Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 486, 2019 г.

А. К. Николаев, М. В. Платонова

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О СХОДИМОСТИ К ОБОБЩЕННЫМ ПРОЦЕССАМ ТИПА КОШИ

§1. Введение

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^m \mathcal{A}_m u, \ \ u(0,x) = \varphi(x), \tag{1}$$

где $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, а оператор $\mathcal{A}_m$ определяется на гладких функциях $f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$ как

$$\mathcal{A}_m f(x) = \text{v.p.} \int\limits_{\mathbf{R}} \Big(f(x+y) - \sum_{j=0}^{m} \frac{f^{(2j)}(x) y^{2j}}{(2j)!} \Big) \frac{dy}{y^{2m+2}}.$$

Будем считать, что начальная функция $\varphi(x)$ принадлежит соболевскому классу $W_2^{2m+2}(\mathbf{R})$.

Отметим, что при каждом m оператор $\mathcal{A}_m$ является псевдодифференциальным оператором с символом

$$a_m(p) = \text{v.p.} \int\limits_{\mathbf{R}} \Big(e^{-ipy} - \sum_{j=0}^{m} \frac{(-ipy)^{2j}}{(2j)!} \Big) \frac{dy}{y^{2m+2}}. \tag{2}$$

Известно, что при $m = 0$ для решения задачи Коши (1) справедливо вероятностное представление

$$u(t,x) = \mathbf{E}\varphi(x + \xi(t)), \tag{3}$$

где $\xi(t)$ – стандартный процесс Коши.

Если $m \geqslant 1$, то получить в точности вероятностное представление вида (3) невозможно, так как фундаментальное решение соответствующего уравнения не будет вероятностной плотностью.

В [3] был использован подход для получения вероятностного представления решения задачи Коши (1), основанный на аппроксимации

Ключевые слова: случайные процессы, процесс Коши, эволюционное уравнение, предельные теоремы.

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (грант No. 19-01-00657a), работа второго автора выполнена при поддержке программы социальных инвестиций “Родные города” ПАО ”Газпром нефть”.

решения последовательностью функций, которые имеют вид регуляризованных математических ожиданий функционалов от некоторого точечного пуассоновского поля.

В этой работе мы рассмотрим другой способ аппроксимации точного решения задачи Коши, где аппроксимирующие функции имеют вид регуляризованных математических ожиданий функционалов от сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.

Случаи четных и нечетных m, то есть $m = 2k$ и $m = 2k-1$, мы будем рассматривать отдельно. Случай $m = 2k-1$ является более сложным и требует использования комплекснозначных процессов.

§2. Основные обозначения и определения

Прямое преобразование Фурье в настоящей работе определяется как

$$\widehat{\varphi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{ipx}\, dx,$$

а, соответственно, обратное преобразование как

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(p)\, e^{-ipx}\, dp.$$

Через $W_2^k(\mathbf{R})$ обозначим пространство Соболева функций, определенных на $\mathbf{R}$ и имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные до порядка k включительно (см. [5, с. 146]). Стандартная норма в пространстве $W_2^k(\mathbf{R})$ определяется формулой

$$\|\psi\|_k^2 = \sum_{l=0}^{k} \int_{\mathbf{R}} |\psi^{(l)}(x)|^2\, dx.$$

Нам удобно использовать в пространстве $W_2^k(\mathbf{R})$ другую норму, эквивалентную стандартной (см. [5], стр. 190),

$$\|\psi\|_{W_2^k}^2 = \int_{\mathbf{R}} (1 + |p|^{2k})\, |\widehat{\psi}(p)|^2\, dp.$$

Оператор A, действующий по правилу

$$(A\varphi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-ipx}\, \widehat{A}(p)\, \widehat{\varphi}(p)\, dp,$$

называется псевдодифференциальным оператором с символом $\widehat{A}(p)$.

Для ограниченного оператора $A : W_2^k(\mathbf{R}) \to W_2^l(\mathbf{R})$ через

$$\|A\|_{W_2^k \to W_2^l}$$

обозначается соответствующая операторная норма.

Через $\mathbf{C}$ обозначим комплексную плоскость, а через $\mathbf{C}_+$ и $\mathbf{C}_-$ – верхнюю и нижнюю полуплоскости соответственно.

§3. Предельная теорема. Случай $m = 2k$.

Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих общее симметричное распределение $\mathcal{P}$. Предположим, что распределение $\mathcal{P}$ абсолютно непрерывно относительно меры Лебега, и для его плотности $q(x)$ при $|x| > 1$ выполнено

$$q(x) = \frac{1}{x^{4k+2}}(1 + h(x)), \tag{4}$$

где функция $h(x)$ удовлетворяет неравенству $|h(x)| \leqslant C|x|^{-\beta}$ для некоторых $\beta > 1$, $C > 0$.

Для любого $n \in \mathbf{N}$ определим случайный процесс $\zeta_n(t)$, полагая

$$\zeta_n(t) = n^{-\frac{1}{4k+1}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j,$$

где $\eta(t)$ – стандартный ($\mathbf{E}\eta(t) = t$) пуассоновский процесс, не зависящий от последовательности $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$.

Для $r \leqslant 2k$ обозначим через $\mu_{2r} = \mathbf{E}\xi_1^{2r}$ момент порядка $2r$ случайной величины ξ_1.

Для каждого $n \in \mathbf{N}$ определим полугруппу операторов P_n^t, полагая для $\varphi(x) \in W_2^l(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$

$$P_n^t \varphi(x) = \mathbf{E}[(\varphi * h_n)(x + \zeta_n(t))],$$

где функция $h_n(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{h}_n(p) = \exp\Big(- nt \sum_{j=1}^{2k} \frac{(-1)^j \mu_{2j} (pn^{-\frac{1}{4k+1}})^{2j}}{(2j)!} \Big).$$

Определенная таким образом функция $\widehat{h}_n(p)$ является быстро убывающей, так как коэффициент при старшей степени p^{4k} отрицателен.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. 1. *Для любого $n \in \mathbf{N}$ оператор P_n^t является псевдодифференциальным оператором с символом $\widehat{g}_n(p)$, где*

$$\widehat{g}_n(p) = \exp\Big(nt\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(\cos\big(pyn^{-\frac{1}{4k+1}}\big)-1\big)q(y)\,dy\Big)\cdot\widehat{h}_n(p).$$

2. *Для любых $n \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{R}$ справедливо неравенство $|\widehat{g}_n(p)| \leqslant 1$.*

Доказательство. Запишем выражение для функции $P_n^t\varphi(x)$ в виде

$$P_n^t\varphi(x) = \mathbf{E}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}(p)\widehat{h}_n(p)e^{-i\,p\,(x+\zeta_n(t))}\,dp$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}(p)\widehat{h}_n(p)e^{-ipx}\mathbf{E}e^{-i\,p\,\zeta_n(t)}\,dp = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}(p)\widehat{g}_n(p)e^{-i\,p\,x}\,dp\,,$$

где

$$\widehat{g}_n(p) = \widehat{h}_n(p)\,\mathbf{E}e^{-i\,p\,\zeta_n(t)}.$$

Из теоремы Кэмпбелла (см. [2, §3.2]) следует, что

$$\widehat{g}_n(p) = \exp\Big(nt\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(\cos\big(pyn^{-\frac{1}{4k+1}}\big)-1\big)q(y)\,dy\Big)\cdot\widehat{h}_n(p)$$

$$= \exp\Big(nt\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\cos\big(pyn^{-\frac{1}{4k+1}}\big)+\sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^{j+1}(pyn^{-\frac{1}{4k+1}})^{2j}}{(2j)!}\Big)q(y)\,dy\Big). \tag{5}$$

Для доказательства утверждения п. 2 достаточно показать, что подынтегральное выражение в (5) неположительно. Данное утверждение следует из неравенства

$$\cos s - 1 + \sum_{j=1}^{2k}\frac{(-1)^{j+1}s^{2j}}{(2j)!} \leqslant 0, \tag{6}$$

которое справедливо при любом вещественном s. $\square$

Обозначим через P^t полугруппу операторов $P^t = e^{t\mathcal{A}_{2k}}$. По определению оператор P^t переводит начальную функцию $\varphi(x)$ в решение $u(t,x)$ задачи Коши (1).

Покажем, что полугруппы P_n^t аппроксимируют при $n \to \infty$ полугруппу P^t.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+4k+2}(\mathbf{R})$, $l \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbf{N}$. *Тогда существует константа* $C > 0$, *такая что справедливо неравенство*

$$\|P_n^t \varphi - P^t \varphi\|_{W_2^l} \leqslant Ctn^{-\frac{1}{4k+1}} \|\varphi\|_{W_2^{l+4k+2}}.$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся известной формулой теории возмущений (см. [1, Гл. IX, § 2, п. 1]).

Пусть A – оператор в некотором гильбертовом пространстве H, такой что для $t \geqslant 0$ существует ограниченная полугруппа операторов

$$U_A(t) = e^{tA}.$$

Пусть оператор B – некоторое возмущение оператора A, такое что полугруппа $U_{A+B}(t)$ ограничена. Тогда справедлива формула

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int_0^t e^{\tau(A+B)} B e^{(t-\tau)A} d\tau. \tag{7}$$

Применим формулу (7) для случая, когда $e^{tA} = P_n^t$, $e^{t(A+B)} = P^t$. Напомним, что эти операторы являются псевдодифференциальными с символами $\widehat{g}_n(p)$ и $e^{ta_{2k}(p)}$ соответственно (функция $a_{2k}(p)$ определяется формулой (2)). Из леммы 1 и (6) следует, что для любого $t \geqslant 0$ и любого целого неотрицательного l справедливы неравенства

$$\|e^{tA}\|_{W_2^{l+4k+2} \to W_2^{l+4k+2}} \leqslant 1, \quad \|e^{t(A+B)}\|_{W_2^l \to W_2^l} \leqslant 1.$$

Таким образом, остается оценить норму $\|B\|_{W_2^{l+4k+2} \to W_2^l}$.

Вычислим преобразование Фурье функции $B\varphi(x)$. Имеем

$$\widehat{B\varphi}(p) = \widehat{\varphi}(p)|p|^{4k+1} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\cos y - \sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^j y^{2j}}{(2j)!} \Big) \frac{dy}{y^{4k+2}}$$
$$- n\widehat{\varphi}(p) \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\cos (pyn^{-\frac{1}{4k+1}}) - \sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^j (pyn^{-\frac{1}{4k+1}})^{2j}}{(2j)!} \Big) q(y)\, dy.$$

Введем обозначение

$$S(y) = \cos y - \sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^j y^{2j}}{(2j)!}.$$

Поскольку распределение $\mathcal{P}$ симметричное, а его плотность $q(x)$ при $|x|>1$ определяется формулой (4), то справедливо соотношение

$$\widehat{B\varphi}(p) = 2\widehat{\varphi}(p)|p|^{4k+1}\int\limits_0^{|p|n^{-\frac{1}{4k+1}}} S(y)\frac{dy}{y^{4k+2}} - 2n\widehat{\varphi}(p)\int\limits_0^1 S(pyn^{-\frac{1}{4k+1}})q(y)\,dy$$

$$-\,2n\widehat{\varphi}(p)\int\limits_1^\infty S(pyn^{-\frac{1}{4k+1}})h(y)\,\frac{dy}{y^{4k+2}} = I_1(p)+I_2(p)+I_3(p).$$

Оценим $|\widehat{B\varphi}(p)|$ при $|p|\leqslant n^{\frac{1}{4k+1}}$.

Модуль подынтегральной функции в $I_1(p)$ не превосходит некоторой константы, а значит, справедливо неравенство

$$|I_1(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)|p^{4k+2}n^{-\frac{1}{4k+1}}.$$

Для оценки $|I_2(p)|$ воспользуемся тем, что при $|y|<1$ справедливо неравенство

$$|S(pyn^{-\frac{1}{4k+1}})| \leqslant Cp^{4k+2}n^{-\frac{4k+2}{4k+1}}y^{4k+2}.$$

И, таким образом,

$$|I_2(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)|p^{4k+2}n^{-\frac{1}{4k+1}}\int\limits_0^1 y^{4k+2}q(y)\,dy \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)|p^{4k+2}n^{-\frac{1}{4k+1}}.$$

Наконец, для $|I_3(p)|$ имеем

$$|I_3(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)|\int\limits_1^\infty \min\Big(\frac{p^{4k+2}n^{-\frac{1}{4k+1}}y^{4k+2}}{(4k+2)!},\ \frac{p^{4k}n^{\frac{1}{4k+1}}y^{4k}}{(4k)!}\Big)\,\frac{dy}{y^{4k+2+\beta}}$$

$$\leqslant C|\widehat{\varphi}(p)|p^{4k+2}n^{-\frac{1}{4k+1}}.$$

Окончательно, при $|p|\leqslant n^{\frac{1}{4k+1}}$ оценка для $|\widehat{B\varphi}(p)|$ имеет вид

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)|p^{4k+2}n^{-\frac{1}{4k+1}}.$$

Теперь оценим $|\widehat{B\varphi}(p)|$ при $|p|\geqslant n^{\frac{1}{4k+1}}$.

Имеем

$$|I_1(p)| = 2|\widehat{\varphi}(p)||p|^{4k+1}\Big|\int\limits_0^{|p|n^{-\frac{1}{4k+1}}} S(y)\,\frac{dy}{y^{4k+2}}\Big| \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)||p|^{4k+1}.$$

Оценим $|I_2(p)|$. При $|y| < 1$ выполнено

$$|S(pyn^{-\frac{1}{4k+1}})| \leqslant C\frac{|p|^{4k+1}}{n}.$$

Таким образом,

$$|I_2(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)||p|^{4k+1}\int\limits_0^1 q(y)\,dy \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)||p|^{4k+1}.$$

Наконец, оценим $|I_3(p)|$.

При $|y| \geqslant 1$ выполнено неравенство

$$|S(pyn^{-\frac{1}{4k+1}})| \leqslant Cp^{4k}n^{-\frac{4k}{4k+1}}y^{4k}.$$

Тогда

$$|I_3(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)|p^{4k}n^{\frac{1}{4k+1}}\int\limits_1^\infty y^{-2-\beta}\,dy \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)||p|^{4k+1}.$$

Окончательно, при $|p| \geqslant n^{\frac{1}{4k+1}}$ получаем

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant C_2|\widehat{\varphi}(p)||p|^{4k+1}.$$

Оценим теперь $\|B\varphi\|^2_{W_2^l}$. Имеем

$$\begin{aligned}
\|B\varphi\|^2_{W_2^l} = \int\limits_{|p|<n^{\frac{1}{4k+1}}} (1+|p|^{2l})|\widehat{B\varphi}(p)|^2dp + \int\limits_{|p|\geqslant n^{\frac{1}{4k+1}}} (1+|p|^{2l})|\widehat{B\varphi}(p)|^2dp \\
\leqslant \int\limits_{|p|<n^{\frac{1}{4k+1}}} (1+|p|^{2l})\Big(C|\widehat{\varphi}(p)|p^{4k+2}n^{-\frac{1}{4k+1}}\Big)^2dp \\
+ \int\limits_{|p|\geqslant n^{\frac{1}{4k+1}}} (1+|p|^{2l})\Big(C|\widehat{\varphi}(p)||p|^{4k+1}\Big)^2dp \\
\leqslant Cn^{-\frac{2}{4k+1}}\int\limits_{\mathbf{R}}(1+|p|^{2l})p^{8k+4}|\widehat{\varphi}(p)|^2dp. \quad (8)
\end{aligned}$$

Заметим, что при $l \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\frac{(1+|p|^{2l})p^{8k+4}}{1+|p|^{2l+8k+4}} \leqslant \frac{2p^{8k+4}}{1+p^{8k+4}} < 2. \quad (9)$$

Из (8) и (9) вытекает оценка

$$\|B\varphi\|^2_{W_2^l} \leqslant Cn^{-\frac{2}{4k+1}} \int\limits_{\mathbf{R}} (1+|p|^{2(l+4k+2)})|\widehat{\varphi}(p)|^2 dp = Cn^{-\frac{2}{4k+1}} \|\varphi\|^2_{W_2^{l+4k+2}},$$

из которой немедленно следует утверждение теоремы. □

§4. Предельная теорема. Случай $m = 2k-1$.

Пусть $\{\xi_j^+\}_{j=1}^\infty$ – последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин, а $\{\xi_j^-\}_{j=1}^\infty$ – последовательность независимых одинаково распределенных неположительных случайных величин. Потребуем дополнительно, чтобы последовательности $\{\xi_j^+\}_{j=1}^\infty$ и $\{\xi_j^-\}_{j=1}^\infty$ были независимыми.

Предположим, что распределение $\mathcal{P}^\pm$ случайной величины $\xi_1^\pm$ имеет плотность $q_\pm(x)$ и справедливы соотношения

$$q_+(x) = q_-(-x),\ x > 0, \tag{10}$$

$$q_+(x) = \frac{1}{x^{4k}}(1+h(x)),\ x > 1, \tag{11}$$

где функция $h(x)$ удовлетворяет неравенству $|h(x)| \leqslant C\, x^{-\beta}$ для некоторых $\beta > 1$, $C > 0$.

Для $r \leqslant 4k-2$ через $\mu_r^\pm = \mathbf{E}\big(\xi_1^\pm\big)^r$ обозначим момент порядка r случайной величины $\xi_1^\pm$. Из формулы (10) следует, что выполнено условие $\mu_r^+ = (-1)^r \mu_r^-$, $r \leqslant 4k-2$.

Для любого $n \in \mathbf{N}$ определим два случайных процесса $\zeta_n^\pm(t)$, полагая

$$\zeta_n^\pm(t) = n^{-\frac{1}{4k-1}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j^\pm,$$

где $\eta(t)$ – стандартный ($\mathbf{E}\eta(t) = t$) пуассоновский процесс, не зависящий от последовательностей $\{\xi_j^+\}_{j=1}^\infty$ и $\{\xi_j^-\}_{j=1}^\infty$.

Через $P_\pm$ обозначим проекторы Рисса, действующие из $L_2(\mathbf{R})$ на пространства Харди $H^2_+(\mathbf{C}_+)$ и $H^2_-(\mathbf{C}_-)$ соответственно. На классе функций $L_1 \cap L_2$ действие проекторов Рисса определяется следующими формулами

$$\varphi_+(x) = P_+\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ipx}\widehat{\varphi}(p)dp,$$

$$\varphi_-(x) = P_-\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ipx}\widehat{\varphi}(p)dp.$$

Отметим, что функции $P_+\varphi$, $P_-\varphi$ аналитически продолжаются в верхнюю и нижнюю полуплоскости соответственно.

Для каждого $n \in \mathbf{N}$ определим полугруппу операторов P_n^t, полагая для $\varphi(x) \in W_2^l(\mathbf{R}), l \geqslant 0$

$$P_n^t\,\varphi(x) = \mathbf{E}[(\varphi_+ * h_n)(x + \sigma_+\zeta_n^+(t) + \sigma_-\zeta_n^-(t))] + \mathbf{E}[(\varphi_- * h_n)(x + \sigma_-\zeta_n^+(t) + \sigma_+\zeta_n^-(t))],$$

где $\sigma_+ = e^{\frac{i\pi}{4k-1}}$, $\sigma_- = e^{-\frac{i\pi}{4k-1}}$, а функция $h_n(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{h}_n(p) = \exp\Big(-nt\sum_{j=1}^{4k-2}\frac{\mu_j^+(i|p|\sigma_+ n^{-\frac{1}{4k-1}})^j}{j!}\Big) \times \exp\Big(-nt\sum_{j=1}^{4k-2}\frac{\mu_j^-(i|p|\sigma_- n^{-\frac{1}{4k-1}})^j}{j!}\Big).$$

Определенная таким образом функция $\widehat{h}_n(p)$ является быстро убывающей, так как коэффициент при старшей степени $|p|^{4k-2}$ отрицателен.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 2. *Для любого $z \geqslant 0$ справедливы неравенства*

1. $\mathrm{Re}\Big(e^{iz\sigma_+} - \sum\limits_{j=0}^{4k-2}\frac{(iz\sigma_+)^j}{j!}\Big) \leqslant 0$. 2. $\mathrm{Re}\Big(e^{-iz\sigma_-} - \sum\limits_{j=0}^{4k-2}\frac{(-iz\sigma_-)^j}{j!}\Big) \leqslant 0$.

Доказательство. Доказательство леммы приведено в [4, с. 66]. □

Лемма 3. 1. *Для любого $n \in \mathbf{N}$ оператор P_n^t является псевдодифференциальным оператором с символом*

$$\widehat{g}_n(p) = \exp\Big(nt\int\limits_0^\infty \big(e^{-i|p|y\sigma_- n^{-\frac{1}{4k-1}}} - 1\big)q_+(y)dy\Big) \times \exp\Big(nt\int\limits_{-\infty}^0 \big(e^{-i|p|y\sigma_+ n^{-\frac{1}{4k-1}}} - 1\big)q_-(y)dy\Big)\widehat{h}_n(p).$$

2. *Для любых t, n, p справедливо неравенство*

$$\big|\widehat{g}_n(p)\big| \leqslant 1.$$

Доказательство. Запишем выражение для функции $P_n^t\varphi(x)$ в виде

$$P_n^t\,\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \widehat{\varphi}_-(p)e^{-ipx}\mathbf{E}\,e^{-ip\sigma_-\zeta_n^+(t)}\mathbf{E}\,e^{-ip\sigma_+\zeta_n^-(t)}\widehat{h}_n(p)\,dp + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^0 \widehat{\varphi}_+(p)e^{-ipx}\mathbf{E}\,e^{-ip\sigma_-\zeta_n^-(t)}\mathbf{E}\,e^{-ip\sigma_+\zeta_n^+(t)}\widehat{h}_n(p)\,dp.$$

Из теоремы Кэмпбелла (см. [2], §3.2) следует, что

$$\mathbf{E}\,e^{-ip\sigma_+\zeta_n^+(t)} = \exp\Big(nt\int\limits_0^\infty \big(e^{-ipy\sigma_+ n^{-\frac{1}{4k-1}}} - 1\big)q_+(y)\,dy\Big), \quad p<0,$$

$$\mathbf{E}\,e^{-ip\sigma_-\zeta_n^-(t)} = \exp\Big(nt\int\limits_{-\infty}^0 \big(e^{-ipy\sigma_- n^{-\frac{1}{4k-1}}} - 1\big)q_-(y)\,dy\Big), \quad p<0,$$

$$\mathbf{E}\,e^{-ip\sigma_-\zeta_n^+(t)} = \exp\Big(nt\int\limits_0^\infty \big(e^{-ipy\sigma_- n^{-\frac{1}{4k-1}}} - 1\big)q_+(y)\,dy\Big), \quad p>0,$$

$$\mathbf{E}\,e^{-ip\sigma_+\zeta_n^-(t)} = \exp\Big(nt\int\limits_{-\infty}^0 \big(e^{-ipy\sigma_+ n^{-\frac{1}{4k-1}}} - 1\big)q_-(y)\,dy\Big), \quad p>0.$$

Тогда

$$P_n^t\,\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ip\,x}\,\widehat{\varphi}(p)\,\widehat{g}_n(p)\,dp.$$

Из последней формулы следует, что оператор P_n^t является псевдодифференциальным оператором с символом $\widehat{g}_n(p)$.

Из леммы 2 следует неравенство

$$\left|\widehat{g}_n(p)\right| \leqslant 1. \qquad \square$$

Обозначим через P^t полугруппу операторов $P^t = e^{-t\mathcal{A}_{2k-1}}$. По определению оператор P^t переводит начальную функцию $\varphi(x)$ в точное решение $u(t,x)$ задачи Коши (1).

Покажем, что полугруппы P_n^t аппроксимируют при $n\to\infty$ полугруппу P^t.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi\in W_2^{l+4k}(\mathbf{R})$, $l\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, $k\in\mathbf{N}$. *Тогда существует константа* $C>0$, *такая что справедливо неравенство*

$$\|P_n^t\,\varphi - P^t\,\varphi\|_{W_2^l} \leqslant Ctn^{-\frac{1}{4k-1}}\|\varphi\|_{W_2^{l+4k}}.$$

Доказательство. Применим формулу (7) для случая, когда $e^{tA} = P_n^t$, $e^{t(A+B)} = P^t$. Напомним, что эти операторы являются псевдодифференциальными с символами $\widehat{g}_n(p)$ и $e^{-ta_{2k-1}(p)}$ соответственно. Из леммы 3 следует, что $\|e^{tA}\|_{W_2^l\to W_2^l}\leqslant 1$ для любого $l\geqslant 0$ и $t>0$, а из неравенства

$$\cos s - 1 + \sum_{j=1}^{2k-1}\frac{(-1)^{j+1}s^{2j}}{(2j)!} \geqslant 0$$

следует справедливость неравенства $\|e^{t(A+B)}\|_{W_2^l\to W_2^l}\leqslant 1$. Таким образом, остается оценить норму $\|B\|_{W_2^{l+4k}\to W_2^l}$.

Вычислим преобразования Фурье функции $B\varphi(x)$

$$\widehat{B\varphi}(p) = -\widehat{\varphi}(p)|p|^{4k-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\cos y - \sum_{j=0}^{2k-1}\frac{(-1)^j y^{2j}}{(2j)!}\Big)\frac{dy}{y^{4k}}$$
$$- n\widehat{\varphi}(p)\int\limits_{0}^{\infty}\Big(e^{i|p|y\sigma_+ n^{-\frac{1}{4k-1}}} - \sum_{j=0}^{4k-2}\frac{(i|p|y\sigma_+ n^{-\frac{1}{4k-1}})^j}{j!}\Big)q_+(y)\,dy$$

$$- n\widehat{\varphi}(p) \int\limits_{-\infty}^{0} \Big(e^{i|p|y\sigma_- n^{-\frac{1}{4k-1}}} - \sum_{j=0}^{4k-2} \frac{(i|p|y\sigma_- n^{-\frac{1}{4k-1}})^j}{j!}\Big) q_-(y)\, dy. \quad (12)$$

Введем для удобства обозначение

$$S(z) = e^{iz} - \sum_{j=0}^{4k-2} \frac{(iz)^j}{j!},\ z \in \mathbf{C}.$$

Поскольку плотность распределения $q_\pm(x)$ определяется формулами (10) и (11), выражение (12) может быть переписано в виде

$$\widehat{B\varphi}(p) = -\widehat{\varphi}(p)|p|^{4k-1} \int\limits_{\gamma} S(z) \frac{dz}{z^{4k}}$$

$$- \Big(n\widehat{\varphi}(p) \int\limits_0^1 S(|p|y\sigma_+ n^{-\frac{1}{4k-1}}) q_+(y)\, dy + n\widehat{\varphi}(p) \int\limits_{-1}^{0} S(|p|y\sigma_- n^{-\frac{1}{4k-1}}) q_-(y)\, dy\Big)$$

$$- \Big(n\widehat{\varphi}(p) \int\limits_1^\infty S(|p|y\sigma_+ n^{-\frac{1}{4k-1}}) h(y)\, \frac{dy}{y^{4k}} + n\widehat{\varphi}(p) \int\limits_{-\infty}^{-1} S(|p|y\sigma_- n^{-\frac{1}{4k-1}}) h(-y)\, \frac{dy}{y^{4k}}\Big)$$

$$= I_1(p) + I_2(p) + I_3(p),$$

где контур γ определяется как

$$\gamma = \Big\{z \in \mathbf{C} : \arg z \in \big(\frac{\pi(4k-2)}{4k-1},\, \pi\big),\ |z| = |p| n^{-\frac{1}{4k-1}}\Big\}$$
$$\cup \{z \in \mathbf{C} : Im\, z = 0,\ |z| < |p| n^{-\frac{1}{4k-1}}\}$$
$$\cup \{z \in \mathbf{C} : \arg z \in (0,\ \frac{\pi}{4k-1}), |z| = |p| n^{-\frac{1}{4k-1}}\}.$$

Оценим $|\widehat{B\varphi}(p)|$ в случае, когда $|p| \leqslant n^{\frac{1}{4k-1}}$.

Получим оценку для $|I_1(p)|$.

Модуль подынтегральной функции не превосходит на контуре интегрирования γ некоторой константы $C > 0$. Таким образом, справедлива оценка

$$|I_1(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)| p^{4k} n^{-\frac{1}{4k-1}}.$$

Для оценки $|I_2(p)|$ воспользуемся тем, что при $|y| < 1$ имеет место неравенство

$$\big|S(|p|y\sigma_\pm n^{-\frac{1}{4k-1}})\big| \leqslant C p^{4k} n^{-\frac{4k}{4k-1}}.$$

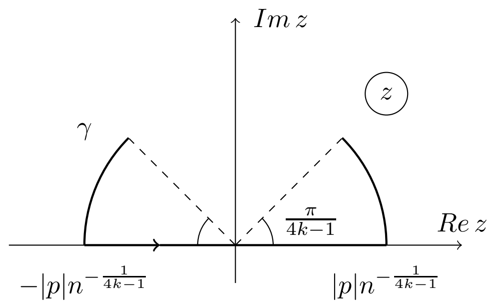

Рис. 1: Контур интегрирования γ.

Таким образом,

$$|I_2(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)|p^{4k}n^{-\frac{1}{4k-1}}.$$

Наконец, для $|I_3(p)|$ имеем

$$|I_3(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)| \int\limits_1^{\infty} \min\Big(\frac{p^{4k}n^{-\frac{1}{4k-1}}y^{4k}}{(4k)!}, \frac{p^{4k-2}n^{\frac{1}{4k-1}}y^{4k-2}}{(4k-2)!}\Big)\frac{dy}{y^{4k+\beta}}$$
$$\leqslant C|\widehat{\varphi}(p)|p^{4k}n^{-\frac{1}{4k-1}}.$$

Окончательно, при $|p| \leqslant n^{\frac{1}{4k-1}}$ получаем

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)|p^{4k}n^{-\frac{1}{4k-1}}.$$

Оценим $|\widehat{B\varphi}(p)|$ в случае, когда $|p| \geqslant n^{\frac{1}{4k-1}}$.
Для $|I_1(p)|$ имеем

$$|I_1(p)| = |\widehat{\varphi}(p)||p|^{4k-1}\Big|\int\limits_{\gamma} S(z)\frac{dz}{z^{4k}}\Big| \leqslant C|p|^{4k-1}|\widehat{\varphi}(p)|.$$

Оценим теперь $|I_2(p)|$. При $|y| < 1$ справедливо неравенство

$$|S(|p|y\sigma_{\pm}n^{-\frac{1}{4k-1}})| \leqslant \frac{C}{n}|p|^{4k-1}.$$

Таким образом,

$$|I_2(p)| \leqslant C|p|^{4k-1}|\widehat{\varphi}(p)|.$$

Наконец, оценим $|I_3(p)|$. Воспользуемся тем, что при $|y| \geqslant 1$ имеет место неравенство

$$|S(|p|y\sigma_{\pm}n^{-\frac{1}{4k-1}})| \leqslant Cn^{\frac{1}{4k-1}}|p|^{4k-2}y^{4k-2}.$$

Тогда

$$|I_3(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)|p^{4k-2}n^{\frac{1}{4k-1}}\int\limits_1^{\infty} y^{-2-\beta}dy \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)||p|^{4k-1}.$$

Окончательно, при $|p| \geqslant n^{\frac{1}{4k-1}}$ оценка для $\left|\widehat{B\varphi}(p)\right|$ имеет вид

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)||p|^{4k-1}.$$

Теперь мы можем оценить величину $\|B\varphi\|^2_{W_2^l}$

$$\begin{aligned}
\|B\varphi\|^2_{W_2^l} &= \int\limits_{|p|<n^{\frac{1}{4k-1}}} (1+|p|^{2l})|\widehat{B\varphi}(p)|^2dp + \int\limits_{|p|\geqslant n^{\frac{1}{4k-1}}} (1+|p|^{2l})|\widehat{B\varphi}(p)|^2dp \\
&\leqslant \int\limits_{|p|<n^{\frac{1}{4k-1}}} (1+|p|^{2l})\Big(C\,|\widehat{\varphi}(p)|p^{4k}n^{-\frac{1}{4k-1}}\Big)^2dp \\
&\quad + \int\limits_{|p|\geqslant n^{\frac{1}{4k-1}}} (1+|p|^{2l})\Big(C\,|\widehat{\varphi}(p)||p|^{4k-1}\Big)^2dp \\
&\leqslant C\,n^{-\frac{2}{4k-1}}\int\limits_{\mathbf{R}}(1+|p|^{2l})p^{8k}|\widehat{\varphi}(p)|^2dp. \qquad (13)
\end{aligned}$$

Заметим, что при $l \geqslant 0$

$$\frac{(1+|p|^{2l})p^{8k}}{1+|p|^{2l+8k}} \leqslant \frac{2p^{8k}}{1+p^{8k}} < 2. \qquad (14)$$

Тогда из (13) и (14) следует, что

$$\|B\varphi\|^2_{W_2^l} \leqslant C\,n^{-\frac{2}{4k-1}}\int\limits_{\mathbf{R}}(1+|p|^{2(l+4k)})|\widehat{\varphi}(p)|^2dp = C\,n^{-\frac{2}{4k-1}}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+4k}}.$$

Окончательно, получаем

$$\|P_n^t\varphi - P^t\varphi\|_{W_2^l} \leqslant Ctn^{-\frac{1}{4k-1}}\|\varphi\|_{W_2^{l+4k}}.$$

$\square$

Список литературы

1. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* — М., Мир (1972).
2. Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы.* — М., МЦНМО (2007).
3. А. К. Николаев, М. В. Платонова, *Невероятностные аналоги процесса Коши.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **474** (2018), 183–194.
4. М. В. Платонова, *Аппроксимация решения задачи Коши для эволюционных уравнений с оператором Римана-Лиувилля математическими ожиданиями функционалов от стохастических процессов.* — Дис. канд. физ.-мат. наук, С.-Петербург. ПОМИ РАН (2017).
5. Д. К. Фаддеев, Б. З. Вулих, Н. Н. Уральцева, *Избранные главы анализа и высшей алгебры.* — Л., Изд-во Ленингр. ун–та, (1981), 200 с.

Nikolaev A. K., Platonova M. V. Limit theorems on convergence to generalized Cauchy type processes.

We prove a limit theorem on convergence of mathematical expectations of functionals of sums of independent random variables to a Cauchy problem solution for an evolution equation $\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^m \mathcal{A}_m u$ where $\mathcal{A}_m$ is a convolution operator with a generalized function $|x|^{-2m-2}$, $m \in \mathbf{N}$.

С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: nikolaiev.96@bk.ru

Поступило 5 ноября 2019 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский государственный университет,
Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
С.-Петербург, Россия
E-mail: mariyaplat@rambler.ru