Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 486, 2019 г.

Т. Мосеева

СЛУЧАЙНЫЕ СЕЧЕНИЯ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

§1. Введение и главные результаты

Пусть D – выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$ с объемом $\|D\|$ и площадью поверхности $|D|$. Пусть точки P_1 и P_2 выбираются равномерно и независимо в D. Будем обозначать $F_D^{(\rho)}$ функцию распределения расстояния $\rho\,(P1, P2)$ между P_1 и P_2:

$$F_D^{(\rho)}(x) = \frac{1}{\|D\|^2} \int\limits_{A_D^x} dP_1 dP_2,$$

где $A_D^x = \{P_1, P_2 \mid \rho\,(P_1, P_2) < x\}$ – множество пар точек (P_1, P_2), таких что расстояние между ними меньше x, а dP_i $(i = 1, 2)$ – n-мерная мера Лебега.

Пусть κ_n обозначает объем n-мерного единичного шара, $\omega_n = n\kappa_n$ – площадь поверхности $(n-1)$-мерной единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, а $A_{n,k}$ – множество всех k-мерных аффинных подпространств E в $\mathbb{R}^n$ с заданной на нем инвариантной относительно движений мерой Хаара $\mu_{n,k}$, нормированной таким образом, что мера E, пересекающих n-мерный единичный шар $\mathbb{B}^n$, равна κ_{n-k} (см., например, [4, Theorem 13.2.12]):

$$\mu_{n,k}(\{E \in A_{n,k} \mid E \cap \mathbb{B}^n \neq \varnothing\}) = \kappa_{n-k}.$$

Важным для нас частным случем является пространство прямых $A_{n,1}$, которые, во избежание путаницы, мы будем обозначать символом g. Для $g \in A_{n,1}$ обозначим $F_D(y)$ функцию распределения длины хорды $\chi(g) = g \cap D$:

$$F_D(y) = \frac{n\kappa_n}{\kappa_{n-1}} \cdot \frac{1}{|D|} \iint\limits_{B_D^y} \mu_{n,1}(dg),$$

где $B_D^y = \{g \in A_{n,1} \mid g \cap D \neq \varnothing$ и $|\chi(g)| < y\}$ и $|\chi(g)|$ обозначает длину хорды $\chi(g)$.

Ключевые слова: гауссовский случайный определитель, матрица Уишарта, гауссовский случайный параллелотоп, смешанный объем эллипсоидов, эллипсоид рассеивания, нули гауссовских случайных полей, теорема Бернштейна, формула Каца–Райса.

В [2] была найдена следующая взаимосвязь между моментами распределений $F_D^{(\rho)}$ и F_D:

$$J_k = \frac{n\kappa_n}{(n+k)(n+k+1)} I_{k+n+1}, \tag{1}$$

где

$$I_k = \int\limits_{g\cap D\neq\varnothing} |\chi(g)|^k \mu_{n,1}(dg) \quad \text{и} \quad J_k = \int\limits_{D^2} \rho^k(P_1,P_2)dP_1dP_2.$$

В данной работе мы получим усиление результата Кингмана: предъявим явную формулу, выражающую $F_D^{(\rho)}$ через F_D, а в качестве следствия выведем из нее (1).

Теорема 1. *Пусть d обозначает диаметр D. Тогда при $x \in [0,d]$ выполнено*

$$F_D^{(\rho)}(x) = \frac{1}{\|D\|}\left(\frac{\omega_n}{n}\cdot x^n - \frac{|D|}{\|D\|}\frac{\kappa_{n-1}}{n+1}\cdot x^{n+1} \right.$$
$$\left. + \frac{|D|}{\|D\|}\frac{\kappa_{n-1}}{n}\int\limits_0^x (x^n - t^n)\, F_D(t)dt\right). \tag{2}$$

Дифференцируя по x, мы незамедлительно получаем формулу для плотности $f_D^{(\rho)}$ функции распределения расстояния $\rho\,(P_1,P_2)$.

Следствие 1. *Выполнено следующее соотношение:*

$$f_D^{(\rho)}(x) = \frac{1}{\|D\|}\left(\omega_n x^{n-1} - \frac{|D|}{\|D\|}\kappa_{n-1}x^{n-1}\int\limits_0^x (1 - F_D(t))\,dt\right). \tag{3}$$

Формулы (2) и (3) в размерности 2 были получены Агаронян и Оганяном в [1].

§2. Формула Бляшке–Петканчина

Главным ингредиентом доказательства теоремы 1 является аффинная формула Бляшке–Петканчина, с которой более подробно читатель может ознакомиться в [4] (см. теорему 7.2.7). Приведем ее формулировку. Пусть $k \in \{1,\dots,n\}$ и $f : (\mathbb{R}^n)^{k+1} \to \mathbb{R}$ – неотрицательная измеримая функция. Тогда

$$\int\limits_{(\mathbb{R}^n)^{k+1}} f(P_1,\dots,P_{k+1})dP_1\dots dP_{k+1}$$

$$= (k!)^{n-k} b_{n,k} \int\limits_{A_{n,k}} \int\limits_{E^{k+1}} f(P_1,\dots,P_{k+1}) \|\mathrm{conv}(P_1,\dots,P_{k+1})\|^{n-k} \times \lambda_E(dP_1)\dots\lambda_E(dP_{k+1})\mu_{n,k}(dE),$$

где $b_{n,k} = \frac{\omega_{n-k+1}\cdots\omega_n}{\omega_1\cdots\omega_k}$ и λ_E обозначает меру Лебега в подпространстве E.

Пусть D – выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. Применив формулу Бляшке–Петканчина в случае $k=1$ и $f(P_1,P_2) = \mathbb{1}_D(P_1)\mathbb{1}_D(P_2)$, получим следующее:

$$\int\limits_{D^2} dP_1 dP_2 = b_{n,1} \int\limits_{g\cap D\neq\varnothing} \int\limits_0^{|\chi(g)|} \int\limits_0^{|\chi(g)|} |x_0 - x_1|^{n-1} dx_0 dx_1 \mu_{n,1}(dg).$$

Воспользовавшись равенством

$$\int\limits_0^s \int\limits_0^s |x_0 - x_1|^{n-1} dx_0 dx_1 = \frac{2}{n(n+1)} s^{n+1},$$

получаем

$$\|D\|^2 = \int\limits_{D^2} dx_0 dx_1 = \frac{\omega_n}{2} \frac{2}{n(n+1)} \int\limits_{g\cap D\neq,\varnothing} |\chi(g)|^{n+1} \mu_{n,1}(dg).$$

Таким образом,

$$\int\limits_{g\cap D\neq\varnothing} |\chi(g)|^{n+1} \mu_{n,1}(dg) = \frac{n(n+1)}{\omega_n} \|D\|^2, \tag{4}$$

см., например, [3, (14.24)].

§3. Доказательства

3.1. Доказательство теоремы 1. Легко понять, что $F_D^{(\rho)}(x) = 0$ при $x < 0$ и $F_D^{(\rho)}(x) = 1$ при $x \geqslant d$. Поэтому дальше мы будем работать с $x \in [0, d]$.

Вместо требуемого нам интеграла $\int\limits_{\rho(P_1,P_2)<x} dP_1 dP_2$ мы будем работать с интегралом $\int\limits_{\rho(P_1,P_2)\geqslant x} dP_1 dP_2$, то есть рассмотрим

$$1 - F_D^{(\rho)}(x) = \frac{1}{\|D\|^2} \int\limits_{\rho(P_1,P_2)\geqslant x} dP_1 dP_2. \tag{5}$$

Воспользуемся формулой Бляшке–Петканчина и перейдем от переменных (P_1, P_2) к новым переменным (g, t_1, t_2), где g – элемент $A_{n,1}$ – прямая, проходящая через P_1 и P_2, а t_1 и t_2 – координаты точек P_1 и P_2 на этой прямой. Таким образом получаем:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\rho(P_1,P_2)\geqslant x} dP_1 dP_2 &= b_{n,1} \int\limits_{|\chi(g)|\geqslant x} \mu_{n,1}(dg) \int\limits_{|t_1-t_2|\geqslant x} |t_1 - t_2|^{n-1} dt_1 dt_2 \\ &= \frac{\omega_n}{2} \int\limits_{|\chi(g)|\geqslant x} \mu_{n,1}(dg) \int\limits_{|t_1-t_2|\geqslant x} |t_1 - t_2|^{n-1} dt_1 dt_2.\end{aligned}$$

В силу симметрии, можно рассматривать только случай $t_1 \geqslant t_2$:

$$\begin{aligned}&\frac{\omega_n}{2} \int\limits_{|\chi(g)|\geqslant x} \mu_{n,1}(dg) \int\limits_{|t_1-t_2|\geqslant x} |t_1 - t_2|^{n-1} dt_1 dt_2 \\ &= \omega_n \int\limits_{|\chi(g)|\geqslant x} \mu_{n,1}(dg) \int\limits_{(t_1-t_2)\geqslant x} (t_1 - t_2)^{n-1} dt_1 dt_2 \\ &= \omega_n \int\limits_{|\chi(g)|\geqslant x} \mu_{n,1}(dg) \int\limits_{x}^{|\chi(g)|} \frac{{t_1}^n - x^n}{n} dt_1 \\ &= \omega_n \int\limits_{|\chi(g)|\geqslant x} \left(\frac{|\chi(g)|^{n+1} - x^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{x^n}{n} \left(|\chi(g)| - x\right) \right) \mu_{n,1}(dg) \\ &= \frac{\omega_n}{n(n+1)} \int\limits_{|\chi(g)|\geqslant x} |\chi(g)|^{n+1} \mu_{n,1}(dg) \; - \; \frac{\omega_n}{n} x^n \int\limits_{|\chi(g)|\geqslant x} |\chi(g)| \, \mu_{n,1}(dg) \\ &\quad + x^{n+1} \left(\frac{\omega_n}{n} - \frac{\omega_n}{n(n+1)} \right) \int\limits_{|\chi(g)|\geqslant x} \mu_{n,1}(dg)\end{aligned}$$

$$= \frac{\omega_n}{n(n+1)}\Big(I_1 - (n+1)x^n I_2 + n x^{n+1} I_3\Big). \tag{6}$$

По определению,

$$I_3 = \frac{\kappa_{n-1}|D|}{n\kappa_n}\left(1 - F_D(x)\right).$$

Чтобы найти значения I_1 и I_2, воспользуемся следующей леммой (см. [1]):

Лемма 1. *Пусть* $R : [0, d] \to \mathbb{R}$ *– непрерывная функция. Тогда*

$$\int\limits_{|\chi(g)|<x} R\left(|\chi(g)|\right)\mu_{n,1}(dg) = \frac{\kappa_{n-1}|D|}{n\kappa_n}\int\limits_0^x R(t)dF_D(t). \tag{7}$$

Воспользовавшись данной леммой вместе с (4), получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_{|\chi(g)|\geqslant x} |\chi(g)|^{n+1}\mu_{n,1}(dg) \\ &= \int\limits_{g\cap D\neq\varnothing} |\chi(g)|^{n+1}\mu_{n,1}(dg) - \int\limits_{|\chi(g)|<x} |\chi(g)|^{n+1}\mu_{n,1}(dg) \\ &= \frac{n(n+1)}{\omega_n}\|D\|^2 - \frac{\kappa_{n-1}|D|}{n\kappa_n}\int\limits_0^x t^{n+1}dF_D(t) \\ &= \frac{n(n+1)}{\omega_n}\|D\|^2 - \frac{\kappa_{n-1}|D|}{n\kappa_n}\left(x^{n+1}F_D(x) - (n+1)\int\limits_0^x t^n F_d(t)dt\right) \end{aligned} \tag{8}$$

и

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_{|\chi(g)|\geqslant x} |\chi(g)|\mu_{n,1}(dg) \\ &= \int\limits_{g\cap D\neq\varnothing} |\chi(g)|\,\mu_{n,1}(dg) - \int\limits_{|\chi(g)<x} |\chi(g)|\,\mu_{n,1}(dg) \qquad (9) \\ &= \|D\| - \frac{\kappa_{n-1}|D|}{n\kappa_n}\int\limits_0^x t dF_D(t) = \|D\| - \frac{\kappa_{n-1}|D|}{n\kappa_n}\left(xF_D(x) - \int\limits_0^x F_D(t)dt\right). \end{aligned}$$

Подставляя (8) и (9) в (6), получаем:

$$\int\limits_{\rho(P_1,P_2)\geqslant x} dP_1 dP_2 = \frac{\omega_n}{n(n+1)}\Big(\frac{n(n+1)}{\omega_n}\|D\|^2$$

$$-\frac{\kappa_{n-1}|D|}{n\kappa_n}\left(x^{n+1}F_D(x)-(n+1)\int\limits_0^x t^n F_d(t)dt\right)$$

$$-(n+1)x^n\left(\|D\|-\frac{\kappa_{n-1}|D|}{n\kappa_n}\left(xF_D(x)-\int\limits_0^x F_D(t)dt\right)\right)$$

$$+nx^{n+1}\frac{\kappa_{n-1}|D|}{n\kappa_n}\left(1-F_D(x)\right)\Big)$$

$$=\frac{\omega_n}{n(n+1)}\left(\frac{n(n+1)}{\omega_n}\|D\|^2+\frac{\kappa_{n-1}|D|}{n\kappa_n}(n+1)\int\limits_0^x\left(t^n-x^n\right)F_D(t)dt\right.$$

$$\left.-(n+1)x^n\|D\|+nx^{n+1}\frac{\kappa_{n-1}|D|}{n\kappa_n}\right).$$

Таким образом,

$$F_D^{(\rho)}(x)=1-\frac{1}{\|D\|^2}\int\limits_{\rho(P_1,P_2)\geqslant x} dP_1dP_2$$

$$=\frac{|D|}{\|D\|^2}\frac{\kappa_{n-1}}{n}\int\limits_0^x\left(x^n-t^n\right)F_D(t)dt+\frac{1}{\|D\|}\frac{\omega_n}{n}x^n-\frac{|D|}{\|D\|^2}\frac{\kappa_{n-1}}{n+1}x^{n+1}$$

$$=\frac{1}{\|D\|}\left(\frac{\omega_n}{n}\cdot x^n-\frac{|D|}{\|D\|}\frac{\kappa_{n-1}}{n+1}\cdot x^{n+1}+\frac{|D|}{\|D\|}\frac{\kappa_{n-1}}{n}\int\limits_0^x\left(x^n-t^n\right)F_D(t)dt\right).$$

3.2. Моменты расстояния между точками в области. Формула Кингмана. Благодаря формуле (3), мы можем посчитать k-й момент расстояния между двумя точками, равномерно и независимо выбранными внутри выпуклого тела. Для этого нужно вычислить следующий интеграл:

$$M_K^\rho=\int\limits_0^d x^k f_D^\rho(x)dx.$$

Подставляя в последнее выражение (3), получаем следующее:

$$\begin{aligned}
M_K^\rho &= \int_0^d x^k f_D^\rho(x)dx \\
&= \frac{\omega_n}{\|D\|}\int_0^d x^{k+n-1}dx - \frac{\kappa_{n-1}|D|}{\|D\|^2}\int_0^d \left(x^{k+n-1}\int_0^x (1-F_D(t))dt\right)dx \\
&= \frac{\omega_n}{\|D\|}\frac{d^{k+n}}{k+n} - \frac{\kappa_{n-1}|D|}{\|D\|^2(k+n)}\int_0^d\int_0^x (1-F_D(t))\,dt dx^{k+n} \qquad (10)\\
&= \frac{\omega_n}{\|D\|}\frac{d^{k+n}}{k+n} - \frac{\kappa_{n-1}|D|}{\|D\|^2(k+n)} \\
&\quad\times\left[d^{k+n}\int_0^d (1-F_D(t))\,dt - \int_0^d x^{k+n}(1-F_D(x))\,dx\right].
\end{aligned}$$

Чтобы вычислить интеграл $\int_0^d (1-F_D(t))\,dt$, воспользуемся (7), подставив $x=d$ и $R(t)=t$. Получаем:

$$\begin{aligned}
\|D\| &= \int_{\chi(x)<d} |\chi(g)|\mu_{n,1}(dg) \\
&= \frac{\kappa_{n-1}|D|}{n\kappa_n}\int_0^d t dF_D(t) = -\frac{\kappa_{n-1}|D|}{n\kappa_n}\int_0^d t\, d(1-F_D(t)) \\
&= -\frac{\kappa_{n-1}|D|}{n\kappa_n}\left(d(1-F_D(d)) - \int_0^d (1-F_D(t))\,dt\right) \\
&= \frac{\kappa_{n-1}|D|}{n\kappa_n}\int_0^d (1-F_D(t))\,dt,
\end{aligned}$$

где последнее равенство выполнено в силу того, что $F_D(d)=1$. Таким образом,

$$M_K^\rho = \frac{\omega_n}{\|D\|}\frac{d^{k+n}}{k+n} - \frac{\kappa_{n-1}|D|}{\|D\|^2(k+n)}\left[d^{k+n}\frac{n\kappa_n\|D\|}{\kappa_{n-1}|D|} - \int\limits_0^d x^{k+n}\left(1-F_D(x)\right)dx\right]$$
$$= \frac{\kappa_{n-1}|D|}{(k+n)\|D\|^2}\int\limits_0^d x^{k+n}\left(1-F_D(x)\right)dx. \tag{11}$$

Заметим, что равентство (11) позволяет понять, как соотносятся моменты расстояния между точками и длины случайной хорды.

Действительно, если M_k – k-й момент длины хорды, то

$$M_k = \int\limits_0^d x^k dF_D(x) = d^k \underbrace{F_D(d)}_{=1} - k\int\limits_0^d x^{k-1}F_D(x)dx$$
$$= k\left(\int\limits_0^d x^{k-1}dx - \int\limits_0^d x^{k-1}F_D(x)dx\right) = k\int\limits_0^d x^{k-1}\left(1-F_D(x)\right)dx. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11), получаем

$$M_k^\rho = \frac{\kappa_{n-1}|D|}{(k+n)(k+n+1)\|D\|^2}M_{k+n+1}. \tag{13}$$

Напомним, что I_k и J_k определены следующим образом:

$$I_k = \int\limits_{g\cap D\neq\varnothing} |\chi(g)|^k \mu_{n,1}(dg) \quad \text{и} \quad J_k = \int\limits_{P_1,P_2\in D} \rho^k(P_1,P_2)dP_1dP_2.$$

Подставляя $R(t) = t^k$ и $x = d$ в (7), получаем

$$I_k = \frac{\kappa_{n-1}|D|}{n\kappa_n}\int\limits_0^d x^k dF_D(x) = \frac{\kappa_{n-1}|D|}{n\kappa_n}M_k. \tag{14}$$

Для вычисления интеграла J_k докажем следующую лемму, аналогичную лемме 1:

Лемма 2. *Пусть* $H(x):[0,d]\to\mathbb{R}$ *– непрерывная на* $[0,d]$ *функция. Тогда для любого* $x\in[0,d]$ *выполнено*

$$\int\limits_{\rho(P_1,P_2)<x} H(\rho(P_1,P_2))dP_1dP_2=\|D\|^2\int\limits_0^x H(t)dF_D^\rho(x).$$

Доказательство. Рассмотрим $G(x)=\int\limits_{\rho(P_1,P_2)<x} H(\rho(P_1,P_2))dP_1dP_2$. Тогда

$$\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}=\int\limits_{x\leqslant\rho(P_1,P_2)<x+\Delta x}\frac{H(\rho(P_1,P_2))dP_1dP_2}{\Delta x}$$
$$=\|D\|^2H(\theta)\frac{F_D^\rho(x+\Delta x)-F_D^\rho(x)}{\Delta x}$$

для некоторого $\theta\in[x,x+\Delta x]$. Устремим Δx к 0. Тогда, так как H непрерывна, а F_D^ρ – почти всюду дифференцируема, получаем

$$dG(x)=\|D\|^2H(x)dF_D^\rho(x).$$

Тогда, так как $G(0)=0$, получаем $G(x)=\|D\|^2\int\limits_0^x H(t)dF_D^\rho(x)$, что и требовалось. □

Таким образом,

$$J_k=\int\limits_{\rho(P_1,P_2)<d}\rho^k(P_1,P_2)dP_1dP_2=\|D\|^2\int\limits_0^d x^kdF_D^\rho(x)=\|D\|^2M_\rho^k. \quad (15)$$

Подставляя (6) и (15) в (13), получаем

$$J_k=\frac{n\kappa_n}{(n+k)(n+k+1)}I_{k+n+1}. \quad (16)$$

Список литературы

1. N. Aharonyan, V. Ohanyan, *Moments of the distance between two random points.* — Model. Artif. Intell **10** No. 2 (2016), 64–70.
2. J. Kingman, *Random secants of a convex body.* — J. Appl. Probab., **6** No. 3 (1969), 660–672.
3. L. Santaló, *Integral Geometry and Geometric Probability.* Addison-Wesley Publishing Company (1976).
4. R. Schneider, W. Weil, *Stochastic and Integral Geometry.* Springer–Verlag (2008).

Moseeva T. Random sections of convex bodies.

Consider a convex body D in $\mathbb{R}^n$. We obtain an explicit formula expressing the distribution function of the distance between two random points uniformly and independently chosen in D in terms of the distribution function of the length of a random chord of D. As a corollary, we derive Kingman's formula which connects the moments of these distributions.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
199034 С.-Петербург, Россия
E-mail: polezina@yandex.ru

Поступило 1 ноября 2019 г.