Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 486, 2019 г.

И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ ЛОКАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

Пусть $\xi(t)$, $t \geqslant 0$ – измеримый вещественнозначный случайный процесс. Тогда для любой измеримой функции f по теореме о замене меры справедливо тождество

$$\int_0^t f(\xi(s))ds = \int_{\mathbb{R}} f(y)\mu(t,dy), \tag{1}$$

где для любого борелевского множества A величина $\mu(t,A)$ определяется как время пребывания процесса $\xi(s)$, $s \in [0,t]$ в множестве A. Другими словами, $\mu(t,\,\cdot\,)$ есть образ меры Лебега на $[0,t]$ под действием функции $\xi(s)$.

Если мера $\mu(t,\,\cdot\,)$ с вероятностью 1 абсолютно непрерывна относительно меры Лебега λ, то производную

$$l(t,y) = \frac{d\mu}{d\lambda}(t,y)$$

называют локальным временем процесса ξ в точке y к моменту времени t. В этом случае соотношение (1) может быть переписано как

$$\int_0^t f(\xi(s))ds = \int_{\mathbb{R}} f(y)l(t,y)dy. \tag{2}$$

Если у процесса $\xi(t)$ существует локальное время, то оно может быть вычислено с помощью формулы (см., например, [2])

$$l(t,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ipy}\Big(\int_0^t e^{-ip\xi(s)}ds\Big)\,dp. \tag{3}$$

Ключевые слова: случайные процессы, процессы Леви, локальное время.

Работа второго и третьего авторов выполнена при поддержке РНФ (грант No. 17-11-01136).

В случае, когда у процесса $\xi(t)$ нет локального времени, то в качестве его удобной замены можно рассмотреть сглаженную меру

$$m(t,y)dy = (h_0 * \mu)(t,y)\,dy = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} h_0(y-z)\mu(t,dz)\Big)\,dy,$$

где сглаживающее ядро h_0 может быть выбрано достаточно произвольным образом.

Обозначим через A_h оператор свертки с функцией $h(x) = h_0(-x)$. Нетрудно проверить справедливость следующего тождества

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (A_h f)(y)\mu(t,dy) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)m(t,y)dy.$$

Последнее тождество означает, что для сглаженной меры $m(t,y)dy$ вместо (2) справедливо соотношение

$$\int\limits_0^t (A_h f)(\xi(s))\,ds = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)m(t,y)dy.$$

В настоящей работе мы покажем, что для некоторого специального класса процессов, именно, для центрированных процессов Леви с конечным вторым моментом, есть достаточно удобный выбор функции h. Для разных процессов функция h будет разной (она будет определяться мерой Леви процесса), и всегда будет вероятностной плотностью. Далее мы покажем, что именно такой выбор функции h является вполне естественным, так как построенная таким образом случайная функция $m(t,y)$ "наследует" одно важное свойство локального времени винеровского процесса.

Известно, что для процессов Леви локальное время существует не всегда. Например, у устойчивых процессов локальное время существует только если показатель устойчивости больше единицы. Необходимое и достаточное условие существования локального времени у процесса Леви можно найти в [3].

Итак, пусть $\xi(t)$, $t \in [0,\infty)$, $\xi(0) = 0$ – однородный центрированный процесс Леви с конечным вторым моментом. Предположим сначала (далее мы откажемся от этого предположения), что процесс $\xi(t)$ – чисто скачкообразный (без гауссовской компоненты). В этом случае, так как процесс $\xi(t)$ центрирован, то распределение процесса однозначно определяется его мерой Леви Π. Мера Леви является σ-конечной мерой на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \min(y^2,1)\,\Pi(dy) < \infty.$$

Мера Π определяет интенсивность скачков процесса $\xi(t)$, а сам процесс $\xi(t)$ может быть построен как стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере соответствующей интенсивности (подробнее см. [4, гл. 6, §4]).

Для любого t характеристическая функция $\varphi_t(p)$ случайной величины $\xi(t)$ имеет вид

$$\varphi_t(p) = \mathbf{E}e^{ip\xi(t)} = e^{-tL(p)}, \tag{4}$$

где

$$-L(p) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{ipy} - 1 - ipy\right)\Pi(dy).$$

Условие конечности у процесса $\xi(t)$ второго момента означает, что выполнено более сильное условие

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} y^2\,\Pi(dy) < \infty. \tag{5}$$

Дополнительно мы предположим, что процесс $\xi(t)$ удовлетворяет условию нормировки

$$\mathbf{E}\xi^2(1) = \int\limits_{\mathbb{R}} y^2\,\Pi(dy) = 1. \tag{6}$$

Из условий (5) и (6) вытекает, что для всех $p \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|L(p)| \leqslant \frac{p^2}{2}. \tag{7}$$

Кроме того, из (6) следует, что справедливо соотношение

$$L(p) \sim \frac{p^2}{2},\ \ p \to 0. \tag{8}$$

Для процесса Леви, определенного (4), рассмотрим специального вида функцию $h(x)$

$$h(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} (|x+y| - |x| - y\cdot\operatorname{sgn}(x))\Pi(dy)$$

$$= 2\Big(\int_{-x}^{\infty}(x+y)\Pi(dy)\cdot \mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x) - \int_{-\infty}^{-x}(x+y)\Pi(dy)\cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\Big). \quad (9)$$

Нетрудно показать (см. [1, стр. 208]) что преобразование Фурье $\widehat{h}(p)$ функции $h(x)$ задается формулой

$$\widehat{h}(p) = \frac{2L(-p)}{p^2}. \quad (10)$$

Из (9) следует, что функция h неотрицательна, а с учетом (8) это означает, что она является плотностью вероятностного распределения.

Определим теперь оператор $A_h : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, полагая

$$A_h f = f * h.$$

Из (7) следует, что A_h является ограниченным оператором в $L_2(\mathbb{R})$. Важно отметить, что функция h, и, соответственно, оператор A_h, зависят от процесса $\xi(t)$. Более того, если мы рассмотрим последовательность процессов ξ_n, слабо сходящуюся к стандартному винеровскому процессу, то соответствующая последовательность операторов A_{h_n} будет сходиться к тождественному оператору.

Посмотрим теперь, что изменится в случае, если процесс $\xi(t)$ не является чисто скачкообразным, то есть у процесса $\xi(t)$ имеется ненулевая гауссовская компонента. В этом случае в формуле (4) мы имеем

$$-L(p) = \frac{\sigma^2 p^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} \big(e^{ipy} - 1 - ipy\big)\Pi(dy),$$

а условие (6) заменится на условие

$$\mathbf{E}\xi^2(1) = \sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} y^2\,\Pi(dy) = 1.$$

Функция $\widehat{h}(p)$ также задается формулой (10), но в этом случае у меры $h(x)dx$ появится масса σ^2 в точке ноль. Для винеровского процесса мы имеем $\sigma^2 = 1$ и $\widehat{h}(p) = 1$ для всех p. В этом случае мера $h(x)dx$ превращается в дельта-функцию.

Всюду далее мы рассматриваем общий случай, то есть предполагаем, что у процесса $\xi(t)$ может быть ненулевая гауссовская компонента.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Для любого $f \in L_2(\mathbb{R})$ справедливо соотношение*

$$\int_0^t A_h f(\xi(s))ds = \int_{\mathbb{R}} f(y)m(t,y)dy, \tag{11}$$

где

$$m(t,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ipy}\,\widehat{h}(p)\Big(\int_0^t e^{-ip\xi(s)}ds\Big)\,dp, \tag{12}$$

причем $m(t,\,\cdot\,) \in L_2(\mathbb{R})$ с вероятностью 1.

Доказательство. Докажем сначала, что $m(t,\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ с вероятностью 1. Для этого достаточно показать что

$$\mathbf{E}\int_{\mathbb{R}} |m(t,y)|^2\,dy < \infty. \tag{13}$$

Чтобы доказать (13) в свою очередь достаточно показать конечность величины

$$I = \mathbf{E}\int_{|p|\geqslant 1} |\widehat{h}(p)|^2\Big|\int_0^t e^{-ip\xi(s)}ds\Big|^2\,dp.$$

Нам понадобится легко проверяемая формула. Для каждой функции $\varphi \in L_1[0,t]$ справедливо соотношение

$$\Big|\int_0^t \varphi(s)\,ds\Big|^2 = 2\int_{0<s_1<s_2<t} \mathrm{Re}[\overline{\varphi(s_2)}\varphi(s_1)]\,ds_1ds_2. \tag{14}$$

Используя (14), получим

$$\begin{aligned} I &= 2\mathrm{Re}\Big[\int_{|p|\geqslant 1} dp\,|\widehat{h}(p)|^2\mathbf{E}\int_{0<s_1<s_2<t} e^{-ip\xi(s_1)}e^{ip\xi(s_2)}ds_1ds_2\Big] \\ &= 2\mathrm{Re}\Big[\int_{|p|\geqslant 1} dp\,|\widehat{h}(p)|^2\int_{0<s_1<s_2<t} e^{-(s_2-s_1)L(p)}ds_1ds_2\Big] \\ &= 2\mathrm{Re}\Big[\int_{|p|\geqslant 1} dp\,|\widehat{h}(p)|^2\frac{1}{L(p)}\int_0^t (1-e^{-s_2L(p)})ds_2\Big] \end{aligned}$$

$$= 2\mathrm{Re}\Big[\int\limits_{|p|\geqslant 1} dp\,|\widehat{h}(p)|^2 \frac{1}{L(p)}\big(t - \frac{1}{L(p)}(1 - e^{-tL(p)})\big)\Big]$$
$$\leqslant 2 \int\limits_{|p|\geqslant 1} dp\,\frac{|L(p)|}{p^4}\left(t + \frac{1}{|L(p)|}\right) < \infty$$

Сходимость последнего интеграла следует из (7).

Докажем теперь формулу (11). Введем еще одно обозначение. Для каждых $g \in L_2(\mathbb{R})$ и $M > 0$ через g_M будем обозначать функцию

$$g_M(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-M}^{M} e^{-ipx}\widehat{g}(p)dp.$$

Далее, пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$. Имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_0^t A_h f(\xi(s))ds &= \lim_{M\to\infty}\int\limits_0^t A_h f_M(\xi(s))ds \\ &= \lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-M}^{M}\widehat{f}(p)\widehat{h}(p)\Big(\int\limits_0^t e^{-ip\xi(s)}ds\Big)\,dp \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(p)\widehat{h}(p)\Big(\int\limits_0^t e^{-ip\xi(s)}ds\Big)\,dp \qquad (15)\end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}} f(y)m(t,y)dy &= \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\Big[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{ipy}\widehat{h}(p)\Big(\int\limits_0^t e^{-ip\xi(s)}ds\Big)\,dp\Big]\,dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\widehat{f}(p)\widehat{h}(p)\Big(\int\limits_0^t e^{-ip\xi(s)}ds\Big)\,dp. \qquad (16)\end{aligned}$$

Из (15) и (16) немедленно следует утверждение теоремы. □

Формула (11) может быть переписана следующим образом. Для каждого $g \in A_h(L_2(\mathbb{R}))$ справедливо соотношение

$$\int_0^t g(\xi(s))ds = \int_{\mathbb{R}} A_h^{-1} g(y) m(t,y) dy.$$

В последнем соотношении A_h^{-1} – это псевдодифференциальный оператор с символом $\frac{p^2}{2L(-p)}$.

Если $\xi(t)$ – это стандартный винеровский процесс, то оператор A_h является тождественным оператором, а в (11) функция $m(t,y)$ совпадает с локальным временем. В случае, когда у процесса $\xi(t)$ есть ненулевая гауссовская компонента, то оператор A_h^{-1} является ограниченным оператором в $L_2(\mathbb{R})$ и справедливо соотношение

$$l(t,\cdot) = (A_h^*)^{-1} m(t,\cdot).$$

Покажем теперь, что именно такой выбор функции h является вполне естественным, так как построенная таким образом случайная функция $m(t,y)$ ”наследует” одно важное свойство локального времени винеровского процесса.

Пусть функция $f \in L_2(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям:

1) $\int_{\mathbb{R}} (1+x^2)|f(x)|dx < \infty$,

2) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 0$,

3) $\int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx = 0$.

Далее через $l(t,x)$ мы будем обозначать локальное время винеровского процесса, а через $f * l$ будем обозначать свертку функции f с функцией $l(t,\cdot)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть функция f удовлетворяет условиям $1,2,3$. Тогда функция u, определяемая формулой*

$$u(x) = -\frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} \mathbf{E} f * l(t,x), \tag{17}$$

является единственным решением уравнения $u''(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющим условию $u \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$.

Доказательство. В силу (2) имеем

$$f * l(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)l(t,y)dy = \int_0^t f(x-w(\tau))d\tau. \qquad (18)$$

Далее, пусть функция $u \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$ есть решение уравнения $u'' = f$. Используя формулу Ито, получаем

$$\mathbf{E}u(x-w(t)) - u(x) = \frac{1}{2}\,\mathbf{E}\int_0^t f(x-w(\tau))d\tau.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что величина $\mathbf{E}u(x-w(t))$ стремится к нулю при $t \to \infty$.

□

Покажем теперь, что аналогичное свойство справедливо и для произвольного процесса Леви $\xi(t)$. Через $m(t,y)$ будем обозначать случайную функцию, определяемую по процессу $\xi(t)$ формулой (12).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть функция f удовлетворяет условиям $1, 2, 3$. Тогда функция u, определяемая формулой*

$$u(x) = -\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}f * m(t,x) \qquad (19)$$

является единственным решением уравнения $u''(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющим условию $u \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$.

Доказательство. В силу (11) имеем

$$f * m(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)m(t,y)dy = \int_0^t (A_h g_x)(\xi(\tau))d\tau, \qquad (20)$$

где функция $g_x(y)$ определяется по функции f как

$$g_x(y) = f(x-y).$$

Далее, имеем

$$\widehat{g_x}(p) = e^{ipx}\widehat{f}(-p),$$

и, значит,

$$A_h g_x(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ipy}e^{ipx}\widehat{f}(-p)\frac{2L(-p)}{p^2}\,dp$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ipy} e^{-ipx} \widehat{f}(p) \frac{2L(p)}{p^2}\, dp.$$

Подставляя последнее выражение в правую часть (20), получаем

$$f * m(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_0^t e^{ip\xi(\tau)} d\tau\, e^{-ipx} \widehat{f}(p) \frac{2L(p)}{p^2}\, dp.$$

Из условий 1, 2, 3 на функцию f вытекают соотношения

$$\widehat{f}(0) = \widehat{f}\,'(0) = 0$$

и

$$\widehat{f}(p) = O(p^2) \quad \text{при} \quad p \to 0. \tag{21}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} \mathbf{E} f * m(t,x) \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_0^t \mathbf{E} e^{ip\xi(\tau)} d\tau\, e^{-ipx} \widehat{f}(p) \frac{2L(p)}{p^2}\, dp \\ &= -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_0^t e^{-\tau L(p)} d\tau\, e^{-ipx} \widehat{f}(p) \frac{L(p)}{p^2}\, dp \\ &= -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{-tL(p)}\right) e^{-ipx} \widehat{f}(p) \frac{dp}{p^2} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx} \widehat{f}(p) \frac{dp}{p^2}\,. \end{aligned}$$

Заметим, что конечность последнего интеграла следует из (21). Справедливость соотношения $u'' = f$ проверяется непосредственным дифференцированием. $\square$

Список литературы

1. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними.* Наука, М., 1958.
2. А. Н. Бородин, И. А. Ибрагимов, *Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий.* — Тр. МИАН СССР, **195** (1994), 3–286.
3. R. K. Getoor, *Another limit theorem for local time.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, **34** (1976), 1–10.

4. И. И. Гихман , А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов.* Наука, М., 1977.

Ibragimov I. A., Smorodina N. V., Faddeev M. M. An extension of local time.

In this paper we construct an analog of a local time for an arbitrary Levy process with the finite second moment. When our process is a Wiener process this object coincides with the local time.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: ibr32@pdmi.ras.ru
E-mail: smorodina@pdmi.ras.ru
E-mail: m.faddeev@spbu.ru

Поступило 29 октября 2019 г.