Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 486, 2019 г.

П. Н. Иевлев

БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ С ОТРАЖЕНИЕМ В d-МЕРНОМ ШАРЕ

§1. Введение

Мы построим броуновское движение с отражением в d-мерном шаре способом, развитым в работе [30] для одномерной области. Отметим, что нашей целью является именно метод, так как теория диффузий с отражениями в областях хорошо развита для произвольных областей с границей класса C^3, а кое-что известно даже для липшицевых областей (для C^2-области [20], для C^1-области [13], липшицевы области [2]; кроме того, имеется классический результат для произвольных областей [11]). Ценность данного метода заключается в том, что он позволяет строить отражающиеся версии не только диффузий, но и процессов Леви (см. [30]), а кроме того придать смысл отражению комплекснозначного процесса, использованного в работе автора [32] для решения начально-краевой задачи Неймана для уравнения Шрёдингера. Для броуновского движения конструкция данного метода совпадает со стандартной конструкцией отражения в смысле Скорохода [36]. В следующих работах мы приложим этот метод для построения отражающихся процессов Леви и комплекснозначного броуновского движения.

Математическая мотивация для изучения α-устойчивых процессов в ограниченных областях, как отмечают авторы [4], связана с тем, что их предельные ($\alpha = 2$) аналоги – броуновское движение с отражением/поглощением – являются важными моделями теории вероятностей.

С точки зрения приложений, отражающийся процесс является удобным инструментом для изучения времени ожидания в очередях с конечной пропускной способностью ([3, 7–9]), дамб и моделей для жидкостей ([1, 14, 18]), и некоторых других моделей.

Ключевые слова: предельные теоремы, уравнение Шрёдингера, начально-краевые задачи, эволюционные уравнения, гиперсферические функции Бесселя.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (грант 17-11-01136).

Под отражением процесса традиционно понимается построение процесса, соответствующего тому же генератору, но на области определения с граничным условием Неймана. По-видимому первой работой по отражению α-устойчивых процессов является [4], авторы которой определяют *censored stable process* Y как α-устойчивый процесс в области D с подавленными скачками выходящими за пределы D (иначе говоря, мера Леви процесса ограничивается на область D) и отражающийся процесс Y^*, являющийся максимальным расширением Y в том смысле, что распределения Y^* с поглощением на границе и Y совпадают. В работе [5] показано, что α-устойчивый процесс с отражением является феллеровским процессом с гёльдеровской переходной функцией, а в работе [12] построено семимартингальное разложение.

Идея, предложенная авторами [30] во многих отношениях проще представленных в литературе и даёт более слабые результаты в терминах класса областей. Однако, как отмечалось выше, она даёт результаты другого характера. Именно, теперь мы получаем возможность строить отражающиеся версии общих процессов Леви. Сам предложенный метод напоминает идеи теории обобщённых функций. Мы будем сопоставлять процессам случайные операторы, заданные на некотором классе пробных функций в области $D \subset \mathbb{R}^d$. При этом отражающемуся процессу будет соответствовать оператор, действующий на пробную функцию $f\colon D \to \mathbb{C}$ так, как оператор процесса без отражения действует на специальное продолжение $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ пробной функции за пределы области D.

В стандартной конструкции отражающегося броуновского движения (см. [6] или [24]) с этой целью используется формула Танаки $|w(t)| \stackrel{d}{=} w(t) + \zeta(t)$, где $\zeta(t)$ – локальное время. В нашей конструкции распределение отражающегося процесса (аналог $|w(t)|$) будет связано с некоторой полугруппой операторов P^t, а распределение процесса в области (аналог $w(t)$) будет связано с другой полугруппой операторов R^t. При этом естественно ожидать, что их разность будет в некотором смысле сосредоточена на границе ∂D. Мы покажем, что эту разность удобно рассматривать как композицию оператора $Q^t\colon W_2^{1/2}(\partial D) \to W_2^2(D)$ с оператором взятия нормальной производной на границе. Как заметили авторы [30], операторы Q^t можно интерпретировать как операторы среднего накопленного границей импульса к моменту t. Мы покажем, что можно определить не только средний накопленный импульс, но и индивидуальный накопленный импульс каждой траектории, который мы будем трактовать как случайный оператор $\mathcal{Q}^t = \mathcal{Q}^t(w(\,\cdot\,))$, зависящий от траектории исходного процесса, так, что для любой $g \in W_2^{1/2}(\partial D)$ выполнено $(Q^t g)(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\,(\mathcal{Q}^t g)(\mathbf{x})$.

§2. Обозначения

Обозначения настоящей статьи совпадают с обозначениями в работе автора [32]. В этом параграфе мы определим основные обозначения, при этом за деталями отсылаем читателя к указанной работе.

Всюду на протяжении статьи тильда над функциями и операторами будет означать, что они заданы во всём $\mathbb{R}^d$, тогда как отсутствие тильды означает, что они заданы в области D. Для всякой $\widetilde{f}$ под f мы будем понимать сужение на область D. Определения $\widetilde{f}$ по f каждый раз даются отдельно.

Для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ положим $x = |\mathbf{x}|$ и $\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/x$. Вектора со шляпками будем также использовать вместо координат на сфере S^{d-1}. Меру Лебега на сфере обозначим через $d\widehat{\mathbf{x}}$.

Ортогональный в $L_2(S^{d-1}, d\widehat{\mathbf{x}})$ базис собственных функций оператора Лапласа–Бельтрами на сфере $\Delta_{S^{d-1}}$ состоит из так называемых сферических гармоник Y_λ^μ, где $\lambda \in \mathbb{Z}_+$, а $\mu = 1, \ldots, d(\lambda)$. Число $d(\lambda)$ называется числом вырождения и в общем случае даётся формулой (2.46) из [10]. В формулах для разложения в ряд по сферическим гармоникам мы будем опускать указание на индексы суммирования, предполагая по умолчанию, что значки λ и μ пробегают все возможные значения.

Равенство $A = (s)\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ означает, что оператор A есть сильный предел в $L_2(D)$ последовательности операторов A_n. Иначе говоря, для любой $f \in L_2(D)$ справедливо $\|Af - A_n f\|_{L_2(D)} \to 0$ при $n \to \infty$.

Определим оператор $\gamma_1\colon W_2^2(D) \to W_2^{1/2}(\partial D)$ как замыкание оператора $u \mapsto \partial_n u|_{\partial D}$, заданного на $C^\infty(\overline{D})$. Оператор γ_1 сопоставляет функции из $W_2^2(D)$ её нормальную производную на границе (см. [38], стр. 187). Определим оператор $H_0\colon W_2^{1/2}(\partial D) \to W_2^2(D)$ формулой

$$(H_0 g)(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda\neq 0} g_{\lambda\mu} \frac{x^\lambda}{\lambda} Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}}).$$

Определим функцию χ, полагая для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$

$$\chi(\mathbf{x}) = \frac{x^2}{2|D|d}.$$

Для $f \in W_2^2(D)$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ положим

$$\widetilde{f}_b(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}) \int\limits_{\partial D} (\gamma_1 f)(\widehat{\mathbf{y}})\, d\widehat{\mathbf{y}}.$$

Функцию $\widetilde{f}_b$ будем называть бигармонической компонентой функции f. Положим $g = \gamma_1(f - f_b)$ и заметим, что функция g удовлетворяет условию $\int_{\partial D} g(\widehat{\mathbf{x}})\, d\widehat{\mathbf{x}} = 0$. Таким образом то $f_h = H_0 g$ – это единственная гармоническая в D функция, удовлетворяющая двум условиям: $\gamma_1 f_h = g$ и интеграл от f_h по шару равен нулю. Иначе говоря, H_0 – это оператор гармонического продолжения, связанный с задачей Неймана. Через $\widetilde{f_h}$ обозначим гармоническое продолжение во всё пространство, определённое для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus D$ равенством

$$\widetilde{f}_h(\mathbf{x}) = -\sum_{\lambda \neq 0} \frac{g_{\lambda\mu}}{\lambda + d - 2} \frac{Y_\lambda^\mu(\widehat{\mathbf{x}})}{x^{\lambda+d-2}}.$$

Здесь и далее мы обозначаем $\alpha = d/2 - 1$.

Собственными функциями оператора Лапласа с граничными условиями Неймана являются функции

$$j_\lambda^d(\varkappa_{\lambda k} x) Y_\lambda^\mu(\mathbf{x}),$$

где j_λ^d – это d-мерные гиперсферические функции Бесселя и $\varkappa_{\lambda k},\ k \geqslant 0$ – нули производной $J'_{\lambda+\alpha}(x)$.

Для упорядоченной по возрастанию последовательности нулей $\varkappa_m$ справедлива асимптотика Вейля ([37], стр. 205, формула (17.3.6))

$$\varkappa_m^2 \sim 4\Gamma^{2/d}\left(\frac{d}{2} + 1\right) m^{2/d} \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{1}$$

Нормированную собственную функцию (2), отвечающую собственному числу $\varkappa_m^2$, будем обозначать через s_m. Обозначим через Π_m ортогональный проектор в $L_2(D)$ на линейную оболочку $\{s_k\}_{k=1}^m$.

Для $f \in W_2^2(D)$ разность $f_0 = f - f_b - f_h$ лежит в $\ker \gamma_1$ и может быть разложена в сходящийся по норме $W_2^2(D)$ ряд Фурье по s_m. При этом ряд будет сходится и для $x \in \mathbb{R}^d \setminus D$, что позволяет определить $\widetilde{f}$ той же формулой

$$\widetilde{f}_0(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} (f_0,\, s_m) s_m(\mathbf{x}). \tag{2}$$

§3. Два продолжения начальной функции

Нашей целью является построение процессов с мгновенным отражением в d-мерном шаре $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \colon x < 1\}$. Мы будем следовать работе [30], авторы которой предложили следующую идею. Вместо определения траекторий процесса с отражением $\widetilde{\xi}_{\mathbf{x}}(t)$, мы определялось операторное семейство $(P^t)_{t \geqslant 0}$. Каждый оператор P^t этого семейства действует переводит начальную функцию $f \in W_2^2(D)$ в функцию

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\, \widetilde{f}(\mathbf{x} + \xi(t)),$$

где $\widetilde{f}$ – это некоторое продолжение функции f до функции класса $W^2_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Будем считать, что это операторное семейство задаёт одномерные распределения некоторого процесса $\widetilde{\xi}_{\mathbf{x}}(t)$ в том смысле, что верно равенство

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\, f(\widetilde{\xi}_{\mathbf{x}}(t)).$$

Так как отражающийся процесс является марковским, $(P^t)_{t \geqslant 0}$ определяет все конечномерные распределения.

Нам потребуются два способа продолжать начальную функцию $f \in W_2^2(D)$ до класса $W^2_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. В стандартной конструкции (см. [6] или [24]) отражающегося броуновского движения $|w(t)|$ на $[0, \infty)$ используется формула Танаки $|w(t)| \overset{d}{=} w(t) + \zeta(t)$, где $\zeta(t)$ – локальное время. В нашей конструкции отражающийся процесс (аналог $|w(t)|$) будет связан с продолжением $\widetilde{f}$, заданным равенством

$$\widetilde{f}(\mathbf{x}) = \widetilde{f}_0(\mathbf{x}) + \widetilde{f}_b(\mathbf{x}) + \widetilde{f}_h(\mathbf{x}),$$

тогда как продолжение $\overline{f}$

$$\overline{f}(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} (f,\, s_m) s_m(\mathbf{x})$$

будет отвечать процессу в области (аналог $w(t)$ в стандартной конструкции). По аналогии с конструкцией Скорохода, разность этих способов продолжения должна быть связана с процессом, обеспечивающим разворот траектории от границы, то есть с локальным временем.

Определим теперь две полугруппы P^t и R^t, полагая для $\mathbf{x} \in D$

$$(P^t f)(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\,\widetilde{f}(w_{\mathbf{x}}(t)) \qquad \text{и} \qquad (R^t f)(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\,\overline{f}(w_{\mathbf{x}}(t)).$$

Их генераторы выражаются через оператор $\widetilde{A} = -\Delta/2$ на области определения $D(\widetilde{A}) = W^2_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Именно, генератором полугруппы P^t является оператор A с областью определения $D(A) = W^2_2(D)$ и действующий по формуле $(Af)(\mathbf{x}) = (\widetilde{A}\widetilde{f})(\mathbf{x})$ для $\mathbf{x} \in D$.

Генератор R^t – это оператор A^N, заданный на области определения $D(A^N) = \ker\gamma_1$ формулой $(A^N f)(\mathbf{x}) = (\widetilde{A}\overline{f})(\mathbf{x})$ для $\mathbf{x} \in D$.

Найдём удобные формулы для разности полугрупп $P^t - R^t$ и покажем, что она действительно "сосредоточена" на границе ∂D.

Лемма 3.1. *Для $f \in L_2(D)$ справедлива формула*

$$P^t f - R^t f = (L_2) \lim_{m\to\infty} \int\limits_0^t P^\tau (A - A^N \Pi_m) f \, d\tau.$$

Доказательство. Для C_0-полугруппы R^t и $f \in W^2_2(D)$, не лежащей вообще говоря в $D(A^N)$, справедливо равенство

$$R^t f - f = A^N \int\limits_0^t R^\tau f \, d\tau$$

(см. [15], теорема 2.4).

Чтобы занести оператор A^N под интеграл, воспользуемся замкнутостью оператора A^N

$$A^N = (s) \lim_{m\to\infty} A^N \Pi_m$$

и тем, что $\Pi_m f \in D(A^N)$. Получим

$$R^t f - f = (L_2) \lim_{m\to\infty} \int\limits_0^t P^\tau A^N \Pi_m f \, d\tau. \tag{3}$$

В этом вычислении мы, кроме прочего, учли что $\Pi_m R^\tau = R^\tau \Pi_m = P^\tau \Pi_m$.

Для оператора P^t то же самое получается автоматически, так как $f \in D(A)$

$$P^t f - f = A \int_0^t P^\tau f \, d\tau = \int_0^t P^\tau A f \, d\tau. \tag{4}$$

Вычитая формулу (3) из (4), получим утверждение леммы. □

Вычислим указанную разность и покажем, что она выражается в терминах некоторого оператора, заданного на $W_2^{1/2}(\partial D)$.

Лемма 3.2. *Для $f \in L_2(D)$ справедливо соотношение*

$$P^t f(\mathbf{x}) - R^t f(\mathbf{x}) = \int_{\partial D} Q^t(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{y}})(\gamma_1 f)(\widehat{\mathbf{y}}) \, d\widehat{\mathbf{y}}, \tag{5}$$

где

$$Q^t(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2} \int_0^t R^\tau(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{y}}) \, d\tau.$$

Доказательство. Для начала заметим, что $P^t f_0 - R^t f_0 = 0$, и поэтому достаточно вычислить действие разности полугрупп на $f_b + f_h$.

$$\left[A - A^N \Pi_m\right](f_h + f_b) = \widetilde{A} \left(\widetilde{f}_h + \widetilde{f}_b - \overline{\Pi_m f_h} - \overline{\Pi_m f_b} \right). \tag{6}$$

Заметим, что $\widetilde{A}\widetilde{f}_h = 0$. Вычислим остальные слагаемые

$$\widetilde{f}_b - \overline{\Pi_m f_h} - \overline{\Pi_m f_b} = \widetilde{f}_b - \sum_{l=0}^m (f_h, \, s_l) \, s_l - \sum_{l=0}^m (f_b, \, s_l) \, s_l$$

$$= \int_{\partial D} d\widehat{\mathbf{y}} \, (\gamma_1 f)(\widehat{\mathbf{y}}) \left[\chi(\mathbf{x}) - \underbrace{\sum_{l=0}^m (h(\cdot, \, \widehat{\mathbf{y}}), s_l) \, s_l(\mathbf{x})}_{B_1} - \underbrace{\sum_{l=0}^m (\chi, \, s_l) \, s_l(\mathbf{x})}_{B_2} \right] \tag{7}$$

Вычислим B_2.

$$\begin{aligned}B_2 &= \frac{1}{2|D|d}\sum_{l=0}^{m}(x^2, s_l)s_l(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2|D|d}\sum_{l=0}^{m}(x^2-2x, s_l)s_l(\mathbf{x}) + \frac{1}{2|D|d}\sum_{l=0}^{m}(2x, s_l)s_l(\mathbf{x}) \\ &= \frac{x^2-2x}{2|D|d} + o(1) + \frac{1}{|D|d}\sum_{l=0}^{m}(x, s_l)s_l(\mathbf{x}) \qquad (8)\end{aligned}$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что функция $g(\mathbf{x}) = x^2 - 2x$ удовлетворяет условию Неймана, и таким образом ряд по s_m для неё сходится в L_2.

Подставим $g(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{y}}) = h(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{y}}) + x/|D|d$ в формулу для B_1

$$B_1 = \sum_{l=0}^{m}(g(\cdot, \widehat{\mathbf{y}}), s_l)s_l(\mathbf{x}) - \frac{1}{|D|d}\sum_{l=0}^{m}(x, s_l)s_l(\mathbf{x}). \qquad (9)$$

Нетрудно убедиться, пользуясь явным выражением для h, что функция g удовлетворяет соотношению

$$\left.\frac{\partial g}{\partial n_{\mathbf{x}}}\right|_{\partial D} = \delta(\widehat{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{y}}). \qquad (10)$$

Коэффициент в первом слагаемом (9) вычисляется при помощи формулы Грина и (10)

$$\begin{aligned}(g(\cdot, \widehat{\mathbf{y}}), s_l) &= \frac{1}{-\varkappa_l^2}\int_D g(\mathbf{z}, \widehat{\mathbf{y}})\Delta\overline{s_l(\mathbf{z})}\,d\mathbf{z} \\ &= \frac{1}{\varkappa_l^2}\int_{\partial D}\overline{s_l(\widehat{\mathbf{z}})}\frac{\partial g}{\partial n_{\mathbf{z}}}(\widehat{\mathbf{z}}, \widehat{\mathbf{y}})\,d\widehat{\mathbf{z}} = \frac{1}{\varkappa_l^2}\overline{s_l(\widehat{\mathbf{y}})}. \qquad (11)\end{aligned}$$

Подставляя (11) в (9), получим

$$B_1 = \sum_{l=0}^{m}\frac{1}{\varkappa_l^2}s_l(\mathbf{x})\overline{s_l(\widehat{\mathbf{y}})} - \frac{1}{|D|d}\sum_{l=0}^{m}(x, s_l)s_l(\mathbf{x}). \qquad (12)$$

Итак, для ядра в формуле (7) имеем

$$\chi(\mathbf{x}) - B_1 - B_2 = \frac{x}{|D|d} - \sum_{l=0}^{m}\frac{1}{\varkappa_l^2}s_l(\mathbf{x})\overline{s_l(\widehat{\mathbf{y}})} + o(1),$$

где $o(1)$ стремится к нулю в L_2 при $m \to \infty$.

Подействуем на предыдущее равенство оператором $P^\tau \widetilde{A}$

$$P^\tau \widetilde{A}\left(\frac{x}{|D|d} - \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{\varkappa_l^2} s_l(\mathbf{x})\overline{s_l(\widehat{\mathbf{y}})} + o(1)\right)$$
$$= \frac{1}{2}P^\tau \sum_{l=0}^{m} s_l(\mathbf{x})\overline{s_l(\widehat{\mathbf{y}})} + o(1) = \frac{1}{2}R^\tau(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{y}}) + o(1), \quad (13)$$

где $o(1)$ стремится к нулю в L_2 при $m \to \infty$. $\square$

Определим оператор Q^t, полагая для $g \in W_2^{1/2}(\partial D)$

$$(Q^t g)(\mathbf{x}) = \int\limits_{\partial D} Q^t(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{y}}) g(\widehat{\mathbf{y}})\, d\widehat{\mathbf{y}}.$$

Другая полезная формула для Q^t получается из (3.1):

$$(Q^t g)(\mathbf{x}) = \lim_{m\to\infty} \int\limits_0^t P^\tau (A - A^N \Pi_m) G(\mathbf{x})\, d\tau, \quad (14)$$

где $G(\mathbf{x}) = g_h(\mathbf{x}) + g_b(\mathbf{x})$.

Из доказанного выше следует, что справедливы теоремы 3.3, 3.4 и 3.5.

Теорема 3.3. *Операторные семейства $(R^t)_{t\geqslant 0}$ и $(Q^t)_{t\geqslant 0}$ удовлетворяют следующим эволюционным соотношениям*

$$R^{t+s} = R^t R^s,$$
$$Q^{t+s} = Q^t + R^t Q^s.$$

При этом $R^0 = I$, $Q^0 = 0$.

Теорема 3.4. *При всех $t > 0$ и $f \in D(A^N)$ справедливо соотношение*

$$\frac{\partial}{\partial t} R^t f = \frac{1}{2} A^N R^t f.$$

Теорема 3.5. *При всех $t > 0$ и $g \in W_2^{1/2}(\partial D)$ справедливо соотношение*

$$\frac{\partial}{\partial t} Q^t g = \frac{1}{2} \int R^t(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{y}}) g(\widehat{\mathbf{y}})\, d\widehat{\mathbf{y}}.$$

§4. Случайный накопленный импульс

В предыдущем параграфе мы построили операторные семейства $(R^t)_{t\geqslant 0}$ и $(Q^t)_{t\geqslant 0}$. В этом параграфе мы покажем, что есть естественный способ определить эти операторы как усреднение некоторых случайных операторов, заданных потраекторно.

Определим случайный оператор $\mathcal{P}^\tau = \mathcal{P}^\tau[w(\cdot)]$, полагая

$$(\mathcal{P}^\tau s_m)(\mathbf{x}) = e^{iw_1(\tau)\varkappa_m} s_m(\mathbf{x}), \tag{15}$$

$$(\mathcal{P}^\tau f_b) = \widetilde{f}_b(x + w(\tau)), \tag{16}$$

$$(\mathcal{P}^\tau f_h) = \widetilde{f}_h(x + w(\tau)). \tag{17}$$

Отметим, что в определение $\mathcal{P}^\tau$ входит только первая компонента $w_1(\tau)$ винеровского процесса $w(t)$. Это связано со сферической инвариантностью распределения $w(t)$.

Заметим, что $\mathbf{E}\,\mathcal{P}^\tau = P^\tau$, и определим оператор случайного накопленного импульса $\mathcal{Q}^t = \mathcal{Q}^t[w(\cdot)]$, пользуясь формулой (14):

$$(\mathcal{Q}^t g)(\mathbf{x}) = \lim_{m\to\infty} \int\limits_0^t \mathcal{P}^\tau (A - A^N \Pi_m) G(\mathbf{x})\, d\tau, \tag{18}$$

где

$$G(\mathbf{x}) = (H_0 g)(\mathbf{x}) + \chi(\mathbf{x}) \int\limits_{\partial D} g(\widehat{\mathbf{y}})\, d\widehat{\mathbf{y}}.$$

Теорема 4.1. *Предел в правой части уравнения* (18) *существует в смысле* $L_2\,(\mathcal{H}, \mu)$, *где* $\mathcal{H} = D \times \Omega$ *и* $d\mu = d\mathbf{x} \times d\mathbf{P}$.

Доказательство. Мы будем пользоваться формулой (13), в которой следует заменить P^τ на $\mathcal{P}^\tau$

$$\left(\mathcal{Q}^t g\right)(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \lim_{m\to\infty} \int\limits_{\partial D} \int\limits_0^t g(\widehat{\mathbf{y}}) \mathcal{P}^\tau \sum_{l=0}^m s_l(\mathbf{x}) \overline{s_l(\widehat{\mathbf{y}})}\, d\widehat{\mathbf{y}}\, d\tau.$$

Достаточно доказать, что при каждом $t > 0$ последовательность

$$\Psi_m(\mathbf{x},\, w(\cdot)) = \int\limits_{\partial D} \int\limits_0^t g(\widehat{\mathbf{y}}) \mathcal{P}^\tau \sum_{l=0}^m s_l(\mathbf{x}) \overline{s_l(\widehat{\mathbf{y}})}\, d\widehat{\mathbf{y}}\, d\tau$$

фундаментальна в $L_2(\mathcal{H}, \mu)$.

Пусть $m > n$. Тогда

$$\|\Psi_m - \Psi_n\|^2_{L_2(\mathcal{H},\mu)} = \int\limits_D \mathbf{E} \left| \int\limits_{\partial D} \int\limits_0^t g(\widehat{\mathbf{y}}) \sum_{l=n+1}^m e^{i\varkappa_l w(t)} s_l(\mathbf{x}) \overline{s_l(\widehat{\mathbf{y}})}\, d\widehat{\mathbf{y}}\, d\tau \right|^2 d\mathbf{x} = \int\limits_D \mathbf{E} \left| \int\limits_0^t \sum_{l=n+1}^m e^{i\varkappa_l w(t)} g_l s_l(\mathbf{x})\, d\tau \right|^2 d\mathbf{x} \quad (19)$$

Нам понадобится легко проверяемая формула

$$\left| \int\limits_0^t \varphi(\tau)\, d\tau \right|^2 = 2 \int\limits_0^t d\tau_1 \int\limits_0^{\tau_1} d\tau_2 \ \mathrm{Re}\ \left(\overline{\varphi(\tau_1)} \varphi(\tau_2)\right) \quad (20)$$

для $\varphi \in L_1[0,t]$.

Используя (20), получаем

$$\mathbf{E} \int\limits_D \left| \int_0^t \sum_{l=n+1}^m e^{i\varkappa_l w(t)} g_l s_l(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} = 2\mathbf{E} \int\limits_0^t d\tau_1 \int\limits_0^{\tau_1} d\tau_2 \ \mathrm{Re}\ \left(\sum_{l=n+1}^m e^{i\varkappa_l \left(w(\tau_2) - w(\tau_1)\right)} |g_l|^2 \right) = 2 \int\limits_0^t d\tau_1 \int\limits_0^{\tau_1} d\tau_2 \ \mathrm{Re}\ \left(\sum_{l=n+1}^m e^{-\varkappa_l^2 (\tau_2 - \tau_1)/2} |g_l|^2 \right)$$

Имеем

$$\|\Psi_m - \Psi_n\|^2_{L_2(\mathcal{H},\mu)} \leqslant Ct \sum_{l=n+1}^m \frac{|g_l|^2}{\varkappa_l^2}.$$

Покажем, что выражение в предыдущей формуле стремится к нулю. Для этого заметим, что $g = \gamma_1 G$, где $G = g_h + g_b \in W_2^2(D)$. Поскольку $D(A^N) = W_2^1(D)$ (см. [17], стр. 263), верно $\sqrt{A^N} G \in L_2(D)$. По формуле Грина имеем

$$g_l = \int\limits_{\partial D} (\gamma_1 G)(\widehat{\mathbf{y}})\overline{s_l(\widehat{\mathbf{y}})}\, d\widehat{\mathbf{y}} = \int\limits_D \nabla G\, \overline{\nabla s_l}\, d\mathbf{y}$$

$$= \left(\sqrt{-A^N} G,\, \sqrt{-A^N} s_l\right) = \varkappa_l \left(\sqrt{-A^N} G,\, s_l\right).$$

Таким образом

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{|g_l|^2}{\varkappa_l^2} = \sum_{l=1}^{\infty} \left|\left(\sqrt{-A^N} G,\, s_l\right)\right|^2 \leqslant \infty.$$

□

Покажем, что оператор Q^t получается как усреднение операторов $\mathcal{Q}^t$ по траекториям $w(\cdot)$.

Теорема 4.2. *Для любой функции* $g \in W_2^{1/2}(\partial D)$ *выполнено*

$$\mathbf{E}\left(\mathcal{Q}^t g\right)(\mathbf{x}) = (Q^t g)(\mathbf{x}).$$

Доказательство. Для доказательства снова воспользуемся формулой (13), в которой следует заменить P^τ на $\mathcal{P}^\tau$

$$\mathbf{E}\left(\mathcal{Q}^t g\right)(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\,\frac{1}{2}\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\partial D}\int\limits_0^t g(\widehat{\mathbf{y}})\mathcal{P}^\tau \sum_{l=0}^{m} s_l(\mathbf{x})\overline{s_l(\widehat{\mathbf{y}})}\, d\widehat{\mathbf{y}}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\partial D}\int\limits_0^t g(\widehat{\mathbf{y}} \sum_{l=0}^{m} \mathbf{E}\, e^{i\varkappa_l w(t)} s_l(\mathbf{x})\overline{s_l(\widehat{\mathbf{y}})}\, d\widehat{\mathbf{y}}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D}\int\limits_0^t R^\tau(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{y}}) g(\widehat{\mathbf{y}})\, d\widehat{\mathbf{y}}\, d\tau = (Q^t g)(\mathbf{x}).$$ □

§5. Сложный пуассоновский процесс с отражением

В этом разделе мы построим операторные семейства P_n^t и Q_n^t, а так же их случайные аналоги $\mathcal{P}_n^t$ и $\mathcal{Q}_n^t$, для процесса

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j,$$

где $(\xi_j)_{j\geqslant 1}$ – н.о.р. случайные d-вектора с общим распределением $\mathcal{P}$, инвариантным относительно вращений, и $\mathbf{E}\,(\xi_1^1)^2 = 1$ (верхний индекс указывает на номер компоненты), а $(\eta(t))_{t\geqslant 0}$ – не зависящий от них стандартный пуассоновский процесс.

Положим для $f \in W_2^2(D)$ и $\mathbf{x} \in D$

$$(P_n^t f)(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\,\widetilde{f}(\mathbf{x}+\zeta_n(t)) \qquad \text{и} \qquad (R_n^t f)(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\,\overline{f}(\mathbf{x}+\zeta_n(t)).$$

Так же как в случае винеровского процесса генераторы A и A^N двух полугрупп выражались в терминах оператора $\widetilde{A} = -\Delta/2$ в $W_{2,\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R}^d)$, операторы A_n и A_n^N представляются в виде

$$(A_n f)(\mathbf{x}) = (\widetilde{A}_n \widetilde{f})(\mathbf{x}) \qquad \text{и} \qquad (A_n^N f)(\mathbf{x}) = (\widetilde{A}_n \overline{f})(\mathbf{x}),$$

где оператор $\widetilde{A}_n$, заданный на $D(\widetilde{A}_n) = W_{2,\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R}^d)$, действует по формуле

$$(\widetilde{A}_n f)(\mathbf{x}) = 2n \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(f\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{n}}\right) - f(\mathbf{x}) \right) \mathcal{P}(d\mathbf{y}).$$

При этом $D(A_n) = D(A) = W_2^2(D)$ и $D(A_n^N) = D(A^N) = \ker \gamma_1$.

Можно показать (см. [32]), что

$$(A_n s_m)(\mathbf{x}) = -\lambda_m^n s_m(\mathbf{x}),$$

где

$$\lambda_m^n = -2n \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{i\varkappa_m y/\sqrt{n}} - 1 \right) \mathcal{P}_1(dy).$$

Относительно чисел λ_m^n справедливо утверждение.

Лемма 5.1.

1) *При любом фиксированном n последовательность $(\lambda_m^n)_{m\geqslant 0}$ ограничена.*

2) *При любом фиксированном j*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_m^n = \varkappa_m^2.$$

Аналогично тому, как это было сделано выше для винеровского процесса, доказывается следующая лемма.

Лемма 5.2. *Справедлива формула*

$$P_n^t f - R_n^t f = (s) \lim_{m\to\infty} \int\limits_0^t P^\tau (A - A^N \Pi_m) f \, d\tau, \tag{21}$$

где $(s)\lim$ *– это сильный предел в* $L_2(D)$.

Аналог леммы (3.2) выглядит несколько иначе. Вплоть до формулы (13) вычисления проводятся точно так же, как там, с точностью до замены P^τ и $\widetilde{A}$ на P^τ_n и $\widetilde{A}_n$ соответственно. Имеем

$$P_n^\tau \widetilde{A}_n \left(\frac{x}{|D|d} - \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{\varkappa_l^2} s_l(\mathbf{x}) \overline{s_l(\widehat{\mathbf{y}})} + o(1) \right) = \frac{1}{2} P^\tau \sum_{l=0}^{m} \frac{\lambda_l^n}{\varkappa_l^2} s_l(\mathbf{x}) \overline{s_l(\widehat{\mathbf{y}})} + o(1) = \frac{1}{2} \widetilde{R}_n^\tau(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{y}}) + o(1), \quad (22)$$

где

$$\widetilde{R}^t(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{y}}) = \sum \frac{\lambda_m^n}{\varkappa_m^2} e^{-\lambda_m^n t/2} s_m(\mathbf{x}) \overline{s_m(\widehat{\mathbf{y}})}.$$

Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 5.3. *Справедливо соотношение*

$$P_n^t f(\mathbf{x}) - R_n^t f(\mathbf{x}) = \int\limits_{\partial D} Q_n^t(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{y}})(\gamma_1 f)(\widehat{\mathbf{y}})\, d\widehat{\mathbf{y}}, \quad (23)$$

где

$$Q^t(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2} \int\limits_0^t \widetilde{R}_n^\tau(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{y}})\, d\tau.$$

Из доказанного выше следует, что справедливы теоремы 5.4, 5.5 и 5.6.

Теорема 5.4. *Операторные семейства* $(R_n^t)_{t\geqslant 0}$ *и* $(Q_n^t)_{t\geqslant 0}$ *удовлетворяют следующим эволюционным соотношениям*

$$R_n^{t+s} = R_n^t R_n^s,$$
$$Q_n^{t+s} = Q_n^t + \widetilde{R}_n^t Q_n^s.$$

При этом $R_n^0 = I$, $Q_n^0 = 0$.

Теорема 5.5. *При всех* $t > 0$ *и* $f \in D(A_n^N)$ *справедливо соотношение*

$$\frac{\partial}{\partial t} R_n^t f = \frac{1}{2} A_n^N R_n^t f.$$

Теорема 5.6. *При всех $t > 0$ и $g \in W_2^{1/2}(\partial D)$ справедливо соотношение*

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_n^t g = \frac{1}{2} \int \widetilde{R}_n^t(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{y}}) g(\widehat{\mathbf{y}})\, d\widehat{\mathbf{y}}.$$

Далее, по аналогии с (15) определим случайный оператор $\mathcal{P}_n^\tau = \mathcal{P}_n^\tau[\zeta_n(\,\cdot\,)]$, полагая

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_n^\tau s_m)(\mathbf{x}) &= e^{i\zeta_n^1(\tau)\varkappa_m} s_m(\mathbf{x}), \\ (\mathcal{P}_n^\tau f_b) &= \widetilde{f}_b(x + \zeta_n(\tau)), \\ (\mathcal{P}_n^\tau f_h) &= \widetilde{f}_h(x + \zeta_n(\tau)). \end{aligned} \tag{24}$$

Отметим, что в силу сферической инвариантности распределения ζ_n достаточно определить $\mathcal{P}_n^\tau$ пользуясь только первой компонентой ζ_n.

Заметим, что $\mathbf{E}\,\mathcal{P}_n^\tau = P_n^\tau$, и определим оператор случайного накопленного импульса $\mathcal{Q}_n^t = \mathcal{Q}_n^t[\zeta_n(\,\cdot\,)]$, пользуясь формулой (14):

$$(\mathcal{Q}_n^t g)(\mathbf{x}) = \lim_{m\to\infty} \int\limits_0^t \mathcal{P}_n^\tau (A_n - A_n^N \Pi_m) G(\mathbf{x})\, d\tau, \tag{25}$$

где

$$G(\mathbf{x}) = (Hg)(\mathbf{x}) + \chi(\mathbf{x}) \int\limits_{\partial D} g(\widehat{\mathbf{y}})\, d\widehat{\mathbf{y}}.$$

Справедливо утверждение об усреднении $\mathcal{Q}_n^t$, аналогичное 4.2.

Теорема 5.7. *Для любой функции $g \in W_2^{1/2}(\partial D)$ выполнено*

$$\mathbf{E}\,\left(\mathcal{Q}_n^t g\right)(\mathbf{x}) = (Q_n^t g)(\mathbf{x}).$$

§6. Сходимость допредельных операторов к предельным

Покажем теперь, что операторы R_n^t и Q_n^t сильно сходятся при $n \to \infty$ к R^t и Q^t.

Теорема 6.1. *Пусть $f \in D(A^N)$. Тогда*

$$\left\| R_n^t f - R^t f \right\|_{L_2(D)} \leqslant \frac{C\sqrt{t}}{\sqrt{n}} \|f\|_{W_2^2(D)}.$$

Доказательство. Так как f принадлежит $D(A^N)$, справедливо равенство

$$\|R_n^t f - R^t f\|^2_{L_2(D)} = \sum_{m=0}^{\infty} |(f, s_m)|^2 \left| e^{-\lambda_m^n t/2} - e^{-\varkappa_m^2 t/2} \right|^2$$
$$\leqslant \underbrace{\sum_{m \leqslant M} |(f, s_m)|^2 \left| e^{-\lambda_m^n t/2} - e^{-\varkappa_m^2 t/2} \right|^2}_{I_1} + \underbrace{4 \sum_{m > M} |(f, s_m)|^2}_{I_2},$$

где $M = M(n,t)$ выберем позже.

Согласно (1), при $m \leqslant M$ справедливо неравенство $\varkappa_m^2 \leqslant CM^{2/d}$ с некоторой константой $C > 0$. Нетрудно видеть (см. [32]), что

$$\left| e^{-\lambda_m^n t/2} - e^{-\varkappa_m^2 t/2} \right| \leqslant \frac{C\varkappa_m^4}{n} \leqslant \frac{CM^{2/d} m^{2/d}}{n}.$$

Тогда

$$I_1 \leqslant \frac{CM^{4/d}}{n^2} \sum_{m \leqslant M} m^{4/d} |(f, s_m)|^2 \leqslant \frac{CM^{4/d}}{n^2} \|f\|^2_{W_2^2(D)}.$$

Для суммы I_2 имеем

$$I_2 \leqslant \frac{1}{M^{4/d}} \sum_{m > M} m^{4/d} |(f, s_m)|^2 \leqslant \frac{C}{M^{4/d}} \|f\|^2_{W_2^2(D)}.$$

Окончательно,

$$\|R_n^t f - R^t f\|^2_{L_2(D)} \leqslant C \left(\frac{M^{4/d}}{n^2} + \frac{1}{M^{4/d}} \right) \|f\|^2_{W_2^2(D)} \leqslant \frac{Ct}{n} \|f\|^2_{W_2^2(D)}$$

при $M = (n/t)^{d/4}$. □

Теорема 6.2. *Справедливо равенство*

$$R^t = (s) \lim_{n \to \infty} R_n^t,$$

где $(s) \lim$ *– это сильный предел в* L_2.

Данное утверждение следует из предыдущей теоремы и теоремы Банаха–Штейнгауза.

Докажем теперь, что операторы Q_n^t сходятся к Q^t.

Теорема 6.3. *Существует такое число $C > 0$, что для любой функции $g \in W_2^{1/2}(\partial D)$ выполнено неравенство*

$$\|Q_n^t g - Q^t g\|_{L_2(D)}^2 \leqslant \frac{Ct^{3/8}}{n^{3/8}} \|g\|_{W_2^{1/2}(\partial D)}^2.$$

Доказательство. По функции $g \in W_2^{1/2}(\partial D)$ построим $G = g_h + g_b \in W_2^2(D)$, полагая

$$G(\mathbf{x}) = \int\limits_{\partial D} g(\widehat{\mathbf{y}})\big(\chi(\mathbf{x}) + h_0(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{y}})\big)\, d\widehat{\mathbf{y}}.$$

Используя (23) и (14), получаем

$$\|Q_n^t g - Q^t g\|_{L_2(D)}^2 = \|R_n^t G - R^t G\|_{L_2(D)}^2.$$

Можно показать, для существует следующая двусторонняя оценка нормы $\|g\|_{W_2^{1/2}(\partial D)}$

$$\|g\|_{W_2^{1/2}(\partial D)}^2 \asymp \sum m^{1/d} |(G, s_m)|^2$$

Для некоторого $M = M(n, t)$, которое мы подберём позже, имеем

$$\|R_n^t G - R^t G\|_{L_2(D)}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} |(G, s_m)|^2 \left| e^{-\lambda_m^n t/2} - e^{-\varkappa_m^2 t/2} \right|^2$$
$$= \sum_{m \leqslant M} |(G, s_m)|^2 \left| e^{-\lambda_m^n t/2} - e^{-\varkappa_m^2 t/2} \right|^2 + 4 \sum_{m > M} |(G, s_m)|$$
$$\leqslant \frac{CM^{3/d}}{n^2} \sum_{m \leqslant M} m^{1/d} |(G, s_m)|^2 + \frac{1}{M^{1/d}} \sum_{m > M} m^{1/d} |(G, s_m)|^2$$
$$\leqslant C \left(\frac{M^{3/d}}{n^2} + \frac{1}{M^{1/d}} \right) \|g\|_{W_2^{1/2}(\partial D)}^2 = \frac{Ct^{3/4}}{n^{3/4}} \|g\|_{W_2^{1/2}(\partial D)}^2.$$

В последнем равенстве мы положили $M = (n/t)^{1/4}$. $\square$

Список литературы

1. S. Asmussen, *Applied probability and queues*, Vol. 51, Springer Science & Business Media, 2008.
2. F. Bass Richard, Pei. Hsu, *Some potential theory for reflecting brownian motion in holder and lipschitz domains.* — Ann. Probab. **19**, No. 2 (1991), 486–508.

3. R. Bekker, B, Zwart, *On an equivalence between loss rates and cycle maxima in queues and dams.* — Probability in the Engineering and Informational Sciences **19**, No. 2 (2005), 241–255.
4. B. Krzysztof, B. Krzysztof, Zhen-Qing Chen, *Censored stable processes.* — Probability theory and related fields **127**, No. 1 (2003), 89–152.
5. Zhen-Qing Chen, Takashi Kumagai. *Heat kernel estimates for stable-like processes on d-sets.* — Stochastic Processes and their applications **108**, No. 1 (2003), 27–62.
6. Kai Lai Chung, R. J. Williams, RJ Williams, *Introduction to stochastic integration*, Vol. 2, Springer, 1990.
7. J. W. Cohen, A. Browne, *The single server queue*, Vol. 8, North-Holland Amsterdam, 1982.
8. W. L. Cooper, V. Schmidt, R. F. Serfozo, *Skorohod–loynes characterizations of queueing, fluid, and inventory processes.* — Queueing Systems **37**, No. 1–3 (2001), 233–257.
9. D. J. Daley, *Single-server queueing systems with uniformly limited queueing time.* — J. Australian Math. Soc. **4** No. 4 (1964), 489–505.
10. Avery James Emil, Avery John Scales, *Hyperspherical harmonics and their physical applications.* — World Scientific, 2017.
11. M. Fukushima, *A constuction of reflecting barrier brownian motions for bounded domains.* — Osaka J. Math. **4** (1967), 183–215.
12. Qing-Yang Guan, Zhi-Ming Ma, *Reflected symmetric α-stable processes and regional fractional laplacian.* — Probability theory and related fields **134**, No. 4 (2006), 649–694.
13. P.-L. Lions, A.-S.Sznitman, *Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions.* — Communications on Pure and Applied Mathematics **37**, No. 4 (1984), 511–537.
14. P. A. P. Moran, *The theory of storage.* 1959.
15. Amnon Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Vol. 44, Springer Science & Business Media, 2012.
16. A. Pilipenko, *An introduction to stochastic differential equations with reflection*, Vol. 1, Universitätsverlag Potsdam, 2014.
17. M. Reed, B. Simon, *IV: Analysis of Operators*, Vol. 4, Elsevier, 1978.
18. W. Stadje, *A new look at the moran dam.* — J. Applied Probability **30**, No. 2 (1993), 489–495.
19. E. M. Stein, and G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces (PMS-32)*, Vol. 32, Princeton university press, 2016.
20. D. W. Stroock, SR Srinivasa Varadhan, *Diffusion processes with boundary conditions.* — Communications on Pure and Applied Mathematics **24**, No. 2 (1971), 147–225.
21. G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions.* Cambridge university press, 1995.
22. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве.* Издательство Ленинградского университета, 1980.

23. С. Ватанабэ, Н. Икэда, *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы.* Наука, 1986.
24. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения.* Издательство Наука Думка, 1968.
25. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Предельная теорема о сходимости функционалов от случайного блуждания к решению задачи Коши для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma^2 \Delta u$ с комплексным параметром σ.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **420** (2013), 88–102.
26. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Комплексный аналог центральной предельной теоремы и вероятностная аппроксимация интеграла Фейнмана.* — Доклады Академии наук **459** (2014), 400–400.
27. И. А Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Начально-краевые задачи в ограниченной области: вероятностные представления решений и предельные теоремы, I.* — Теория вероятн. и ее примен. **61**, No. 4 (2016), 733–752.
28. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Об одной предельной теореме, связанной с вероятностным представлением решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 158–175.
29. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Начально-краевые задачи в ограниченной области: вероятностные представления решений и предельные теоремы, II.* — Теория вероятн. и ее примен. **62**, No. 3 (2017), 446–467.
30. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Отражающиеся процессы Леви и порождаемые ими семейства линейных операторов.* — Теория вероятн. и ее примен. **64**, No. 3 (2019), 417–441.
31. П. Н. Иевлев, *Вероятностное представление решения задачи Коши для многомерного уравнения Шрёдингера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 145–158.
32. П. Н. Иевлев, *Вероятностные представления для решений начально-краевых задач для уравнения Шрёдингера в d-мерном шаре.* Зап. научн. семин. ПОМИ **474** (2018), 149–170.
33. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* Мир, 1972.
34. Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы.* 2007.
35. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* Наука, М., 1973.
36. А. В. Скороход, *Стохастические уравнения для процессов диффузии с границами.* — Теория вероятн. и ее примен. **6**, No. 3 (1961), 287–298.
37. Э. Ч. Титчмарш, В. Б. Лидский, *Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка.* Издательство иностранной литературы, М., 1961.
38. Д. К. Фаддеев, Б. З. Вулих, Н. Н. Уральцева, и др. *Избранные главы анализа и высшей алгебры.* Издательство Ленинградского университета, 1981.

Ievlev P. N. Reflecting Brownian motion in d-ball.

Following the works of I. A. Ibrahimov, N. V. Smorodina and M. M. Faddeev, we develop a new construction of the Brownian motion with reflection in d-ball. The main advantage of our new approach is that it allows one

to construct reflecting Levy processes, whereas previous constructions are limited to diffusion processes. In our upcoming work we shall extend the results to the symmetric Levy processes in a smooth domain.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: ievlev.pn@gmail.com

Поступило 6 ноября 2019 г.