Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 486, 2019 г.

Я. Ю. Никитин, Т. А. Полевая

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПЛОЩАДЕЙ И ПЕРИМЕТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ВПИСАННЫХ И ОПИСАННЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

§1. Введение

Целью настоящей работы является изучение ряда вопросов, связанных с максимальными и минимальными площадями и периметрами случайных выпуклых вписанных и описанных многоугольников. Эти площади и периметры выражаются в терминах так назывемых U-max и U-min статистик. Начало изучению таких статистик положили Лао и Майер в [4, 5, 8]. Приведем определение U-max статистики, U-min статистики определяются совершенно аналогично.

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значение в измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$, $h : \mathfrak{X}^m \to \mathbb{R}$ – симметрическая борелевская функция. Статистика U_n, задаваемая равенством

$$U_n = \max_J h(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_m}),$$

где $J = \{(i_1, \dots, i_m) : 1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant n\}$, называется U-max статистикой, а функция h – её ядром.

Мы находим предельные распределения таких U-max статистик, как максимальная площадь и периметр выпуклых *вписанных* m-угольников, вершины которых распределены на окружности с почти произвольной непрерывной плотностью. В качестве U-min статистик рассматриваются минимальные площади и периметры выпуклых *описанных* m-угольников, касающихся окружности в точках, распределенных по окружности с такой же плотностью.

Частные случаи данной задачи рассматривались ранее. Сначала в [5] она была решена для случая вписанных треугольников с равномерным распределением точек на окружности. Затем в [3] было получено обобщение на вписанные и описанные многоугольники, но попрежнему с *равномерным* распределением вершин.

Ключевые слова: U-max статистики, распределение Вейбулла, случайный периметр, случайная площадь, вписанный многоугольник.

Нами получено дальнейшее обобщение на случай распределения на окружности с непрерывной плотностью, удовлетворяющей слабому дополнительному условию C_l (см. ниже). Этот общий результат дает возможность переноса результатов о максимальной площади с окружности на эллипс при равномерно распределенных по периметру эллипса точках. Подобные результаты для эллипса ранее в литературе не встречались. Однако применяемый подход не позволяет решить аналогичную задачу для *периметра*. Этот вопрос будет рассмотрен в другом месте.

§2. Предельное распределение максимальной площади вписанных выпуклых случайных многоугольников

Мы используем, как в [5] и [3], пуассоновскую аппроксимацию. Основным орудием здесь служит теорема из [5], основанная на результатах главы 2 из [1] и статье [9].

Теорема 1. *Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значение в измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$, $h : \mathfrak{X}^m \to \mathbb{R}$ – симметрическая борелевская функция, статистика U_n является U-тах статистикой с ядром h. Для $z \in \mathbb{R}$ обозначим*

$$p_{n,z} = \mathbf{P}\{h(\xi_1, \dots, \xi_m) > z\}, \qquad \lambda_{n,z} = \binom{n}{m} p_{n,z},$$

$$\tau_{n,z}(r) = P\{h(\xi_1, \dots, \xi_m) > z,\ h(\xi_{1+m-r}, \xi_{2+m-r}, \dots, \xi_{2m-r}) > z\}/p_{n,z}.$$

Если для некоторого отображения $z_n : T \to \mathbb{R}$, $T \subset \mathbb{R}$, для любого $t \in T$ выполняются условия

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{n,z_n(t)} = \lambda_t > 0, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{2m-1} p_{n,z_n(t)} \tau_{n,z_n(t)}(m-1) = 0, \tag{2}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} P\{U_n \leqslant z_n(t)\} = \exp\{-\lambda_t\} \quad \text{для любого} \quad t \in T.$$

В работе [5] показано, что условие (2) можно заменить более слабым условием:

$$\forall r = 1, \dots, m-1 \quad \lim_{n\to\infty} n^{2m-r} p_{n,z_n(t)} \tau_{n,z_n(t)}(r) = 0. \tag{3}$$

Мы также используем теорему о среднем, см., например, [6].

Теорема 2 (теорема о среднем)**.** *Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ – связное множество конечной меры. Если функция f непрерывна и суммируема на E, то существует такая точка $c \in E$, что*

$$\int\limits_E f(x)dx = f(c) \cdot \mathrm{mes}(E).$$

Рассмотрим единичную окружность с центром в начале координат и n независимых одинаково распределенных на ней случайных точек $U_1, \ldots, U_n$ с непрерывной плотностью $p(x)$. Обозначим через $area(U_{i_1}, \ldots, U_{i_m})$ площадь выпуклого многоугольника с вершинами в точках $U_{i_1}, \ldots, U_{i_m}$. Число m фиксировано, тогда как n неограниченно растет. Ясно, что площадь многоугольника является симметрической борелевской функцией от координат вершин. Пусть

$$A_n^m = \max_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n} \mathrm{area}(U_{i_1}, \ldots, U_{i_m})$$

– соответствующая U-max статистика. Сформулируем предельную теорему для A_n^m.

Предварительно наложим дополнительное условие на плотность p. Под плотностью p на окружности понимается неотрицательная 2π – периодическая функция, такая, что $\int\limits_0^{2\pi} p(x)\ dx = 1$. Будем говорить, что плотность p на окружности $[0, 2\pi]$ удовлетворяет условию $C_l, l \in \mathbb{N}$, если на этом отрезке найдется такая точка x^*, что

$$\prod_{k=0}^{l} p\Big(x^* + \frac{2\pi k}{m}\Big) > 0.$$

Это означает, грубо говоря, что случайные точки на окружности, распределенные с плотностью p, могут образовывать вершины многоугольника, близкого к правильному. Это условие требуется для невырожденности предельного распределения, поскольку гарантирует неравенство

$$\int\limits_0^{2\pi} \prod_{k=0}^{l} p\Big(x + \frac{2\pi k}{m}\Big) dx > 0.$$

Распространенные распределения на окружности типа распределения фон Мизеса, см., например, [7], этому свойству удовлетворяют.

Теорема 3. *Если плотность исходных наблюдений p удовлетворяет условию C_{2m-2}, то справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big\{ n^{\frac{2m}{m-1}} \Big(\frac{m}{2} \sin \frac{2\pi}{m} - A_n^m \Big) \leqslant t \Big\} = 1 - \exp\Big\{ -\frac{K_m(p)}{m} t^{\frac{m-1}{2}} \Big\}, \quad (4)$$

где

$$K_m(p) = \frac{1}{\Gamma(\frac{m+1}{2})\sqrt{m}} \Big(2\sqrt{\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{m}}} \Big)^{m-1} \int\limits_0^{2\pi} \prod_{k=0}^{m-1} p\Big(x + \frac{2\pi k}{m} \Big) dx > 0. \quad (5)$$

Таким образом, предельным распределением является распределение Вейбулла, что согласуется с предельной теорией для экстремальных значений независимой выборки.

Для доказательства теоремы докажем две вспомогательные леммы. Через σ_m обозначим площадь выпуклого многоугольника, вершинами которого являются m точек $V_0, \ldots, V_{m-1}$, распределенные с плотностью p.

Лемма 1. *Если выполнено условие C_{m-1}, то справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{s\to+0} s^{-\frac{m-1}{2}} \mathbf{P}\Big\{ \sigma_m \geqslant \frac{m}{2} \sin \frac{2\pi}{m} - s \Big\} = (m-1)! K_m(p) > 0.$$

Доказательство. Пусть β_k – угловая координата точек V_k, $k = 0, \ldots, m-1$. Углы $\beta_k, k = 0, \ldots, m-1$ независимы и одинаково распределены с плотностью p. Рассуждая так же, как в [3], нетрудно показать, что эти углы можно рассматривать в возрастающем порядке, точнее

$$\mathbf{P}\{S^m > z\} = (m-1)! \mathbf{P}\{S^m > z, \beta_0 \leqslant \beta_1 \leqslant \ldots \leqslant \beta_{m-1} \leqslant \beta_0 + 2\pi\}.$$

Далее будем считать, что углы β_k удовлетворяют соотношению

$$\beta_0 \leqslant \beta_1 \leqslant \ldots \leqslant \beta_{m-1} \leqslant \beta_0 + 2\pi.$$

Поскольку максимальной площадью $\frac{m}{2} \sin \frac{2\pi}{m}$ среди выпуклых вписанных многоугольников обладает правильный многоугольник (см., например, [10], зад. 57а), то вершины рассматриваемого многоугольника в условиях леммы должны быть близки к вершинам правильного многоугольника, т. е. приблизительно иметь угловые координаты $\beta_0 + \frac{2\pi k}{m}$, $k = 1, \ldots, m-1$. Введем обозначение

$$\alpha_k = \beta_k - \beta_0 - \frac{2\pi k}{m}, \quad k = 0, \ldots, m, \ \ \alpha_0 = 0, \ \ \alpha_m = 0.$$

Как было показано в доказательстве леммы 2.3 в [3], если $\sigma_m \geqslant \frac{m}{2}\sin\frac{2\pi}{m} - s$, то при $s \to 0$ углы β_k удовлетворяют соотношению

$$\beta_k - \beta_{k-1} = \frac{2\pi}{m} + O(\sqrt{s}),$$

и кроме того,

$$\alpha_k = O(\sqrt{s}), \quad k = 1, \dots, m-1, \ \ \alpha_0 = 0.$$

Это верно вне зависимости от распределения точек на окружности.

Найдем распределение α_k при фиксированном β_0. Для любого множества B из борелевской σ-алгебры интервала $[-\beta_0 - \frac{2\pi k}{m}, 2\pi - \beta_0 - \frac{2\pi k}{m})$, справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{\alpha_k \in B \ |\beta_0\} = \mathbf{P}\Big\{\beta_k \in \Big(\beta_0 + \frac{2\pi k}{m} + B\Big) \mod 2\pi \ |\beta_0\Big\},$$

так что плотность распределения ρ_{α_k} угла α_k имеет вид

$$\rho_{\alpha_k}(r|\beta_0) = p(\beta_0 + \frac{2\pi k}{m} + r), \quad -\beta_0 - \frac{2\pi k}{m} \leqslant r < 2\pi - \beta_0 - \frac{2\pi k}{m}.$$

Далее имеем

$$\sigma_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sin(\beta_k - \beta_{k-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sin\Big(\frac{2\pi}{m} + \alpha_k - \alpha_{k-1}\Big).$$

Используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции синуса в нуле, получаем, действуя точно так же, как в [3], что при некоторых $s_1 \leqslant s_2$, таких что $s_1 \to 0, s_2 \to 0$ при $s \to 0$, справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\Big\{\sum_{k=1}^{m}(\alpha_k - \alpha_{k-1})^2 \leqslant \frac{4s_2}{\sin\frac{2\pi}{m}}\Big\} \\
&\qquad \geqslant \mathbf{P}\Big\{\sigma_m \geqslant \frac{m}{2}\sin\frac{2\pi}{m} - s, \beta_0 \leqslant \beta_1 \leqslant \ldots \leqslant \beta_{m-1} \leqslant \beta_0 + 2\pi\Big\} \\
&\qquad\qquad \geqslant \mathbf{P}\Big\{\sum_{k=1}^{m}(\alpha_k - \alpha_{k-1})^2 \leqslant \frac{4s_1}{\sin\frac{2\pi}{m}}\Big\}.
\end{aligned}$$

Введем обозначение $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\alpha_0 = 0, \alpha_m = 0$ и рассмотрим квадратичную форму $Q(\alpha) = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{m}(\alpha_k - \alpha_{k-1})^2$. Нам надо изучить

вероятность $\mathbf{P}\{Q(\alpha) \leqslant \frac{2s}{\sin\frac{2\pi}{m}}\}$. Ясно, что

$$\mathbf{P}\Big\{Q(\alpha) \leqslant \frac{2s}{\sin\frac{2\pi}{m}}\Big\} = \int\limits_0^{2\pi} p(\beta_0)d\beta_0 \int\limits_{\{x:Q(x)\leqslant\frac{2s}{\sin\frac{2\pi}{m}}\}} \prod_{k=1}^{m-1} \rho_{\alpha_k}(x_k|\beta_0)dx_1\dots dx_{m-1}.$$

Сделаем замену переменных $y = xD^{-1}$, $x = (x_1,\dots,x_{m-1})$, $y = (y_1,\dots,y_{m-1})$, где $Q = D^{-1}JD$ – матрица нашей квадратичной формы, J – нормальная форма матрицы Q, $|\det D| = 1$. Якобиан этой замены равен 1. Явный вид матриц J и D можно найти, например, в книге [2, стр.137]. Положим

$$V = \Big\{(y_1,\dots,y_{m-1}) : \sum_{k=1}^{m-1}\Big(1-\cos\frac{\pi k}{m}\Big)y_k^2 \leqslant \frac{2s}{\sin\frac{2\pi}{m}}\Big\}$$

и будем обозначать объем множества V через $\mathrm{Vol}(V)$. Тогда

$$\mathbf{P}\Big\{Q(\alpha) \leqslant \frac{2s}{\sin\frac{2\pi}{m}}\Big\} = \int\limits_0^{2\pi} p(\beta_0)d\beta_0 \int_V \prod_{k=1}^{m-1} \rho_{\alpha_k}\Big(\sum_{j=1}^{m-1} y_j d_{jk}|\beta_0\Big)dy_1\dots dy_{m-1}.$$

В [3] было вычислено, что

$$\mathrm{Vol}(V) = \frac{1}{\Gamma(\frac{m+1}{2})\sqrt{m}}\Big(2\sqrt{\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{m}}}\Big)^{m-1} s^{\frac{m-1}{2}}.$$

Применим теорему о среднем для интегралов. Тогда получим

$$\mathbf{P}\Big\{Q(\alpha) \leqslant \frac{2s}{\sin\frac{2\pi}{m}}\Big\} = \frac{1}{\Gamma(\frac{m+1}{2})\sqrt{m}}\Big(2\sqrt{\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{m}}}\Big)^{m-1} \int\limits_0^{2\pi} p(\beta_0) \prod_{k=1}^{m-1} \rho_{\alpha_k}(y^*|\beta_0)d\beta_0\ s^{\frac{m-1}{2}},$$

где $y^* = y^*(s) \in V$ и $y^* \xrightarrow[s\to 0]{} (0,\dots,0)$. Отсюда следует, что

$$\frac{(m-1)!}{\Gamma(\frac{m+1}{2})\sqrt{m}}\Big(2\sqrt{\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{m}}}\Big)^{m-1}\int\limits_0^{2\pi}\prod_{k=1}^{m-1}\rho_{\alpha_k}(y^*|\beta_0)p(\beta_0)d\beta_0\ s_1^{\frac{m-1}{2}}$$
$$\leqslant \mathbf{P}\Big\{\sigma_m \geqslant \frac{m}{2}\sin\frac{2\pi}{m} - s\Big\}$$
$$\leqslant \frac{(m-1)!}{\Gamma(\frac{m+1}{2})\sqrt{m}}\Big(2\sqrt{\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{m}}}\Big)^{m-1}\int\limits_0^{2\pi}\prod_{k=1}^{m-1}\rho_{\alpha_k}(y^*|\beta_0)p(\beta_0)d\beta_0\ s_2^{\frac{m-1}{2}}.$$

Так как $s_1, s_2 \xrightarrow[s\to 0]{} s$, а плотности ρ_k и p ограничены, то при условии C_{m-1} справедливо, что

$$\mathbf{P}\Big\{\sigma_m \geqslant \frac{m}{2}\sin\frac{2\pi}{m} - s\Big\}s^{-\frac{m-1}{2}}$$
$$\xrightarrow[s\to 0]{} \frac{(m-1)!}{\Gamma(\frac{m+1}{2})\sqrt{m}}\Big(2\sqrt{\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{m}}}\Big)^{m-1}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\prod_{k=1}^{m-1}\rho_{\alpha_k}(0|\beta_0)\Big)p(\beta_0)d\beta_0$$
$$= \frac{(m-1)!}{\Gamma(\frac{m+1}{2})\sqrt{m}}\Big(2\sqrt{\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{m}}}\Big)^{m-1}\int\limits_0^{2\pi}\prod_{k=0}^{m-1}p\Big(x+\frac{2\pi k}{m}\Big)dx > 0.$$

Лемма доказана. □

Рассмотрим теперь отображение $z_n(t) = \frac{m}{2}\sin\frac{2\pi}{m} - tn^{-\frac{2m}{m-1}}$. Введем обозначение

$$\lambda_{n,z_n(t)} = \binom{n}{m}\mathbf{P}\{A^m > z_n(t)\}.$$

Положим $s = tn^{-\frac{2m}{m-1}}$.

Лемма 2. *Обозначим через $A^{i_1,\dots,i_m}$ выпуклый многоугольник с вершинами в точках $U_{i_1},\dots,U_{i_m}$. Тогда при любом $r = 1,\dots,m-1$ при выполнении условия C_{2m-2} справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} n^{2m-r}\mathbf{P}\{A^{1,\dots,m} > z_n(t), A^{m-r+1,\dots,m-r+m} > z_n(t)\} = 0.$$

Доказательство. Рассуждая подобно [3], мы видим, что из условия $A^{1,\dots,m-1} > z_n(t)$ следует, что $|\alpha_1|,\dots,|\alpha_{m-1}| < C\sqrt{s}$. Аналогично из $A^{m-r+1,\dots,m-r+m} > z_n(t)$ вытекает, что $|\alpha_{m-r+1}|,\dots,|\alpha_{m-r+m-1}| <$

$C\sqrt{s}$. По независимости углов с учетом значения r справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{|\alpha_j| < C\sqrt{s}, j = 1, \dots, m-1, m-r+1, \dots, m-r+m-1\}$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{2m-r-1} \Big(\int\limits_{-C\sqrt{s}}^{C\sqrt{s}} \rho_{\alpha_j}(x_j|\beta_0) dx_j \Big) p(\beta_0) d\beta_0.$$

Снова применяя теорему о среднем, получаем для некоторых $x_j^* = x_j^*(s) \to 0$ при $s \to 0$

$$\int\limits_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{2m-r-1} \Big(\int\limits_{-C\sqrt{s}}^{C\sqrt{s}} \rho_{\alpha_j}(x_j|\beta_0) dx_j \Big) p(\beta_0) d\beta_0$$
$$= (2C\sqrt{s})^{2m-r-1} \int\limits_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{2m-r-1} \rho_{\alpha_j}(x_j^*|\beta_0) p(\beta_0) d\beta_0.$$

Обозначим

$$L_r = (2C)^{2m-r-1} \int\limits_0^{2\pi} \prod_{j=0}^{2m-r-1} p\Big(x + \frac{2\pi j}{m}\Big) dx.$$

Вследствие условия C_{2m-2} эта константа положительна. Поскольку $s = tn^{-\frac{2m}{m-1}}$, то, собирая полученные равенства и переходя к пределу под знаком интеграла, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} n^{2m-r} \mathbf{P}\{A^{1,\dots,m} > z_n(t), A^{m-r+1,\dots,m-r+m} > z_n(t)\}$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty} n^{2m-r} L_r (\sqrt{s})^{2m-r-1} = \lim_{n\to\infty} L_r \sqrt{t} n^{-\frac{m-r}{m-1}} = 0.$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 3. Так как в силу леммы 1 и условия C_m существует положительный предел

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{n,z_n(t)} = \frac{1}{m!} \lim_{n\to\infty} n^m \mathbf{P}\{A_n^m > z_n(t)\} = \frac{K_m(p)}{m} t^{\frac{m-1}{2}} := \lambda_t > 0,$$

то выполняется условие (1) Теоремы 1. Вследствие леммы 2 условие (3) также выполнено. Применяя Теорему 1, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big\{A_n^m \leqslant \frac{m}{2}\sin\frac{2\pi}{m} - tn^{-\frac{2m}{m-1}}\Big\} = \exp\{-\frac{K_m(p)}{m}t^{\frac{m-1}{2}}\}.$$

Теорема доказана. □

Замечание 1. Формула для равномерного распределения углов, полученная в [3], является частным случаем данной.

В самом деле, если $U_1, \dots, U_n$ распределены по окружности равномерно с плотностью $\frac{1}{2\pi}$, константа $K_m(p)$ из (5) принимает вид

$$K_m = \frac{1}{\Gamma(\frac{m+1}{2})\sqrt{m}}\Big(\frac{1}{\pi\sin\frac{2\pi}{m}}\Big)^{\frac{m-1}{2}},$$

и вместо (4) получается формула, выведенная в [3].

§3. Приложение теоремы о максимальной площади случайных вписанных многоугольников

Приведем некоторые результаты, которые можно получить, применяя теорему о предельном распределении максимальной площади вписанных выпуклых m-угольников, построенных по случайным точкам на окружности, к конкретным распределениям на ней.

Рассмотрим эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Пусть E – его длина. Запараметризуем эллипс углом φ, отсчитываемым от положительного направления оси Ox и лежащим в интервале $[0, 2\pi)$: $(x, y) = (a\cos\varphi, b\sin\varphi)$. Хорошо известно, что распределение угла φ, обеспечивающее равномерное на контуре эллипса распределение точек, задается формулой

$$\mathbf{P}\{\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2\} = \frac{1}{E}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{a^2\sin^2 z + b^2\cos^2 z}\,dz.$$

Оно имеет плотность

$$\pi_{a,b}(x) = \frac{1}{E}\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}.$$

Эта плотность непрерывна и положительна по x и потому удовлетворяет условию C_l для любого натурального l. Пусть $U_1, \dots, U_n$ – независимые точки, равномерно распределенные по контуру эллипса, и пусть

снова $\mathrm{area}(U_{i_1},\dots,U_{i_m})$ обозначает площадь выпуклого многоугольника с вершинами в точках $U_{i_1},\dots,U_{i_m}$. Ясно, что $\mathrm{area}(\cdot)$ является симметрической борелевской функцией. Пусть также

$$B_n^m = \max_{1\leqslant i_1<\dots<i_m\leqslant n} \mathrm{area}(U_{i_1},\dots,U_{i_m})$$

– соответствующая U-max статистика.

Рассмотрим гомотетию $\gamma:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\gamma((x,y))=(ax,by)$. Отображение γ переводит единичную окружность $x^2+y^2=1$ в эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Пусть $U_1,\dots,U_m$ – точки на окружности. Выпуклый многоугольник с вершинами в точках $U_1,\dots,U_m$ вписан в окружность, и его площадь равна σ_m. Выпуклый многоугольник с вершинами в точках $\gamma(U_1),\dots,\gamma(U_m)$ вписан в эллипс, и его площадь равна $\Sigma_m=ab\sigma_m$. Соответствующие U-max статистики связаны соотношением $B_n^m=abA_n^m$.

Из этого соотношения вытекает следующий результат.

Теорема 4. *Для площади случайного многоугольника, вершины которого равномерно распределены по контуру эллипса с полуосями a и b, верно соотношение:*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\Big\{n^{\frac{2m}{m-1}}\Big(\frac{m}{2}\sin\frac{2\pi}{m}-\frac{B_n^m}{ab}\Big)\leqslant t\Big\}=1-\exp\Big\{-\frac{K_m(\pi_a,b)}{m}\,t^{\frac{m-1}{2}}\Big\}.$$

Другая задача связана с распределением фон Мизеса. Возможно, это наиболее важное распределение на окружности, не считая равномерного [7]. Плотность распределения фон Мизеса имеет вид [7]:

$$g_b(x)=\frac{\exp\{b\cos(x-\mu)\}}{2\pi I_0(b)}, \tag{6}$$

где $\mu\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}_+$, $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $x\in[0,2\pi)$. Эта плотность удовлетворяет любому условию C_l.

Выясним, как в этом частном случае выглядит теорема 3. Имеем

$$\prod_{k=0}^{m-1} g_b\Big(\beta+\frac{2\pi k}{m}\Big)=\frac{1}{(2\pi I_0(b))^m}\exp\Big(b\sum_{k=1}^{m}\cos\big(\beta+\frac{2\pi k}{m}-\mu\big)\Big).$$

Преобразуем показатель экспоненты. Так как

$$\sum_{k=1}^{m}\sin\frac{2\pi k}{m}=0,\quad \sum_{k=1}^{m}\cos\frac{2\pi k}{m}=0,$$

то получаем, что

$$\sum_{k=1}^{m}\cos\Big(\beta+\frac{2\pi k}{m}-\mu\Big)=0,\quad \exp\Big(b\sum_{k=1}^{m}\cos\Big(\beta+\frac{2\pi k}{m}-\mu\Big)\Big)=1.$$

Поэтому $\prod\limits_{k=0}^{m-1} g_b(\beta+\frac{2\pi k}{m})=(2\pi I_0(b))^{-m}$, и из теоремы 3 вытекает следующий результат.

Теорема 5. *Для площади выпуклого многоугольника, вершины которого расположены в точках, случайно распределенных по окружности с плотностью фон Мизеса* (6)*, верно предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} P\{n^{\frac{2m}{m-1}}\Big(\frac{m}{2}\sin\frac{2\pi}{m}-A_n^m\Big)\leqslant t\}$$
$$=1-\exp\Big\{-\frac{1}{\Gamma(\frac{m+1}{2})m^{3/2}(I_0(b))^m}\Big(\frac{1}{\pi\sin\frac{2\pi}{m}}\Big)^{\frac{m-1}{2}}t^{\frac{m-1}{2}}\Big\}.$$

§4. Предельное распределение минимальной площади случайных описанных многоугольников

Рассмотрим снова единичную окружность с центром в начале координат и на ней n независимых одинаково распределенных точек $U_1,\dots,U_n$ с непрерывной плотностью $p(x)$. Пусть $\mathrm{Area}(U_{i_1},\dots,U_{i_m})$ обозначает площадь выпуклого многоугольника, касающегося единичной окружности в точках $U_{i_1},\dots,U_{i_m}$. Ясно, что $\mathrm{Area}(\cdot)$ является симметрической борелевской функцией. Пусть

$$\mathcal{A}_n^m=\min_{1\leqslant i_1<\dots<i_m\leqslant n}\mathrm{Area}(U_{i_1},\dots,U_{i_m})$$

– соответствующая U-min статистика. Сформулируем предельную теорему для $\mathcal{A}_n^m$.

Теорема 6. *Пусть выполнено условие C_{2m-2}. Тогда справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\Big\{n^{\frac{2m}{m-1}}\Big(\mathcal{A}_n^m-m\tan\frac{\pi}{m}\Big)\leqslant t\Big\}=1-\exp\Big\{-\frac{\overline{K}_m(p)}{m}t^{\frac{m-1}{2}}\Big\},$$

где

$$\overline{K}_m(p)=\frac{1}{\Gamma(\frac{m+1}{2})\sqrt{m}}\Big(2\sqrt{\frac{\pi\cot\frac{\pi}{m}}{1+\tan^2\frac{\pi}{m}}}\Big)^{m-1}\int\limits_0^{2\pi}\prod_{k=0}^{m-1}p\Big(x+\frac{2\pi k}{m}\Big)dx>0.$$

Доказательство этой теоремы лишь в деталях отличается от доказательства Теоремы 3, и мы опустим его.

Замечание 2. *Формула для равномерного распределения, полученная в* [3]*, является частным случаем данной.*

В самом деле, если $U_1, \dots, U_n$ распределены по окружности равномерно, с плотностью $\frac{1}{2\pi}$, константа $\overline{K}_m(p)$ упрощается, и получается формула, найденная в [3].

§5. Приложения теоремы о минимальной площади случайных описанных многоугольников

Рассмотрим результаты, которые можно получить, применяя теорему 6 к конкретным распределениям на окружности.

Сначала обратимся к задаче о нахождении предельного распределения минимальной площади описанных вокруг эллипса многоугольников. Воспользуемся обозначениями, аналогичными задаче о вписанных в окружность многоугольниках. Пусть $U_1, \dots, U_m$ – точки на окружности, и выпуклый многоугольник, касающийся окружности в данных точках, имеет площадь, равную $\mathcal{A}_n^m$. Гомотетия $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\gamma((x,y)) = (ax, by)$, переводит его в выпуклый многоугольник, касающийся эллипса в точках $\gamma(U_1), \dots, \gamma(U_m)$ и имеющий площадь, равную $\mathcal{B}_n^m = ab\mathcal{A}_n^m$. Соответствующие U-min статистики связаны соотношением $\mathcal{B}_n^m = ab\mathcal{A}_n^m$. Применение теоремы 6 дает следующий результат.

Теорема 7. *Для площади описанного вокруг эллипса выпуклого случайного многоугольника, касающегося эллипса в точках, равномерно распределенных по нему, верно соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} P\Big\{ n^{\frac{2m}{m-1}} \Big(\frac{\mathcal{B}_n^m}{ab} - m \tan\frac{\pi}{m} \Big) \leqslant t \Big\} = 1 - \exp\Big\{ -\frac{\overline{K}_m(\pi_a, b)}{m}\, t^{\frac{m-1}{2}} \Big\}.$$

Другая задача связана с распределением фон Мизеса. Такие же преобразования произведения плотностей распределения фон Мизеса, как и в случае со вписанными многоугольниками, позволяют получить следующую формулу.

Теорема 8. *Для площади описанного вокруг единичной окружности случайного выпуклого многоугольника, касающегося окружности в*

точках, распределенных по ней с плотностью фон Мизеса, верно предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big\{ n^{\frac{2m}{m-1}} \Big(\mathcal{A}_n^m - m\tan\frac{\pi}{m} \Big) \leqslant t \Big\}$$
$$= 1 - \exp\Big\{ -\frac{1}{\Gamma(\frac{m+1}{2}) m^{3/2} (I_0(b))^m} \Big(\frac{\cot\frac{\pi}{m}}{\pi(1+\tan^2\frac{\pi}{m})} \Big)^{\frac{m-1}{2}} t^{\frac{m-1}{2}} \Big\}.$$

§6. Предельное распределение периметров случайных вписанных и описанных многоугольников

Для периметров вписанных и описанных m-угольников, построенных по n случайным точкам на окружности, можно получить предельные теоремы, похожие на аналогичные теоремы для площадей.

Теорема 9. *Пусть $U_1, \dots, U_n$ – независимые одинаково распределенные по единичной окружности с непрерывной плотностью $p(x)$, удовлетворяющей условию C_{2m-2}. Обозначим через $\mathrm{peri}(U_{i_1}, \dots, U_{i_m})$ периметр выпуклого многоугольника с вершинами в точках $U_{i_1}, \dots, U_{i_m}$. Пусть $P_n^m = \max\limits_{1\leqslant i_1<\dots<i_m\leqslant n} \mathrm{peri}(U_{i_1}, \dots, U_{i_m})$ - соответствующая U-max статистика. Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big\{ n^{\frac{2m}{m-1}} \Big(2m\sin\frac{\pi}{m} - P_n^m \Big) \leqslant t \Big\} = 1 - \exp\Big\{ -\frac{\widehat{K}_m(p)}{m} t^{\frac{m-1}{2}} \Big\},$$

где

$$\widehat{K}_m(p) = \frac{1}{\Gamma(\frac{m+1}{2})\sqrt{m}} \Big(2\sqrt{\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{m}}} \Big)^{m-1} \int\limits_0^{2\pi} \prod_{k=0}^{m-1} p\Big(x + \frac{2\pi k}{m} \Big) dx > 0.$$

Теорема 10. *Пусть $U_1, \dots, U_n$ – независимые одинаково распределенные на единичной окружности точки с непрерывной плотностью $p(x)$, удовлетворяющей условию C_{2m-2}. Периметр выпуклого многоугольника, касающегося единичной окружности в точках $U_{i_1}, \dots, U_{i_m}$, обозначим через $\mathrm{Peri}(U_{i_1}, \dots, U_{i_m})$. Пусть*

$$\mathcal{P}_n^m = \min_{1\leqslant i_1<\dots<i_m\leqslant n} \mathrm{Peri}(U_{i_1}, \dots, U_{i_m})$$

соответствующая U-min статистика. Справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big\{ n^{\frac{2m}{m-1}} \Big(\mathcal{P}_n^m - 2m\tan\frac{\pi}{m} \Big) \leqslant t \Big\} = 1 - \exp\Big\{ -\frac{K_m^*(p)}{m} t^{\frac{m-1}{2}} \Big\},$$

где

$$K_m^*(p) = \frac{1}{\Gamma(\frac{m+1}{2})\sqrt{m}}\left(\sqrt{\frac{2\pi\cot\frac{\pi}{m}}{1+\tan^2\frac{\pi}{m}}}\right)^{m-1}\int\limits_0^{2\pi}\prod_{k=0}^{m-1} p\Big(x+\frac{2\pi k}{m}\Big)dx > 0.$$

Доказательства этих утверждений вполне аналогичны доказательствам, приведенным выше, и потому опущены.

Список литературы

1. A. D. Barbour, L. Holst, S. Janson, *Poisson Approximation.* Oxford University Press 1992.
2. R. T. Gregory, D. K. Karney, *A Collection of Matrices for Testing Computational Algorithms.* Publ. Comp., Huntington, New York 1978.
3. E. V. Koroleva, Ya. Yu. Nikitin, *U-max statistics and limit theorems for perimeters and areas of random polygons.* — J. Multiv. Anal. **127**, No. 5 (2014), 98–111.
4. W. Lao, *Some Weak Limit Laws for the Diameter of Random Point Sets in Bounded Regions.* Ph.D. Thesis, Karlsruhe 2010.
5. W. Lao, M. Mayer, *U-max-statistics.* — J. Multiv. Anal., **99** (2008), 2039–2052.
6. B. Makarov, A. Podkorytov, *Real Analysis: Measures, Integrals and Applications.* Springer Science & Business Media 2013.
7. K. V. Mardia, P. E. Jupp, *Directional Statistics.* Wiley 2009.
8. M. Mayer, *Random Diameters and Other U-Max-Statistics.* Ph.D. Thesis, Bern University 2008.
9. F. B. Silverman, T. Brown, *Short distances, flat triangles, and Poisson limits.* — J. Appl. Probab., **15** (1978), 815–825.
10. I. M. Yaglom, V. G. Boltyanskii, *Convex Figures.* Holt, Rinehart and Winston 1961.

Nikitin Ya. Yu., Polevaya T. A. Limit theorems for areas and perimeters of random inscribed and circumscribed polygons.

We find the limiting distributions for the maximal area of random convex inscribed polygons and for minimal area of random convex circumscribed polygons whose vertices are distributed on the circumference with almost arbitrary continuous density. These distributions belong to the Weibull family. From this we deduce new limit theorems in the case when the vertices of polygons have the uniform distribution on the ellipse. Some similar theorems are formulated also for perimeters of inscribed and circumscribed polygons.

С.-Петербургский государственный университет
E-mail: y.nikitin@spbu.ru

Поступило 10 ноября 2019 г.

Университет ИТМО
E-mail: tanusha2406@gmail.com