_n\}$ и $\{a_n\}$ компенсируется введением дополнительных условий на поведение последовательности $\{B_n\}$.

В [6] введено понятие последовательности m-ортогональных случайных величин. Пусть m – целое неотрицательное число. Будем говорить, что заданная на некотором вероятностном пространстве последовательность случайных величин $\{X_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ есть последовательность m-ортогональных случайных величин, если $\mathbf{E}{X_n}^2 < \infty$ для любого n и $\mathbf{E}(X_k X_j) = 0$ при $|k - j| > m$. В частности, последовательность 0-ортогональных случайных величин есть последовательность ортогональных случайных величин. Если $\{X_n\}$ – последовательность m-зависимых случайных величин с математическими ожиданиями, равными нулю, и конечными дисперсиями, то она является последовательностью m-ортогональных случайных величин. Последнее утверждение остаётся верным, если в нём заменить условие m-зависимости более слабым условием попарной m-зависимости.

Исследование предельных теорем для последовательностей m-ортогональных случайных величин представляет интерес с учётом того большого внимания, которое было уделено в литературе предельным теоремам для сумм ортогональных случайных величин и сумм m-зависимых случайных величин.

В [5–7] найдены условия применимости закона повторного логарифма в форме (1), где a_n определены равенствами (4), к последовательностям m-зависимых и m-ортогональных случайных величин. Для этих последовательностей условие неубывания числовой последовательности $\{a_n\}$ не выполнено, и в [5] введено следующее условие: для любого $\varepsilon > 0$ имеют место неравенства $a_{n+r} \geqslant a_n(1 - \varepsilon)$ для всех $r \geqslant 1$ и всех достаточно больших n.

Следующий результат не содержит условия неубывания числовой последовательности $\{a_n\}$, в отличие от [1].

Пусть $\{a_n\}$ – последовательность положительных чисел, такая что

$$a_n \to \infty, \quad a_{n+1}/a_n \to 1 \ \text{ при } n \to \infty. \tag{5}$$

Пусть $c > 1$. Тогда существует неубывающая последовательность целых чисел $\{n_k\}$, такая что $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$ и выполнены условия

$$a_{n_k-1} \leqslant c^k < a_{n_k} \tag{6}$$

при всех достаточно больших k. В силу (5), имеем

$$a_{n_k} \sim c^k \quad (k \to \infty). \tag{7}$$

Теорема. *Пусть выполнено условие D с заменой a_n в неравенстве* (2) *на c^n при любом $c > 1$, и пусть*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(S_{n_k} > (1+\varepsilon)c^k) < \infty \tag{8}$$

для введённой последовательности $\{n_k\}$ и любых $\varepsilon > 0$, $c > 1$. Тогда имеет место неравенство (1).

Доказательство. Пусть ε – произвольное положительное число. Вследствие (5)–(7) имеем

$$\mathbf{P}(S_n > (1+\varepsilon)a_n \text{ i.o.}) \leqslant \mathbf{P}\big(\max_{1\leqslant j\leqslant n_k} S_j > (1+\varepsilon/2)c^k \text{ б.ч.}\big) \tag{9}$$

при любом $c > 1$, достаточно близком к 1. В силу леммы Бореля–Кантелли, для доказательства (1) достаточно показать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\max_{1\leqslant j\leqslant n_k} S_j > (1+\varepsilon)c^k) < \infty$$

для любых $\varepsilon > 0$ и $c > 1$. Последнее утверждение следует из (8) и условия D с заменой a_n на c^n. $\square$

Для последовательности m-ортогональных случайных величин в [7] приведены условия, обеспечивающие неравенство (1) при a_n, определённых равенствами (4).

Список литературы

1. В. В. Петров, *О законе повторного логарифма без предположений о существовании моментов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 208–210.
2. A. Kolmogoroff, *Über das Gesetz des iterierten Logarithmus.* — Math. Ann. **101** (1929), 126–135.
3. V. V. Petrov, *Limit Theorems of Probability Theory. Oxford University Press.* Oxford and New York, 1995.
4. W. Hoeffding, H. Robbins, *The central limit theorem for dependent random variables.* — Duke Math. **15**, No. 3 (1948), 773–780.
5. В. В. Петров, *О законе повторного логарифма для последовательностей зависимых случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **97** (1980), 186–194.
6. В. В. Петров, *Последовательности m-ортогональных случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **119** (1982), 198–202.
7. В. В. Петров, *О законе повторного логарифма для последовательностей зависимых случайных величин.* — Вестник СПбУ, сер. 1 (Математика), вып. 1 (2017), 49–51.

Petrov V. V. On the law of the iterated logarithm for sums of dependent random variables.

Sufficient conditions are found for the applicability of the generalized law of the iterated logarithm for sums of dependent random variables in the case when the sequence of normalizing constants is not necessarily nondecreasing.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская набережная, 7/9,
199034, С.-Петербург, Россия
E-mail: petrov2v@mail.ru

Поступило 19 октября 2019 г.