

М. С. Ермаков

О РАВНОМЕРНОЙ СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ. I

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – выборка независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих функцию распределения $F(x)$, $x \in [0, 1]$, $F(x) = 0$, $x < 0$, $F(x) = 1$, $x > 1$. Обозначим $\mathfrak{F}$ – множество всех функций распределения.

Нас будет интересовать задача проверки гипотезы однородности

$$\mathbb{H}_0 : F(x) = F_0(x) = x, \quad x \in [0, 1] \quad (1.1)$$

против множеств альтернатив, заданных в терминах функций распределения,

$$\mathbb{H}_n : F \in \Upsilon_n, \quad \Upsilon_n \subset \mathfrak{F} \quad (1.2)$$

или в терминах сдвинутых плотностей распределения

$$\mathbb{H}_{1n} : f \in \Psi_n, \quad f(x) = \frac{dF(x)}{dx} - 1, \quad \Psi_n \subset \mathbb{L}_2(0, 1). \quad (1.3)$$

При этом для части постановок задач мы заменим задачу проверки гипотезы о функции или плотности распределения задачей обнаружения сигнала в гауссовском белом шуме, чтобы упростить условия и техническую часть изложения работы.

Для постановок задач, указанных выше, нами будут даны необходимые и достаточные условия равномерной состоятельности множеств альтернатив для тестовых статистик:

критериев Колмогорова – Смирнова;

критериев Крамера–фон Мизеса;

критериев хи-квадрат, с растущим вместе с ростом объема выборки числом зон;

Ключевые слова: критерии согласия, состоятельность, обнаружение сигнала, критерий Крамера–фон Мизеса, критерий хи-квадрат, наибольшие множества.

Исследование поддержано грантом РФФИ 17-01-00828.

тестовых статистик, являющихся квадратичной формой оценок коэффициентов Фурье ортогонального разложения сигнала;

тестовых статистик, являющихся $\mathbb{L}_2$ – нормой ядерной оценки сигнала.

Последние четыре вышеупомянутые тестовые статистики имеют квадратичную структуру. Поэтому результаты и доказательства для них во многом совпадают. Мы приводим их в первой части работы. Результаты для критериев Колмогорова–Смирнова несколько отличны и будут даны во второй части.

Обозначим $\hat{F}_n$ – эмпирическую функцию распределения выборки.

Когда множества альтернатив заданы в терминах функций распределений, необходимые и достаточные условия равномерной состоятельности будут даны в рамках постановки задачи метода расстояний.

Вышеуказанные тестовые статистики можно рассматривать как функционалы $T_n(\hat{F}_n)$ от эмпирической функции распределения. Функционалы $T_n(F)$ рассматриваемых тестовых статистик $T_n(\hat{F}_n)$ допускают интерпретацию как метрики или семи-метрики на множестве $\mathfrak{F}$ всех функций распределения. Равномерная состоятельность тестовых статистик на множествах альтернатив

$$\Upsilon_n(T, \rho_n) = \{ F : T_n(F) > \rho_n > 0, F \in \mathfrak{F} \}$$

позволяет нам характеризовать равномерную состоятельность любой последовательности множеств альтернатив Υ_n в терминах их расстояний (квази-расстояний) $\inf_{F \in \Upsilon_n} T_n(F)$ до гипотезы.

Для последовательностей ρ_n , $\rho_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, выбранных надлежащим образом, в работах [6–8] (см. также теоремы 6.3, 4.3, 5.2) была доказана равномерная состоятельность множеств $\Upsilon_n(T_n, \rho_n)$ (даже их асимптотическая минимаксность) для тестовых статистик критериев хи-квадрат, с растущим вместе с ростом объема выборки числом зон, а также для тестовых статистик, являющихся квадратичными формами оценок коэффициентов Фурье и $\mathbb{L}_2$ -нормами ядерных оценок сигнала. В части I настоящей работы мы доказываем равномерную состоятельность множеств $\Upsilon_n(T, an^{-1/2})$, $a > 0$, для критерия Крамера-фон Мизеса.

Для задачи обнаружения сигнала в гауссовском белом шуме мы рассматриваем несколько более широкий круг задач. Эта постановка

изучается для тестовых статистик, являющихся квадратичными формами оценок коэффициентов Фурье или $\mathbb{L}_2$ - нормами ядерных оценок сигнала. Для случая выборки независимых случайных величин данные тестовые статистики будут рассматриваться в другой работе.

Задача обнаружения сигнала рассматривается в следующей постановке. Мы наблюдаем реализацию случайного процесса $Y_n(t)$, задаваемого стохастическим дифференциальным уравнением

$$dY_n(t) = f(t) dt + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} dw(t), \quad t \in [0, 1], \quad \sigma > 0, \quad (1.4)$$

где $f \in \mathbb{L}_2(0, 1)$ — неизвестный сигнал и $dw(t)$ — гауссовский белый шум.

Когда множество альтернатив непараметрическое, эта задача часто рассматривается при следующих альтернативах

$$\mathbb{H}_n : f \in V_n = \{ f : \|f\|^2 \geq \rho_n, f \in U \subset \mathbb{L}_2(0, 1) \}, \quad (1.5)$$

где $\rho_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Здесь $\|f\|$ обозначает $\mathbb{L}_2$ -норму функции f в $\mathbb{L}_2(0, 1)$ и U — некоторое выпуклое, центрально-симметричное множество.

Мы отвечаем на следующие четыре вопроса, приводимых ниже. Первый вопрос является более общим и не касается вышеупомянутых тестовых статистик.

Для каких множеств U для некоторой последовательности ρ_n , $\rho_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, существует равномерно состоятельный критерий?

Мы показываем, что необходимым и достаточным условием существования равномерно состоятельных критериев является относительная компактность множества U (см. теоремы 3.1 и 3.2). Отметим, что в непараметрическом оценивании условие относительной компактности множества является необходимым и достаточным условием существования состоятельных оценок на этом множестве [11, 14]. То же самое условие возникает и в задаче построения решения некорректных задач с детерминированной ошибкой [4]. Задача существования состоятельных критериев изучалась для различных постановок. Наиболее полную библиографию можно найти в [9].

Пусть $\rho_n = n^{-r}$, $0 < r < 1/2$, r — фиксировано. Каким наибольшим множеством может быть множество U для каждой порожденный одной из вышеупомянутых тестовых статистик, чтобы существовал равномерно состоятельный критерий?

Мы назовем такие множества U – наибольшими множествами. Точное определение наибольших множеств дано в параграфе 2. Для тестовых статистик, имеющих квадратичную структуру, мы показываем (см. теоремы 4.4, 5.1, 6.1, 7.2), что наибольшими множествами являются тела $B_{2\infty}^s(P_0)$, $P_0 > 0$ в пространстве Бесова. Здесь $r = \frac{2s}{1+4s}$ для тестовых статистик критерия хи-квадрат, а также тестовых статистик, являющихся $\mathbb{L}_2$ - нормами ядерной оценки сигнала и квадратичными формами оценок коэффициентов Фурье. Для критерия Крамера-фон Мизеса $r = \frac{s}{2+2s}$.

Равномерная состоятельность критериев хи-квадрат и критериев Крамера–фон Мизеса для вышеупомянутых тел Бесова была установлена Ингстером [12].

Понятие наибольшего множества в непараметрической проверке гипотез можно рассматривать как аналог данного понятия в непараметрическом оценивании [3, 15, 16, 20]. Несколько другой подход к определению наибольших множеств в задаче проверки непараметрических гипотез был предложен в [2].

Пусть каждое множество альтернатив Ψ_n ограничено в $\mathbb{L}_2(0, 1)$. Тогда тестовые статистики критериев Крамера - фон Мизеса, хи-квадрат, а также тестовые статистики, являющиеся квадратичными формами оценок коэффициентов Фурье и $\mathbb{L}_2$ - нормами ядерной оценки сигнала, равномерно состоятельны для множеств альтернатив Ψ_n , если и только если, они не содержат несостоятельной подпоследовательности простых альтернатив $f_n \in \Psi_n$. Иначе говоря, множества альтернатив Ψ_n равномерно состоятельны, если и только если, любая последовательность простых альтернатив $f_n \in \Psi_n$ состоятельна. Таким образом задача проверки равномерной состоятельности для множеств альтернатив сводится к задаче проверки состоятельности для произвольной последовательности простых альтернатив.

Как описать все состоятельные и несостоятельные последовательности простых альтернатив, имеющие фиксированную скорость сходимости к гипотезе?

Мы исследуем эту задачу, как задачу проверки гипотезы

$$\bar{\mathbb{H}}_0 : f(x) = 0, \quad x \in [0, 1] \quad (1.6)$$

против последовательности простых альтернатив

$$\bar{\mathbb{H}}_n : f = f_n, \quad cn^{-r} \leq \|f_n\| \leq Cn^{-r}, \quad 0 < r < 1/2, \quad (1.7)$$

где $0 < c < C < \infty$.

Для упомянутых выше тестовых статистик необходимые и достаточные условия состоятельности даны в терминах коэффициентов Фурье функций f_n (теоремы 4.1 и 4.2). В теореме 4.5 дана следующая интерпретация этих результатов:

пусть последовательность альтернатив является состоятельной. Тогда функции f_n , $cn^{-r} \leq \|f_n\| \leq Cn^{-r}$, допускают представление в виде суммы функций f_{1n} из наибольшего множества, имеющих ту же самую скорость сходимости к гипотезе, и ортогональных к ним функций $f_n - f_{1n}$.

Можно дать следующую интерпретацию этого утверждения:

любая состоятельная последовательность простых альтернатив, имеющих фиксированную скорость сходимости к гипотезе допускает представление в виде суммы функций из наибольшего множества и ортогональных более осциллирующих функций, причем функции из наибольшего множества имеют ту же самую скорость сходимости к гипотезе, что и альтернативы.

В теореме 4.6 доказывается, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать наибольшее множество и функции f_{1n} из этого наибольшего множества, такие что разность вероятностей ошибок второго рода для альтернатив f_n и f_{1n} меньше ε и при этом f_{1n} ортогонально $f_n - f_{1n}$.

Таким образом, каждая функция состоятельной последовательности простых альтернатив, имеющих фиксированную скорость сходимости к гипотезе, содержит достаточно гладкую функцию, как аддитивное слагаемое, и эта функция несет почти всю информацию о ее вероятности ошибки второго рода.

Что можно сказать о свойствах состоятельных и несостоятельных последовательностей альтернатив, имеющих фиксированную скорость сходимости к гипотезе?

В теореме 4.7 доказывается, что асимптотика вероятностей ошибок второго рода сумм двух функций из состоятельной и несостоятельной последовательностей альтернатив соответственно совпадает с асимптотикой вероятностей ошибок второго рода этой состоятельной последовательности.

Мы назовем последовательность альтернатив f_n чисто состоятельной, если не существует несостоятельной подпоследовательности альтернатив f_{2n_i} , имеющей ту же самую скорость сходимости к гипотезе, что и f_{n_i} , и такой что f_{2n_i} ортогональна $f_{n_i} - f_{2n_i}$.

В теореме 4.8 дано аналитическое задание чисто состоятельных последовательностей альтернатив в терминах концентрации их коэффициентов Фурье. Нетрудно показать, что каждая последовательность альтернатив из наибольшего множества, имеющая заданную скорость сходимости к гипотезе, чисто состоятельна.

В теореме 4.9 показано, что, для любого $\varepsilon > 0$, для любой чисто состоятельной последовательности f_n , $cn^{-r} \leq \|f_n\| \leq Cn^{-r}$, найдется наибольшее множество и некоторая последовательность f_{1n} из этого наибольшего множества, такие что $\|f_n - f_{1n}\| \leq \varepsilon n^{-r}$.

Укажем содержание работы по параграфам. В параграфе 2 приведены основные определения. Параграф 3 содержит ответ на первый вопрос. В параграфах 4 – 7 приведены вышеупомянутые результаты соответственно для тестовых статистик, являющихся квадратичными формами оценок коэффициентов Фурье, $\mathbb{L}_2$ -нормами ядерных оценок, χ^2 -критериями и критериями Крамера-фон Мизеса. Доказательство всех теорем дано в приложении.

Мы будем использовать буквы c и C , а также эти буквы с различными индексами, для обозначения различных положительных постоянных. Обозначим $\mathbf{1}_{\{A\}}$ – индикатор события A . Обозначим $[a]$ – целую часть вещественного числа a . Для любых двух последовательностей чисел a_n и b_n , $a_n \asymp b_n$ означает, что найдутся такие c и C , что $c < a_n/b_n < C$ для всех n , и $a_n = o(b_n)$ означает $a_n/b_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Для любого комплексного числа z обозначим $\bar{z}$ комплексно сопряженное число.

Обозначим

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\{-t^2/2\} dt, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

функцию стандартного нормального распределения.

Пусть ϕ_j , $1 \leq j < \infty$, ортонормированная система функций в $\mathbb{L}_2(0, 1)$. Для любого $P_0 > 0$ определим множество

$$\bar{\mathbb{B}}_{2\infty}^s(P_0) = \left\{ f : f = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j \phi_j, \sup_{\lambda > 0} \lambda^{2s} \sum_{j > \lambda} \theta_j^2 \leq P_0, \theta_j \in \mathbb{R}^1 \right\}. \quad (1.8)$$

При определенных ограничениях на базис ϕ_j , $1 \leq j < \infty$, функциональное пространство

$$\bar{\mathbb{B}}_{2\infty}^s = \left\{ f : f = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j \phi_j, \sup_{\lambda>0} \lambda^{2s} \sum_{j>\lambda} \theta_j^2 < \infty, \theta_j \in \mathbb{R}^1 \right\}$$

является пространством Бесова $\mathbb{B}_{2\infty}^s$ (см. [20]). В частности, $\bar{\mathbb{B}}_{2\infty}^s$ является пространством Бесова, если ϕ_j , $1 \leq j < \infty$, – тригонометрический базис.

Если $\phi_j(x) = \exp\{2\pi i j x\}$, $x \in (0, 1)$, $j = 0, \pm 1, \dots$, обозначим

$$\mathbb{B}_{2\infty}^s(P_0) = \left\{ f : f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \theta_j \phi_j, \sup_{\lambda>0} \lambda^{2s} \sum_{|j|>\lambda} |\theta_j|^2 \leq P_0 \right\}.$$

Поскольку функции ϕ_j здесь комплексные, то и θ_j – комплексные числа и $\theta_j = \bar{\theta}_{-j}$ для всех $-\infty < j < \infty$.

Для этого же базиса обозначим

$$\tilde{\mathbb{B}}_{2\infty}^s(P_0) = \left\{ f : f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \theta_j \phi_j, f \in \mathbb{B}_{2\infty}^s(P_0), \theta_0 = 0 \right\}.$$

Шары в классах Никольского

$$\int (f^{(l)}(x+t) - f^{(l)}(x))^2 dx \leq L|t|^{2(s-l)}, \quad \|f\| < C,$$

где $l = [s]$, являются шарами в $\mathbb{B}_{2\infty}^s$.

§2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

2.1. Состоятельность и n^{-r} -состоятельность. Для критерия K_n обозначим $\alpha(K_n)$ – его вероятность ошибки первого рода и $\beta(K_n, f)$ – его вероятность ошибки второго рода для альтернативы $f \in \mathbb{L}_2(0, 1)$. Аналогичное обозначение $\beta(K_n, F)$ будем использовать, когда альтернативой является функция распределения F .

Определения состоятельности будут несколько отличаться в различных параграфах. В параграфе 3 исследуется вопрос необходимых ограничений на множество альтернатив для существования равномерно состоятельных критериев в классе всех возможных критериев. В параграфе 4 состоятельность изучается для заданной последовательности статистик T_n , являющихся квадратичными формами оценок коэффициентов Фурье. Тестовые статистики, порожденные ядерными

оценками, и тестовые статистики критериев хи - квадрат рассматриваются как состоятельные сразу для целого диапазона окон различной ширины и числа ячеек соответственно.

Ниже дано определение состоятельности для постановок задач параграфов 4 и 7. Для параграфов 5 и 6 оно будет отлично в указанном выше смысле.

Мы скажем, что последовательность альтернатив f_n – *состоятельна*, если для любого α , $0 < \alpha < 1$, для последовательности критериев $K_n = \mathbf{1}_{\{T_n > x_\alpha\}}$, $\alpha(K_n) = \alpha(1 + o(1))$, порожденных тестовой статистикой T_n , имеет место

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta(K_n, f_n) < 1 - \alpha. \quad (2.1)$$

Если $cn^{-r} < \|f_n\| < Cn^{-r}$ дополнительно, то скажем, что последовательность альтернатив $f_n - n^{-r}$ – *состоятельна* (см. [23]).

Скажем, что последовательность альтернатив f_n – *несостоятельна*, если для каждой последовательности критериев K_n , порожденных тестовой статистикой T_n , имеет место

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\alpha(K_n) + \beta(K_n, f_n)) \geq 1. \quad (2.2)$$

Если $cn^{-r} < \|f_n\| < Cn^{-r}$ дополнительно, то скажем, что последовательность альтернатив $f_n - n^{-r}$ – *несостоятельна*.

Предположим, что мы рассматриваем задачу проверки гипотезы $\mathbb{H}_0 : f = 0$ против альтернатив

$$\mathbb{H}_n : f \in \Psi_n, \quad (2.3)$$

где Ψ_n ограниченные подмножества в $\mathbb{L}_2(0, 1)$.

Для критериев K_n , $\alpha(K_n) = \alpha + o(1)$, $0 < \alpha < 1$, порожденных тестовыми статистиками T_n , обозначим $\beta(K_n, \Psi_n) = \sup_{f \in \Psi_n} \beta(K_n, f)$.

Скажем, что множества альтернатив Ψ_n – *равномерно состоятельны*, если

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta(K_n, \Psi_n) < 1 - \alpha. \quad (2.4)$$

Пусть множества Ψ_n ограничены в $\mathbb{L}_2(0, 1)$. Тогда множества альтернатив Ψ_n – *равномерно состоятельны*, если и только если, множества Ψ_n не содержат несостоятельной подпоследовательности простых альтернатив $f_n \in \Psi_n$. Это легко следует из того, что вероятности ошибок второго рода $\beta(K_n, f) = \mathbf{E}_f(1 - K_n)$ можно рассматривать как значения ограниченного линейного функционала в $\mathbb{L}_2(0, 1)$. Здесь $\mathbf{E}_f(1 - K_n)$

обозначает математическое ожидание относительно вероятностной меры, соответствующей f .

2.2. Чисто состоятельные последовательности. Скажем, что n^{-r} – состоятельная последовательность альтернатив f_n – *чисто n^{-r} -состоятельна*, если не существует несостоятельной подпоследовательности f_{2n_i} , такой что f_{2n_i} ортогональна $f_{n_i} - f_{2n_i}$ и $\|f_{2n_i}\| > c n_i^{-r}$.

2.3. Наибольшие множества. Пусть ϕ_j , $1 \leq j < \infty$, – ортонормированный базис в $\mathbb{L}_2(0, 1)$. Скажем, что множество U , $U \subset \mathbb{L}_2(0, 1)$, – орто - симметрично относительно базиса, если из $f = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j \phi_j \in U$ следует $\tilde{f} = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\theta}_j \phi_j \in U$ для любых $\tilde{\theta}_j = \theta_j$ или $\tilde{\theta}_j = -\theta_j$, $j = 1, 2, \dots$

Для замкнутого, выпуклого, ограниченного, центрально - симметричного множества $U \subset \mathbb{L}_2(0, 1)$ обозначим Ξ – функциональное пространство с единичным шаром U .

Для задачи обнаружения сигнала назовем замкнутое ограниченное множество $U \subset \mathbb{L}_2(0, 1)$ – *наибольшим множеством*, а функциональное пространство Ξ – *наибольшим пространством*, если

- i. множество U – выпукло,
- ii. множество U – орто-симметрично относительно ортонормированного базиса ϕ_j , $1 \leq j < \infty$,
- iii. любая подпоследовательность альтернатив $f_{n_i} \in U$, $c n_i^{-r} < \|f_{n_i}\| < C n_i^{-r}$, $n_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, состоятельна,
- iv. если $f \notin \Xi$, то в любом замкнутом, выпуклом, орто-симметричном множестве V , содержащем f , найдется несостоятельная подпоследовательность альтернатив $f_{n_i} \in V$, $c n_i^{-r} < \|f_{n_i}\| < C n_i^{-r}$, где $n_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$.

В случае задачи проверки гипотезы о плотности распределения мы сделаем дополнительное предположение: условие iv рассматривается только для функций $f = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i \phi_i$ (или $f = 1 + \sum_{|i| \geq 1} \theta_i \phi_i$), удовлетворяющих условию **D**, где

D. Найдется такое $l_0 = l_0(f)$, что, для всех $l > l_0$, функции

$$1 + \sum_{|i| > l}^{\infty} \theta_i \phi_j$$

принимают только неотрицательные значения (являются плотностями распределения).

Условие **D** позволяет анализировать хвосты $f_{n_l} = \sum_{|i| \geq l} \theta_i \phi_i$ ортогонального разложения f при доказательстве *iv*. Отметим, что в наших постановках задачи все функции ϕ_j , $j \neq 0$, ортогональны функции тождественно равной единице.

Легко видеть, что если U наибольшее множество, то γU , $0 < \gamma < \infty$, также является наибольшим множеством.

Одновременное предположение выпуклости и орто-симметрии множества U кажется довольно ограничительным. Оно означает, что если $f \in U$, $f = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i \phi_i$, то любая $f_{\eta} \in U$ для $f_{\eta} = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \phi_i$, $|\eta_i| < |\theta_i|$, $1 \leq i < \infty$.

Тестовые статистики, являющиеся $\mathbb{L}_2$ - нормами ядерных оценок, и тестовые статистики критериев Крамера – фон Мизеса допускают представление в виде линейных комбинаций квадратов оценок коэффициентов Фурье. Следовательно, для этих тестовых статистик состоятельность последовательности альтернатив f_n означает состоятельность любой последовательности функций $\tilde{f}_n$, орто-симметричных относительно f_n . Более того вероятности ошибок второго рода последовательностей f_n и $\tilde{f}_n$ имеют ту же самую асимптотику. Таким образом *ii*. кажется естественным предположением для тестовых статистик, допускающих представление в виде квадратичной формы оценок коэффициентов Фурье. Для критериев хи-квадрат из теоремы 6.1, приведенной ниже, следует, что тестовые статистики обладают аналогичным свойством.

2.4. Другой подход к определению наибольших множеств.

Предположение об орто-симметрии множества U не позволяет называть наибольшим множеством любое множество W , порожденное эквивалентной нормой в Ξ . В определении наибольшего множества, приведенном ниже, мы не делаем такого предположения.

Пусть $\Xi, \Xi \subset \mathbb{L}_2(0, 1)$, – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_\Xi$. Обозначим $U = \{f : \|f\|_\Xi \leq 1, f \in \Xi\}$ – шар в Ξ .

Определим подпространства Π_k , $1 \leq k < \infty$, по индукции.

Обозначим $d_1 = \max\{\|f\| : f \in U\}$ и обозначим e_1 функцию $e_1 \in U$, такую что $\|e_1\| = d_1$. Обозначим Π_1 – линейное подпространство, порожденное вектором e_1 .

Для $i = 2, 3, \dots$, обозначим $d_i = \max\{\rho(f, \Pi_{i-1}) : f \in U\}$, где $\rho(f, \Pi_{i-1}) = \min\{\|f - g\| : g \in \Pi_{i-1}\}$. Зададим функцию e_i , $e_i \in U$, такую что $\rho(e_i, \Pi_{i-1}) = d_i$. Обозначим Π_i – линейное подпространство, порожденное функциями $e_1, \dots, e_i$.

Для любой функции $f \in \mathbb{L}_2(0, 1)$ обозначим f_{Π_i} проекцию функции f на подпространство Π_i и положим $\tilde{f}_i = f - f_{\Pi_i}$.

Таким образом мы сопоставили каждой функции $f \in \mathbb{L}_2(0, 1)$ последовательность функций $\tilde{f}_i$, $\tilde{f}_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$.

Для постановки задачи обнаружения сигнала наибольшее множество и наибольшее пространство определяются следующим образом.

Шар U является *наибольшим множеством* для тестовой статистики T_n и функциональное пространство Ξ является *наибольшим пространством*, если выполнены следующие два утверждения:

i. любая подпоследовательность альтернатив

$$f_{n_j} \in U, \quad cn_j^{-r} < \|f_{n_j}\| < Cn_j^{-r}, \quad n_j \rightarrow \infty$$

при $j \rightarrow \infty$, является состоятельной;

ii. для любого $f \in \mathbb{L}_2(0, 1)$, $f \notin \Xi$, найдутся последовательности i_n , j_{i_n} , $i_n \rightarrow \infty$, $j_{i_n} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, такие что $cj_{i_n}^{-r} < \|\tilde{f}_{i_n}\| < Cj_{i_n}^{-r}$ и подпоследовательность альтернатив $\tilde{f}_{i_n}$ несостоятельна для подпоследовательности выборок $X_1, \dots, X_{j_{i_n}}$.

Для задачи проверки гипотезы о плотности распределения ii. проверяется только для тех функций f , для которых $1 + \tilde{f}_i$ являются плотностями для всех $i > i_0$.

Доказательства теорем будет дано для определения наибольших множеств этого подраздела. Однако они справедливы и для определения подраздела 2.3. Базис ϕ_j , $1 \leq j < \infty$, в подразделе 2.3 совпадает в этих рассуждениях с функциями e_j .

§3. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ

В этом параграфе рассматривается задача обнаружения сигнала в гауссовском белом шуме.

Используя ортонормированную систему функций ϕ_j , $1 \leq j < \infty$, мы можем задать стохастическое дифференциальное уравнение (1.4) в следующем виде

$$y_j = \theta_j + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \xi_j, \quad 1 \leq j < \infty, \quad (3.1)$$

где

$$y_j = \int_0^1 \phi_j dY_n(t), \quad \xi_j = \int_0^1 \phi_j dw(t) \quad \text{и} \quad \theta_j = \int_0^1 f \phi_j dt.$$

Обозначим $\mathbf{y} = \{y_j\}_{j=1}^\infty$ и $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_j\}_{j=1}^\infty$.

Мы можем рассматривать $\boldsymbol{\theta}$ как вектор в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ с нормой $\|\boldsymbol{\theta}\| = \left(\sum_{j=1}^\infty \theta_j^2 \right)^{1/2}$. В дальнейшем мы будем использовать одно и тоже обозначение нормы $\|\cdot\|$ в $\mathbb{L}_2$ и в $\mathbb{H}$. Смысл этого обозначения всегда будет ясен из контекста.

В данных обозначениях задача обнаружения сигнала может быть представлена в следующем виде. Надо проверить гипотезу $\mathbb{H}_0 : \boldsymbol{\theta} = 0$ против альтернатив $\mathbb{H}_{1n} : \boldsymbol{\theta} \in V_n = \{\boldsymbol{\theta} : \|\boldsymbol{\theta}\| \geq \rho_n, \boldsymbol{\theta} \in U, U \subset \mathbb{H}\}$.

Напомним, что множество U называется центрально-симметричным, если из $\boldsymbol{\theta} \in U$ следует, что $-\boldsymbol{\theta} \in U$.

Скажем, что для последовательности альтернатив $\mathbb{H}_{1n}$ найдется последовательность равномерно состоятельных критериев, если существует последовательность критериев K_n , такая что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\alpha(K_n) + \beta(K_n, V_n)) < 1. \quad (3.2)$$

Теорема 3.1. *Предположим, что множество U ограничено, выпукло и центрально-симметрично. Тогда найдется последовательность ρ_n , $\rho_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, такая что для множеств V_n существует равномерно состоятельная последовательность критериев, если и только если, множество U относительно компактно.*

Если множество U относительно компактно, то существует состоятельная оценка [11, 14]. Следовательно мы можем взять $\mathbb{L}_2$ -норму

состоятельной оценки в качестве равномерно состоятельной тестовой статистики.

Аналогичное утверждение справедливо для задачи обнаружения сигнала в линейных некорректных обратных задачах.

Пусть в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ мы наблюдаем реализацию гауссовского случайного вектора

$$\mathbf{y} = A\boldsymbol{\theta} + \varepsilon \boldsymbol{\xi}, \quad \varepsilon > 0, \quad (3.3)$$

где линейный оператор $A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ известен и $\boldsymbol{\xi}$ – гауссовский случайный вектор с известным ковариационным оператором $R : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ и $\mathbf{E}[\boldsymbol{\xi}] = 0$.

Стоит задача проверки гипотезы $\mathbb{H}_0 : \boldsymbol{\theta} = 0$ против альтернатив $\mathbb{H}_n : \boldsymbol{\theta} \in V_n$.

Для оператора $S : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ обозначим $\mathfrak{R}(S)$ его область значений.

Теорема 3.2. *Предположим, что оператор $R^{-1/2}A$ ограничен. Предположим, что ядра операторов A и R нулевые и $\mathfrak{R}(A) \subseteq \mathfrak{R}(R^{1/2})$. Предположим, что множество U ограничено, выпукло и центрально-симметрично. Тогда справедливо утверждение теоремы 3.1.*

Замечание 3.1. В определении равномерной состоятельности (3.2) можно заменить требованием существования последовательности критериев K_n , таких что $\alpha(K_n) \rightarrow 0$ и $\beta(K_n, V_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. По теореме об экспоненциальном убывании вероятностей ошибок первого и второго рода [18, 22] теоремы 3.1 и 3.2 останутся справедливыми и для такой постановки задачи.

§4. ТЕСТОВЫЕ СТАТИСТИКИ, ЯВЛЯЮЩИЕСЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМОЙ ОЦЕНОК КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

4.1. Общая постановка задачи. Мы рассматриваем задачу обнаружения сигнала в гауссовском белом шуме (1.4), (1.7). Она исследуется на основе ортогонального разложения сигнала на коэффициенты Фурье (3.1).

Если множество U – компактный эллипсоид в $\mathbb{L}_2(0, 1)$, асимптотически минимаксными критериями для множеств альтернатив V_n являются критерии, порожденные тестовыми статистиками

$$T_n(Y_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^2 y_j^2 - \sigma^2 n^{-1} \rho_n^2$$

с коэффициентами κ_{nj}^2 , определенными специальным образом [5].

Здесь $\rho_n^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^2$.

Если коэффициенты κ_{nj}^2 удовлетворяют некоторым условиям регулярности, то критерии асимптотически минимаксны (см. [8]) для более широких множеств альтернатив

$$\mathbb{H}_n : f \in \Psi_n(T_n, c) = \{ f : R_n(f) > c, f \in \mathbb{L}_2(0, 1) \},$$

где

$$R_n(f) = A_n(\theta) = \sigma^{-4} n^2 \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \theta_j^2$$

для $f = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j \phi_j$.

Последовательность критериев $L_n, \alpha(L_n) = \alpha(1 + o(1)), 0 < \alpha < 1$, называется *асимптотически минимаксной*, если для любой последовательности критериев $K_n, \alpha(K_n) \leq \alpha$, для любого $c > 0$ имеет место

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\beta(K_n, \Psi_n(T_n, c)) - \beta(L_n, \Psi_n(T_n, c))) \geq 0.$$

Последовательность тестовых статистик T_n называется асимптотически минимаксной, если асимптотически минимаксны, порожденные этими тестовыми статистиками, критерии.

Сделаем следующие предположения.

A1. Для каждого n последовательность κ_{nj}^2 убывающая.

A2. Найдутся положительные постоянные C_1, C_2 , такие что для каждого n имеет место:

$$C_1 < A_n = \sigma^{-4} n^2 \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^4 < C_2. \quad (4.1)$$

A3. Найдутся положительные постоянные c_1 и c_2 , такие что $c_1 n^{-2r} \leq \rho_n^2 \leq c_2 n^{-2r}$.

Обозначим $\kappa_n^2 = \kappa_{nk_n}^2$, где $k_n = \sup \left\{ k : \sum_{j < k} \kappa_{nj}^2 \leq \frac{1}{2} \rho_n^2 \right\}$.

A4. Существуют такие C_1 и $\lambda > 1$, что для любого $\delta > 0$ и для каждого n для $n(\delta) = [(1 + \delta)k_n]$ имеет место $\kappa_{n, n(\delta)}^2 < C_1(1 + \delta)^{-\lambda} \kappa_n^2$.

A5. Имеет место $\kappa_{n1}^2 \asymp \kappa_n^2$ при $n \rightarrow \infty$. Для любого $c > 1$ найдется такое C , что $\kappa_{n, [ck_n]}^2 \geq C \kappa_n^2$ для всех n .

Пример. Пусть

$$\kappa_{nj}^2 = n^{-\lambda} \frac{1}{j^\gamma + cn^\beta}, \quad \gamma > 1,$$

где $\lambda = 2 - 2r - \beta$ и $\beta = (2 - 4r)\gamma$. Тогда А1 – А5 выполнено.

Заметим, что из А1-А5 следует

$$\kappa_n^4 \asymp n^{-2} k_n^{-1} \quad \text{и} \quad k_n \asymp n^{2-4r} \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.2)$$

Теоремы 4.1–4.10, приведенные ниже, являются реализацией программы, анонсированной во введении.

4.2. Аналитический вид необходимых и достаточных условий состоятельности. Результаты приведены в терминах коэффициентов Фурье функций $f_n = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{nj} \phi_j$.

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия А1-А5. Последовательность альтернатив f_n , $cn^{-r} \leq \|f_n\| \leq Cn^{-r}$, – состоятельна, если и только если, найдутся c_1 , c_2 и n_0 , такие что имеет место

$$\sum_{|j| < c_2 k_n} |\theta_{nj}|^2 > c_1 n^{-2r} \quad (4.3)$$

для всех $n > n_0$.

Аналоги теоремы 4.1 и теорем 4.2, 4.8, приведенных ниже, справедливы и для постановок задач других параграфов. В постановках задач этих параграфов индексы j могут принимать отрицательные значения и θ_{nj} могут быть комплексными числами. По этой причине мы пишем $|j|$ вместо j и $|\theta_{nj}|$ вместо θ_{nj} в (4.3), (4.4) и (4.9).

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия А1-А5. Последовательность альтернатив f_n , $cn^{-r} \leq \|f_n\| \leq Cn^{-r}$, – несостоятельна, если и только если, для любого c_2 имеет место

$$\sum_{|j| < c_2 k_n} |\theta_{nj}|^2 = o(n^{-2r}) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

Доказательство теорем базируется на теореме 4.3 об асимптотической минимаксности тестовых статистик T_n . Аналог этой теоремы для задачи проверки гипотезы о функции распределения задает необходимые и достаточные условия состоятельности множеств альтернатив, определенных в терминах функций распределения.

Определим последовательность критериев

$$K_n(Y_n) = \mathbf{1}_{\{n^{-1}T_n(Y_n) > (2A_n)^{1/2}x_\alpha\}},$$

$0 < \alpha < 1$, где x_α задается уравнением $\alpha = 1 - \Phi(x_\alpha)$.

Теорема 4.3. Пусть выполнены условия A1-A5. Тогда последовательность критериев $K_n(Y_n)$ асимптотически минимаксна для множеств альтернатив $\Psi_n(T_n, c)$. Имеет место $\alpha(K_n) = \alpha + o(1)$ и, при любом выборе C ,

$$\beta(K_n, f_n) = \Phi(x_\alpha - R_n(f_n)(2A_n)^{-1/2})(1 + o(1)) \quad (4.5)$$

равномерно относительно всех последовательностей f_n таких, что $R_n(f_n) < C$.

Вариант теоремы 4.3 для задачи обнаружения сигнала в гауссовском цветном шуме был доказан в [7].

В теоремах 4.1 и 4.2 такая аналитическая форма условий может быть объяснена тем, что в задании T_n and $A_n(\theta_n)$ значения коэффициентов κ_{nj}^2 , существенно отличные от нуля, сконцентрированы в зоне значений $j = O(k_n)$.

4.3. Наибольшие множества. Качественная структура состоятельных последовательностей альтернатив. Обозначим $s = \frac{r}{2-4r}$. Тогда $r = \frac{2s}{1+4s}$.

Теорема 4.4. Пусть выполнены условия A1-A5. Тогда шары $\mathbb{B}_{2\infty}^s(P_0)$, $P_0 > 0$, являются наибольшими множествами для тестовых статистик $T_n(Y_n)$.

Для множеств $\mathbb{B}_{2\infty}^s(P_0)$, с удаленным малым $\mathbb{L}_2$ -шаром, асимптотически минимаксные тестовые статистики были найдены в [10]. Для тел в пространстве Бесова $\mathbb{B}_{2\infty}^s$, определенных в терминах всплесков, аналогичные результаты были получены в [13].

Теорема 4.5. Пусть выполнены условия A1-A5. Тогда последовательность альтернатив f_n , $cn^{-r} \leq \|f_n\| \leq Cn^{-r}$, состоятельна, если и только если, найдется наибольшее множество U и последовательность $f_{1n} \in U$, $c_1 n^{-r} \leq \|f_{1n}\| \leq C_1 n^{-r}$, такие что f_{1n} ортогональна $f_n - f_{1n}$, т.е. имеет место

$$\|f_n\|^2 = \|f_{1n}\|^2 + \|f_n - f_{1n}\|^2. \quad (4.6)$$

Теорема 4.6. Пусть выполнены условия A1-A5. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, для любой состоятельной последовательности альтернатив f_n , $c n^{-r} \leq \|f_n\| \leq C n^{-r}$, найдутся такие наибольшее множество $\mathbb{B}_{2\infty}^s(P_0)$ и последовательность функций f_{1n} , $c_1 n^{-r} \leq \|f_{1n}\| \leq C_1 n^{-r}$, принадлежащих наибольшему множеству $\mathbb{B}_{2\infty}^s(P_0)$, что имеет место:

$$f_{1n} \text{ ортогональна } f_n - f_{1n},$$

при любом α , $0 < \alpha < 1$, для критериев K_n , $\alpha(K_n) = \alpha(1 + o(1))$ при $n \rightarrow \infty$, выполняются оценки:

$$|\beta(K_n, f_n) - \beta(K_n, f_{1n})| \leq \varepsilon, \quad (4.7)$$

$$\beta(K_n, f_n - f_{1n}) \geq 1 - \alpha - \varepsilon. \quad (4.8)$$

Если $f_n = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{nj} \phi_j$ удовлетворяют $c_1 n^{-r} \leq \|f_n\| \leq C_1 n^{-r}$, то для любого c найдется P_0 такое, что $f_{1n} = \sum_{j=1}^{[ck_n]} \theta_{nj} \phi_j \in \mathbb{B}_{2\infty}^s(P_0)$ (см. лемма A.3). Так как коэффициенты κ_{nj}^2 , $j > ck_n$, сравнительно малы при достаточно больших c , это позволяет доказать теоремы 4.5 и 4.6.

4.4. Взаимодействие состоятельных и несостоятельных последовательностей альтернатив. Чисто состоятельные последовательности.

Теорема 4.7. Пусть выполнены условия A1-A5. Пусть последовательность альтернатив f_n состоятельна. Тогда для любой несостоятельной последовательности альтернатив f_{1n} , для критериев K_n , $\alpha(K_n) = \alpha(1 + o(1))$, $0 < \alpha < 1$, порожденных тестовой статистикой T_n , имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta(K_n, f_n) - \beta(K_n, f_n + f_{1n})) = 0.$$

Теорема 4.8. Пусть выполнены условия A1-A5. Последовательность альтернатив f_n , $c n^{-r} \leq \|f_n\| \leq C n^{-r}$, чисто n^{-r} -состоятельна, если и только если, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $C_1 = C_1(\varepsilon)$, что имеет место

$$\sum_{|j| > C_1 k_n} |\theta_{nj}|^2 \leq \varepsilon n^{-2r} \quad (4.9)$$

для всех $n > n_0(\varepsilon)$.

Теорема 4.9. Пусть выполнены условия A1-A5. Тогда последовательность f_n , $cn^{-r} \leq \|f_n\| \leq Cn^{-r}$, чисто n^{-r} -состоятельна, если и только если, для любого $\varepsilon > 0$ найдется наибольшее множество $\mathbb{B}_{2\infty}^s(P_0)$ и последовательность функций $f_{1n} \in \mathbb{B}_{2\infty}^s(P_0)$, такие что $\|f_n - f_{1n}\| \leq \varepsilon n^{-r}$.

Теорема 4.10. Пусть выполнены условия A1-A5. Тогда последовательность альтернатив f_n , $cn^{-r} < \|f_n\| < Cn^{-r}$, является чисто n^{-r} -состоятельной, если и только если, для любой несостоятельной подпоследовательности альтернатив f_{1n_i} , $c_1 n_i^{-r} < \|f_{1n_i}\| < C_2 n_i^{-r}$, имеет место

$$\|f_{n_i} + f_{1n_i}\|^2 = \|f_{n_i}\|^2 + \|f_{1n_i}\|^2 + o(n_i^{-r}), \quad (4.10)$$

где $n_i \rightarrow \infty$ as $i \rightarrow \infty$.

Замечание 4.1. Пусть $\kappa_{nj}^2 > 0$ для $j \leq l_n$, и пусть $\kappa_{nj}^2 = 0$ для $j > l_n$, где $l_n \asymp n^{2-4r}$ при $n \rightarrow \infty$. Анализ доказательства теорем показывает, что теоремы 4.1–4.10 остаются справедливыми для этой постановки задачи, если условия A4 и A5 заменить на

A6. Для любого c , $0 < c < 1$, найдется c_1 , такое что $\kappa_{n,[cl_n]}^2 \geq c_1 \kappa_{n1}^2$ для всех n .

При этом во всех соответствующих доказательствах мы полагаем $\kappa_n^2 = \kappa_{n1}^2$ и $k_n = l_n$. Теоремы 4.2 и 4.8 при этом справедливы со следующими изменениями. Достаточно положить $c_2 < 1$ в теореме 4.2 и взять $C_1(\epsilon) < 1$ в теореме 4.8. Доказательство соответствующих версий теорем 4.1–4.10 аналогично и опускается.

§5. КРИТЕРИИ, ОСНОВАННЫЕ НА ЯДЕРНЫХ ОЦЕНКАХ

Мы продолжим изучение задачи (1.6), (1.7) для обнаружения сигнала в гауссовском белом шуме. Дополнительно предположим, что сигнал f принадлежит множеству $\mathbb{L}_2^{per}(\mathbb{R}^1)$ – 1-периодических функций, таких что $f(t) \in \mathbb{L}_2(0, 1)$. Это позволяет распространить нашу модель на вещественную прямую $\mathbb{R}^1$, положив $w(t+j) = w(t)$ для всех целых j и всех $t \in [0, 1)$.

Определим ядерные оценки

$$\hat{f}_n(t) = \frac{1}{h_n} \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{t-u}{h_n}\right) dY_n(u), \quad t \in (0, 1), \quad (5.1)$$

где h_n – последовательность положительных чисел, $h_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Ядро K является четной ограниченной функцией, имеющей носитель, содержащийся в интервале $[-1/2, 1/2]$, и такой, что $\int_{-\infty}^{\infty} K(t) dt = 1$.

Обозначим $K_h(t) = \frac{1}{h} K\left(\frac{t}{h}\right)$, $t \in \mathbb{R}^1$ и $h > 0$.

В (5.1) нами предполагается, что, для любого v , $0 < v < 1$,

$$\begin{aligned} \int_1^{1+v} K_{h_n}(t-u) dY_n(u) &= \int_0^v K_{h_n}(t-1-u) f(u) du \\ &+ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \int_0^v K_{h_n}(t-1-u) dw(u) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_{-v}^0 K_{h_n}(t-u) dY_n(u) &= \int_{1-v}^1 K_{h_n}(t-u+1) f(u) du \\ &+ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \int_{1-v}^1 K_{h_n}(t-u+1) dw(u). \end{aligned}$$

Определим тестовые статистики

$$T_n(Y_n) = T_{nh_n}(Y_n) = n h_n^{1/2} \sigma^{-2} \gamma^{-1} (\|\hat{f}_n\|^2 - \sigma^2 (n h_n)^{-1} \|K\|^2),$$

где

$$\gamma^2 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K(t-s) K(s) ds \right)^2 dt.$$

Назовем последовательность альтернатив f_n , $c n^{-r} \leq \|f_n\| \leq C n^{-r}$, n^{-r} -состоятельной, если существует постоянная c_1 , такая что (2.1) имеет место для любых критериев K_n , $\alpha(K_n) = \alpha(1 + o(1))$, $0 < \alpha < 1$, порожденных тестовыми статистиками T_n , имеющими ширину окон $h_n \asymp n^{4r-2}$.

Назовем последовательность альтернатив f_n , $c n^{-r} \leq \|f_n\| \leq C n^{-r}$, n^{-r} -несостоятельной, если последовательность альтернатив f_n несостоятельна для любой последовательности критериев, порожденных любой последовательностью тестовых статистик T_n , для которых $h_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Задача рассматривается в терминах оценок коэффициентов Фурье сигнала. Пусть мы наблюдаем реализацию случайного процесса $Y_n(t)$, $t \in [0, 1]$, с сигналом $f = f_n$.

Для $-\infty < j < \infty$, обозначим

$$\begin{aligned}\widehat{K}(jh) &= \int_{-1}^1 \exp\{2\pi i j t\} K_h(t) dt, \quad h > 0, \\ y_{nj} &= \int_0^1 \exp\{2\pi i j t\} dY_n(t), \\ \xi_j &= \int_0^1 \exp\{2\pi i j t\} dw(t), \\ \theta_{nj} &= \int_0^1 \exp\{2\pi i j t\} f_n(t) dt.\end{aligned}$$

В этих обозначениях мы можем задать ядерную оценку в следующем виде:

$$\widehat{\theta}_{nj} = \widehat{K}(jh_n) y_{nj} = \widehat{K}(jh_n) \theta_{nj} + \sigma n^{-1/2} \widehat{K}(jh_n) \xi_j, \quad -\infty < j < \infty. \quad (5.2)$$

Тогда тестовая статистика T_n допускает следующее представление:

$$T_n(Y_n) = nh_n^{1/2} \sigma^{-2} \gamma^{-1} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\widehat{\theta}_{nj}|^2 - n^{-1} \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\widehat{K}(jh_n)|^2 \right). \quad (5.3)$$

Если мы положим $|\widehat{K}(jh_n)|^2 = \kappa_{nj}^2$, то получим, что тестовые статистики $T_n(Y_n)$ этого параграфа и параграфа 4 почти не отличаются. Основное отличие постановки задачи параграфа 5 состоит в присутствии в модели цветного гауссовского белого шума. Другое отличие состоит в том, что $\widehat{K}(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}^1$, может иметь нули. Так как отличия незначительны, справедливы те же самые результаты.

Обозначим $k_n = [n^{2-4r}]$.

Теорема 5.1. *Утверждения теорем 4.1, 4.2, 4.4-4.10 справедливы и для этой постановки задачи с тем отличием, что $\mathbb{B}_{2\infty}^s(P_0)$ заменяется на $\mathbb{B}_{2\infty}^s(P_0)$.*

В дальнейшем формулировки теорем параграфа 4 для новых постановок задач будут называться их аналогами. Доказательство теорем базируется на следующем аналоге теоремы 4.3 (см. [7, теорему 2.1.1]).

Обозначим

$$T_{1n}(f) = T_{1n}(f, h_n) = \int_0^1 \left(\frac{1}{h_n} \int K\left(\frac{t-s}{h_n}\right) f(s) ds \right)^2 dt.$$

Для последовательности $\rho_n > 0$, определим множества

$$\Psi_{nh_n}(T_{1n}, \rho_n) = \{f : T_{1n}(f) > \rho_n, f \in \mathbb{L}_2^{per}(\mathbb{R}^1)\}.$$

Определим последовательность критериев

$$K_n = \mathbf{1}_{\{T_n(Y_n) \geq x_\alpha\}}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

где x_α задается уравнением $\alpha = 1 - \Phi(x_\alpha)$.

Теорема 5.2. Пусть $h_n^{-1/2} n^{-1} \rightarrow 0$, $h_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} n \rho_n h_n^{1/2} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} n \rho_n h_n^{1/2} < \infty.$$

Тогда последовательность критериев K_n , $\alpha(K_n) = \alpha(1 + o(1))$, $0 < \alpha < 1$, порожденных тестовыми статистиками T_n , асимптотически минимаксна на множествах альтернатив $\Psi_{nh_n}(T_{1n}, \rho_n)$. Имеет место $\alpha(L_n) = \alpha(1 + o(1))$ и, при любом C ,

$$\beta(K_n, f_n) = \Phi(x_\alpha - \gamma^{-1} \sigma^{-2} n h_n^{1/2} T_{1n}(f_n)) (1 + o(1)) \quad (5.4)$$

равномерно по последовательностям $f_n \in \mathbb{L}_2^{per}(R^1)$, таким что $n h_n^{1/2} T_{1n}(f_n) < C$.

Заметим, что

$$T_{1n}(f_n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{K}(j h_n)|^2 |\theta_{nj}|^2. \quad (5.5)$$

Доказательство теоремы 5.2 получается простой модификацией доказательства теоремы 4.3.

§6. χ^2 -КРИТЕРИИ

Мы рассматриваем задачу проверки гипотезы (1.6) и (1.7) о плотности распределения $1 + f$.

Для последовательности m_n обозначим

$$\hat{p}_{nj} = \hat{F}_n(j/m_n) - \hat{F}_n((j-1)/m_n), \quad 1 \leq j \leq m_n.$$

Тестовая статистика критерия χ^2 имеет следующий вид

$$T_n(\hat{F}_n) = n m_n \sum_{j=1}^{m_n} (\hat{p}_{nj} - 1/m_n)^2.$$

Пусть

$$f_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \theta_{nj} \phi_j, \quad \phi_j(x) = \exp\{2\pi i j x\}, \quad x \in (0, 1).$$

Скажем, что последовательность альтернатив

$$f_n, \quad c n^{-r} \leq \|f_n\| \leq C n^{-r},$$

– n^{-r} -состоятельна, если найдется положительная постоянная c_1 , такая что (2.1) имеет место для любых критериев K_n , $\alpha(K_n) = \alpha(1 + o(1))$, $0 < \alpha < 1$, порожденных последовательностью тестовых статистик T_n , имеющих число ячеек $m_n > c_1 n^{2-4r}$, $m_n \asymp n^{2-4r}$.

Скажем, что последовательность альтернатив

$$f_n, \quad c n^{-r} \leq \|f_n\| \leq C n^{-r},$$

– n^{-r} -несостоятельна, если последовательность альтернатив f_n несостоятельна для любых критериев, порожденных любой тестовой статистикой T_n , имеющей число ячеек m_n , $m_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Обозначим $k_n = \left\lceil n^{\frac{2}{1+4s}} \right\rceil \asymp n^{2-4r}$.

Отличия в аналогах теорем 4.1–4.6 и 4.8–4.10 для этой постановки задачи обусловлены только тем, что функции f_n , f_{1n} и f_{2n} должны быть плотностями распределения.

Теорема 6.1. *Утверждения теорем 4.1, 4.2 и 4.4–4.10 справедливы для этой постановки задачи со следующими отличиями.*

В аналогах теорем шары $\mathbb{B}_{2\infty}^s(P_0)$ заменяются телами $\widetilde{\mathbb{B}}_{2\infty}^s(P_0)$.

В аналоге теоремы 4.4, iv. в определении наибольших множеств справедливо для тестовых статистик T_n с произвольным выбором числа ячеек m_n , $m_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

В аналоге теоремы 4.6 мы рассматриваем только последовательности альтернатив f_n , удовлетворяющие следующему условию.

В. Существует c_0 такое, что для всех $c > c_0$ функции

$$1 + f_{cn} = 1 + \sum_{|j| > cm_n} \theta_j \phi_j \quad \text{и} \quad 1 + f_n - f_{cn} = 1 + \sum_{|j| < cm_n} \theta_j \phi_j$$

являются плотностями распределения.

Мы применяем определение чисто состоятельных последовательностей только для последовательностей f_n , удовлетворяющих В.

В теореме 6.2, приведенной ниже, мы рассматриваем определение состоятельности и несостоятельности, предложенные в разделе 2.1, когда в качестве альтернатив берутся функции распределения F_n вместо f_n , и за гипотезу берется $\mathbb{H}_0 : F(x) = F_0(x) = x, x \in [0, 1]$.

Теорема 6.2. Пусть последовательность альтернатив F_n состоятельна. Пусть F_{1n} несостоятельная последовательность альтернатив такая, что $F_{2n} = F_n(x) + F_{1n}(x) - F_0(x)$ являются функциями распределения. Тогда для критериев K_n , $\alpha(K_n) = \alpha(1 + o(1))$, $0 < \alpha < 1$, имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta(K_n, F_n) - \beta(K_n, F_{2n})) = 0.$$

Доказательство теорем базируется на следующей теореме 6.3 об асимптотической минимаксности критериев хи-квадрат, приведенной ниже. Теорема 6.3 объединяет результаты теорем 2.1 и 2.4 в [6].

Для последовательности $\rho_n > 0$ определим множества альтернатив

$$\Psi_n(T_n, \rho_n) = \left\{ F : T_n(F) \geq \rho_n, F \in \mathfrak{F} \right\}.$$

Определение асимптотической минимаксности критериев тоже самое, что и в параграфе 4.

Определим критерии $K_n = \mathbf{1}_{\{2^{-1/2} m_n^{-1/2} (T_n(\hat{F}_n) - m_n + 1) > x_\alpha\}}$, где x_α задается уравнением $\alpha = 1 - \Phi(x_\alpha)$, $0 < \alpha < 1$.

Теорема 6.3. Пусть $m_n \rightarrow \infty$, $m_n^{-1} n^2 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} m_n^{-1/2} \rho_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} m_n^{-1/2} \rho_n < \infty.$$

Тогда для χ^2 -критериев K_n имеет место $\alpha(K_n) = \alpha + o(1)$ и они асимптотически минимаксны для последовательности множеств альтернатив $\Psi_n(T_n, \rho_n)$.

При любом C имеет место

$$\beta(K_n, F_n) = \Phi(x_\alpha - 2^{-1/2} m_n^{-1/2} T_n(F_n)) (1 + o(1))$$

равномерно по всем последовательностям F_n , таким что $T_n(F_n) \leq C m_n^{1/2}$.

Заметим, что для применения теоремы 6.3 мы вынуждены сделать переход от индикаторных функций к тригонометрическим. Такой переход осуществлен в приложении.

§7. КРИТЕРИИ КРАМЕРА–ФОН МИЗЕСА

Мы рассматриваем тестовые статистики критериев Крамера–фон Мизеса как функционалы

$$T^2(\hat{F}_n - F_0) = \int_0^1 (\hat{F}_n(x) - F_0(x))^2 dF_0(x),$$

где $F_0(x) = x$, $x \in [0, 1]$.

Обозначим $K_n = K_n(X_1, \dots, X_n)$ – последовательность критериев Крамера–фон Мизеса.

Часть дальнейших результатов справедлива для постановки задачи (1.1) и (1.2), когда $\Upsilon_n = \Upsilon_n(a) \doteq \Upsilon_n(T^2, a n^{-1})$, $a > 0$.

Скажем, что последовательность критериев Крамера–фон Мизеса равномерно состоятельна (асимптотически несмещенная см. гл. 14.2 в [19]), если, для всякого $a > 0$, для любого α , $0 < \alpha < 1$, для критериев K_n , $\alpha(K_n) = \alpha + o(1)$, имеет место

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \Upsilon_n(T^2, a)} \beta_F(K_n) < 1 - \alpha. \quad (7.1)$$

Доказательство результатов базируется на следующей теореме 7.1.

Теорема 7.1. *Справедливы следующие три утверждения:*

i. для последовательности альтернатив F_n , найдется последовательность критериев Крамера–фон Мизеса K_n , такая что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha(K_n) + \beta_{F_n}(K_n)) = 0, \quad (7.2)$$

если и только если, выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n T^2(F_n - F_0) = \infty; \quad (7.3)$$

ii. критерии Крамера–фон Мизеса равномерно состоятельны;

iii. для любой последовательности критериев Крамера–фон Мизеса K_n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha(K_n) + \beta_{F_n}(K_n)) \geq 1,$$

если и только если, выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n T^2(F_n - F_0) = 0.$$

Утверждения достаточности в i. и iii. хорошо известны (см. [12]). Необходимость в i. и iii. следует из ii.

Если функция распределения F имеет плотность, мы можем представить функционал $T^2(F - F_0)$ в следующем виде (см. [21, гл. 5])

$$T^2(F - F_0) = \int_0^1 \int_0^1 (\min\{s, t\} - st) f(t) f(s) ds dt,$$

где $f(t) = d(F(t) - F_0(t))/dt$.

Если мы рассмотрим разложение функции $f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j \phi_j(t)$ по тригонометрическому базису $\phi_j(t) = \sqrt{2} \cos(\pi j t)$, $1 \leq j < \infty$, то получим

$$n T^2(F - F_0) = n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\theta_j^2}{\pi^2 j^2}. \quad (7.4)$$

Обозначим $k_n = [n^{(1-2r)/2}]$.

В теоремах 7.2 и 7.4, приведенных ниже, мы следуем определению состоятельности раздела 2.1.

Теорема 7.2. Для ортонормированной системы функций $\phi_j(t) = \sqrt{2} \cos(\pi j t)$, $t \in [0, 1]$, $j = 1, 2, \dots$, тела $\mathbb{B}_{2\infty}^s(P_0)$, где $s = \frac{2r}{1-2r}$, $r = \frac{s}{2+2s}$, являются наибольшими множествами для тестовой статистики критериев Крамера–фон Мизеса.

В теореме 7.3, приведенной ниже, мы рассматриваем определение состоятельности, предложенное в разделе 2.1 для функций распределения F_n вместо функций f_n .

Теорема 7.3. Утверждение теоремы 6.2 справедливо для критериев Крамера–фон Мизеса.

В предыдущих секциях функционалы T_n зависели от n . Здесь мы имеем только один функционал T для всех n и различных значений r ,

$0 < r < 1/2$. Чтобы разделить изучение последовательностей альтернатив для различных r , мы будем рассматривать для фиксированного r только последовательности альтернатив, удовлетворяющие G1.

G1. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется c_3 , такое что

$$n \sum_{|j| < c_3 k_n} \theta_{nj}^2 j^{-2} < \varepsilon$$

для всех $n > n_0(\varepsilon, c_3)$.

Если G1 не имеет место для любой последовательности $c_n \rightarrow 0$, $c_n k_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и функции $1 + \bar{f}_n = 1 + \sum_{j < c_n k_n} \theta_{nj} \phi_j$ явля-

ются плотностями распределения, то (2.1) имеет место для некоторой последовательности функций $\bar{f}_n$, $\|\bar{f}_n\| = o(n^{-r})$. Таким образом состоятельность в этом случае может изучаться в рамках более быстрой скорости сходимости последовательности альтернатив к гипотезе.

Теорема 7.4. Пусть последовательность альтернатив f_n удовлетворяет G1. Тогда для последовательности f_n справедливы утверждения теорем 4.1, 4.2, 4.5, 4.6 и 4.8–4.10 со следующими изменениями: в аналоге теоремы 4.6 предполагается, что В имеет место, и определение чистой состоятельности рассматривается только для последовательностей f_n , удовлетворяющих В.

ПРИЛОЖЕНИЕ §А. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

А.1. Доказательство теорем §3. Для любых векторов $\theta_1 \in \mathbb{H}$ и $\theta_2 \in \mathbb{H}$ зададим отрезок $\text{int}(\theta_1, \theta_2) = \{\theta : \theta = (1 - \lambda)\theta_1 + \lambda\theta_2, \lambda \in [0, 1]\}$.

Лемма А.1. Для любых векторов $\theta_1 \in U$ и $\theta_2 \in U$ имеет место $\text{int}\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \subset U$. Также справедливо $0 \in \text{int}\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)$ и отрезок $\text{int}\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)$ параллелен отрезку $\text{int}(\theta_1, \theta_2)$.

Замечание 3.1. Пусть $\text{int}(\theta_1, \theta_2) \subset U$. Пусть η и $-\eta$ точки пересечения прямой $L = \{\theta : \theta = \lambda(\theta_1 - \theta_2), \lambda \in \mathbb{R}^1\}$ и границы множества U . Тогда, по лемме А.1 получаем $\|\theta_1 - \theta_2\| \leq 2\|\eta\|$.

Доказательство леммы А.1. Заметим, что отрезки $\text{int}(\theta_1, \theta_2) \subset U$ и $\text{int}(-\theta_1, -\theta_2) \subset U$ параллельны. Для каждого $\lambda \in [0, 1]$ справедливо $(1 - \lambda)\theta_1 + \lambda\theta_2 \in \text{int}(\theta_1, \theta_2)$ и $-\lambda\theta_1 - (1 - \lambda)\theta_2 \in \text{int}(-\theta_1, -\theta_2)$. Середина $\theta_\lambda = ((1 - 2\lambda)\theta_1 - (1 - 2\lambda)\theta_2)/2$ отрезка $\text{int}((1 - \lambda)\theta_1 +$

$\lambda \theta_2, -\lambda \theta_1 - (1 - \lambda) \theta_2) \subset U$ принадлежит отрезку $\text{int}\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)$, и для каждой точки θ отрезка $\text{int}\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)$ найдется $\lambda \in [0, 1]$ такая, что $\theta = \theta_\lambda$. Следовательно $\text{int}\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \subset U$. $\square$

Доказательство теоремы 3.1. Без потери общности, мы можем предположить, что множество U замкнуто. Определим последовательность ортогональных векторов e_i по индукции.

Определим вектор e_1 , $e_1 \in U$, такой что $\|e_1\| = \sup\{\|\theta\| : \theta \in U\}$. Обозначим Π_1 – линейное подпространство порожденное e_1 . Обозначим Γ_1 – линейное подпространство ортогональное Π_1 .

Определим вектор $e_i \in U \cap \Gamma_{i-1}$, такой что $\|e_i\| = \sup\{\|\theta\| : \theta \in U \cap \Gamma_{i-1}\}$. Обозначим Π_i – линейное подпространство, порожденное векторами $e_1, \dots, e_i$. Обозначим Γ_i – линейное подпространство ортогональное Π_i .

Для всех натуральных чисел i обозначим $d_i = \|e_i\|$. Заметим, что $d_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Иначе по теореме 5.3 в [9] не существует равномерно состоятельных критериев для задачи проверки гипотезы $\mathbb{H}_0 : \theta = 0$ против альтернативы $\mathbb{H}_1 : \theta = e_i$, $i = 1, 2, \dots$.

Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ обозначим $l_\varepsilon = \min\{j : d_j < \varepsilon, j = 1, 2, \dots\}$.

Обозначим $B_r(\theta)$ – шар, имеющий радиус r и центр θ .

Достаточно показать, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует конечное покрытие множества U шарами $B_{\varepsilon_1}(\theta)$.

Положим $\varepsilon = \varepsilon_1/9$.

Обозначим U_ε проекцию множества U на подпространство Π_{l_ε} .

Обозначим $\tilde{B}_r(\theta)$ – шар в Π_{l_ε} , имеющий радиус r и центр $\theta \in \Pi_{l_\varepsilon}$. Существует шар $\tilde{B}_{\delta_1}(0)$, такой что $\tilde{B}_{\delta_1}(0) \subset U$. Обозначим $\delta = \min\{\varepsilon, \delta_1\}$.

Пусть $\theta_1, \dots, \theta_k$ является δ -сетью в U_ε .

Пусть $\eta_1, \dots, \eta_k$ – точки в U , такие что θ_i является проекцией η_i на подпространство Π_{l_ε} для $1 \leq i \leq k$.

Покажем, что $B_{\varepsilon_1}(\eta_1), \dots, B_{\varepsilon_1}(\eta_k)$ является покрытием множества U .

Пусть $\eta \in U$, и пусть θ проекция η на Π_{l_ε} . Найдется i , $1 \leq i \leq k$, такое что $\|\theta_i - \theta\| \leq \delta$. Достаточно показать $\eta \in B_{\varepsilon_1}(\eta_i)$.

По лемме А.1, $\text{int}\left(\frac{\eta_i - \eta}{2}, \frac{\eta - \eta_i}{2}\right) \subset U$. Так как $\theta_i - \theta \in \Pi_{l_\varepsilon}$ и $\theta_i - \theta \in \tilde{B}_\delta(0)$, то $(\theta_i - \theta)/2 \in U$. Так как множество U центрально - симметрично и выпукло, то $\frac{1}{2}((\eta_i - \eta)/2) - \frac{1}{2}((\theta_i - \theta)/2) \in U$. Заметим, что

вектор $(\boldsymbol{\eta}_i - \boldsymbol{\theta}_i) - (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\theta})$ ортогонален подпространству Π_{l_ε} . Следовательно, $\|((\boldsymbol{\eta}_i - \boldsymbol{\theta}_i) - (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\theta}))/4\| \leq 2\varepsilon$. Отсюда получаем $\|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_i\| \leq 8\varepsilon + \|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_i\| < 9\varepsilon$. Это означает $\boldsymbol{\eta} \in B_{\varepsilon_1}(\boldsymbol{\eta}_i)$. $\square$

Доказательство теоремы 3.2. Доказательство теоремы 3.1 базируется на теореме 5.3 в [9]. Для линейных обратных некорректно-поставленных задач (3.3), теорема 5.5 в [9] аналогична теореме 5.3 в [9]. Таким образом, в доказательстве теоремы 3.2 достаточно применить теорему 5.5 в [9] вместо теоремы 5.3 в [9]. $\square$

А.2. Доказательство теорем параграфа 4.

Доказательство теоремы 4.3. Теорема 4.3 и ее версия для постановки задачи замечания 4.1 легко выводятся из теоремы 1 в [5].

Нижняя граница является прямым следствием теоремы 1 в [5].

Верхняя граница получается на основе следующих рассуждений.

Мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^2 y_j^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \theta_{nj}^2 + 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \theta_{nj} \xi_j + \frac{\sigma^2}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \xi_j^2 \\ &= n^{-2} A_n(\boldsymbol{\theta}_n) + 2 J_{1n} + J_{2n}, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

где

$$\mathbf{E}[J_{2n}] = \frac{\sigma^2}{n} \rho_n, \quad \mathbf{Var}[J_{2n}] = 2 \frac{\sigma^4}{n^4} A_n \quad (\text{A.2})$$

и

$$\mathbf{Var}[J_{1n}] = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^4 \theta_{nj}^2 \leq \frac{\sigma^2 \kappa_n^2}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \theta_{nj}^2 = o(n^{-4} A_n(\boldsymbol{\theta}_n)). \quad (\text{A.3})$$

Применяя неравенство Чебышева, из (A.1)–(A.3) получаем, что если $A_n = o(A_n(\boldsymbol{\theta}_n))$ при $n \rightarrow \infty$, то $\beta(L_n, f_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, достаточно рассмотреть случай

$$A_n \asymp A_n(\boldsymbol{\theta}_n) = n^2 \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \theta_{nj}^2. \quad (\text{A.4})$$

Если имеет место (A.4), то, применяя методы доказательства леммы 1 в [5], получаем (4.5). $\square$

Доказательство теоремы 4.1. Пусть (4.3) имеет место. Тогда, в силу условия A5 и (4.2), имеем

$$A_n(\theta_n) = n^2 \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \theta_{nj}^2 \geq C n^2 \kappa_n^2 \sum_{j=1}^{c_2 k_n} \theta_{nj}^2 \asymp n^2 \kappa_n^2 n^{-2r} \asymp 1.$$

По теореме 4.3 это влечет достаточность.

Необходимость следует из достаточности в теореме 4.2. $\square$

Доказательство теоремы 4.2. Пусть (4.4) имеет место. Тогда, применяя (4.2) и A2, имеем

$$\begin{aligned} A_n(\theta_n) &\leq C n^2 \kappa_n^2 \sum_{j < c_2 k_n} \theta_{nj}^2 \\ &+ C n^2 \kappa_{n, [c_2 n]}^2 \sum_{j > c_2 n} \theta_{nj}^2 \asymp o(1) + O(\kappa_{n, [c_2 n]}^2 / \kappa_n^2). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

В силу условия A4 имеем

$$\lim_{c_2 \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{n, [c_2 n]}^2 / \kappa_n^2 \rightarrow 0, \quad (\text{A.6})$$

Из теоремы 4.3 и (A.5), (A.6) следует достаточность. $\square$

Доказательство теоремы 4.4. Утверждение iii следует из теоремы 4.1 и леммы A.2, приведенной ниже.

Лемма A.2. Пусть $f_n \in \bar{\mathbb{B}}_{2\infty}^s(c_1)$ и $c n^{-r} \leq \|f_n\| \leq C n^{-r}$. Тогда, для $l_n = C_1 n^{2-4r} (1 + o(1)) = C_1 n^{\frac{r}{s}} (1 + o(1))$ при $C_1^{2s} > 2c_1/c$, имеет место

$$\sum_{j=1}^{l_n} \theta_{nj}^2 > \frac{c}{2} n^{-2r} (1 + o(1)). \quad (\text{A.7})$$

Пусть $f_n \in \bar{\mathbb{B}}_{2\infty}^s(c_1)$. Тогда

$$l_n^{2s} \sum_{j=l_n}^{\infty} \theta_{nj}^2 = C_1^{2s} n^{2r} \sum_{j=l_n}^{\infty} \theta_{nj}^2 (1 + o(1)) \leq c_1 (1 + o(1)).$$

Отсюда получаем

$$\sum_{j=l_n}^{\infty} \theta_{nj}^2 \leq c_1 C_1^{-2s} n^{-2r} \leq \frac{c}{2} n^{-2r} (1 + o(1)), \quad (\text{A.8})$$

что означает (A.7). $\square$

Предположим противное, т.е. iv не верно. Тогда $f = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j \phi_j \notin \mathbb{B}_{2\infty}^s$. Это означает, что найдется такая последовательность m_l , $m_l \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$, что

$$m_l^{2s} \sum_{j=m_l}^{\infty} \tau_j^2 = C_l, \quad (\text{A.9})$$

где $C_l \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$.

Определим последовательность $\eta_l = \{\eta_{lj}\}_{j=1}^{\infty}$ такую, что $\eta_{lj} = 0$, если $j < m_l$, и $\eta_{lj} = \tau_j$, если $j \geq m_l$.

Так как V – выпукло и орто-симметрично, то $\tilde{f}_l = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_{lj} \phi_j \in V$.

Для альтернатив $\tilde{f}_l$ определим последовательность n_l такую, что

$$\|\eta_l\|^2 \asymp n_l^{-2r} \asymp m_l^{-2s} C_l. \quad (\text{A.10})$$

Тогда

$$n_l \asymp C_l^{-1/(2r)} m_l^{s/r} = C_l^{-1/(2r)} m_l^{\frac{1}{2-4r}}. \quad (\text{A.11})$$

Отсюда получаем

$$m_l \asymp C_l^{(1-2r)/r} n_l^{2-4r}. \quad (\text{A.12})$$

В силу условия A4 (A.12) означает

$$\kappa_{n_l m_l}^2 = o(\kappa_{n_l}^2). \quad (\text{A.13})$$

Используя (4.2), A2 и (A.13), получаем

$$\begin{aligned} A_{n_l}(\eta_l) &= n_l^2 \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{n_l j}^2 \eta_{jl}^2 \leq n_l^2 \kappa_{n_l m_l}^2 \sum_{j=m_l}^{\infty} \theta_{n_l j}^2 \\ &\asymp n_l^{2-2r} \kappa_{n_l m_l}^2 = O(\kappa_{n_l m_l}^2 \kappa_{n_l}^{-2}) = o(1). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

По теореме 4.3 (A.14) означает n_l^{-r} -несостоятельность последовательности альтернатив $\tilde{f}_l$.

Доказательство теоремы 4.5 следует из лемм A.3–A.5.

Лемма A.3. Для любых s и C найдется наибольшее множество $\mathbb{B}_{2\infty}^s(P_0)$ такое, что если $f_n = \sum_{j=1}^{ck_n} \theta_{nj} \phi_j$, и $\|f_n\| \leq C n^{-r}$, то $f_n \in \mathbb{B}_{2\infty}^s(P_0)$.

Доказательство. Возьмем C_1 , такое что $k_n = C_1 n^{r/s} (1 + o(1))$. Тогда

$$k_n^{2s} \sum_{j=1}^{ck_n} \theta_{nj}^2 \leq C_1 n^{2r} \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{nj}^2 (1 + o(1)) < C C_1 (1 + o(1)). \quad \square$$

Лемма А.4. Пусть (4.6) имеет место. Тогда последовательность f_n является n^{-r} -состоятельной.

Доказательство. Пусть $f_n = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{nj} \phi_j$ и пусть $f_{1n} = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_{nj} \phi_j$. Обозначим $\zeta_{nj} = \theta_{nj} - \eta_{nj}$, $1 \leq j < \infty$.

Для любых $\delta > 0$, c_1 и C_2 , найдется c_2 , такое что для каждой последовательности $f_{1n} \in \mathbb{B}_{2\infty}^s(c_1)$, $\|f_{1n}\| \leq C_2 n^{-r}$, имеет место

$$\sum_{j > c_2 k_n} \eta_{nj}^2 < \delta n^{-2r}. \quad (\text{A.15})$$

Чтобы доказать (A.15) достаточно положить

$$c_2 k_n = l_n = C_1 n^{2-4r} (1 + o(1))$$

в (A.8), взяв $C_1^{2s} > \delta c_1$.

Имеем

$$\begin{aligned} J_n &= \left| \sum_{j > ck_n} \theta_{nj}^2 - \sum_{j > ck_n} \zeta_{nj}^2 \right| \leq \sum_{j > ck_n} |\eta_{nj} (2\theta_{nj} - \eta_{jn})| \\ &\leq \left(\sum_{j > ck_n} \eta_{nj}^2 \right)^{1/2} \left(2 \left(\sum_{j > ck_n} \theta_{nj}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{j > ck_n} \eta_{nj}^2 \right)^{1/2} \right) \leq C \delta^{1/2} n^{-2r}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

В силу (4.6), применяя (A.15) и (A.16), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j < ck_n} \theta_{nj}^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \eta_{nj}^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_{nj}^2 - \sum_{j \geq ck_n} \theta_{nj}^2 \geq \sum_{j < ck_n} \eta_{nj}^2 - J_n \\ &\geq \sum_{j < ck_n} \eta_{nj}^2 - C \delta^{1/2} n^{-2r} \geq \|f_{1n}\|^2 - \delta n^{-2r} - C \delta^{1/2} n^{-2r}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

По теореме 4.1 (A.17) означает состоятельность последовательности f_n . $\square$

Лемма А.5. Пусть последовательность альтернатив f_n , $cn^{-r} \leq \|f_n\| \leq Cn^{-r}$, – состоятельна. Тогда имеет место (4.6).

По теореме 4.1 найдутся такие c_1 и c_2 , что последовательность $f_{1n} = \sum_{j < c_2 k_n} \theta_{nj} \phi_j$ – состоятельна и $\|f_{1n}\| \geq c_1 n^{-r}$. По лемме А.3 найдется $\bar{\mathbb{B}}_{2\infty}^s(P_0)$, такая что $f_{1n} \in \bar{\mathbb{B}}_{2\infty}^s(P_0)$.

Доказательство теоремы 4.6. В силу условия А4 и (4.2), для любого $\delta > 0$ найдется такое c , что

$$n^2 \sum_{j > ck_n} \kappa_{nj}^2 \theta_{nj}^2 \leq \delta. \quad (\text{A.18})$$

По лемме А.3 найдется P_0 , такое что $f_{1n} = \sum_{j < ck_n} \theta_{nj} \phi_j \in \bar{\mathbb{B}}_{2\infty}^s(P_0)$. По теореме 4.3 и (A.18) для последовательности альтернатив f_{1n} имеют место (4.7) и (4.8). $\square$

Доказательство теоремы 4.7. Пусть $f_n = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{nj} \phi_j$ и пусть $f_{1n} = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_{nj} \phi_j$. Обозначим $\boldsymbol{\eta}_n = \{\eta_{nj}\}_{j=1}^{\infty}$.

Применяя неравенство Коши, получаем

$$\begin{aligned} |A_n(\boldsymbol{\theta}_n) - A_n(\boldsymbol{\theta}_n + \boldsymbol{\eta}_n)| &= n^2 \left| \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^2 \theta_{nj}^2 - \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{nj}^2 (\theta_{nj} + \eta_{nj})^2 \right| \\ &\leq 2A_n^{1/2}(\boldsymbol{\theta}_n) A_n^{1/2}(\boldsymbol{\eta}_n) + A_n(\boldsymbol{\eta}_n). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

По теореме 4.3 несостоятельность последовательности f_{1n} означает $A_n(\boldsymbol{\eta}_n) = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, в силу (A.19), $|A_n(\boldsymbol{\theta}_n) - A_n(\boldsymbol{\theta}_n + \boldsymbol{\eta}_n)| = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда по теореме 4.3 следует теорема 4.7. $\square$

Доказательство теоремы 4.8. Для доказательства достаточности предположим противное. Тогда найдется последовательность n_i , $n_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, такая что $f_{n_i} = f_{1n_i} + f_{2n_i}$,

$$\|f_{n_i}\|^2 = \|f_{1n_i}\|^2 + \|f_{2n_i}\|^2, \quad (\text{A.20})$$

$c_1 n_i^{-r} < \|f_{1n_i}\| < C_1 n_i^{-r}$, $c_2 n_i^{-r} < \|f_{2n_i}\| < C_2 n_i^{-r}$ и последовательность f_{2n_i} несостоятельна.

Пусть $f_{n_i} = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{n_i j} \phi_j$, $f_{1n_i} = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{1n_i j} \phi_j$ и $f_{2n_i} = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{2n_i j} \phi_j$.

Тогда, по теореме 4.2 и (4.9) получаем, что найдутся ε_i , $\varepsilon_i \rightarrow 0$ и $C_i = C(\varepsilon_i)$, $C_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, такие что

$$\sum_{j > C_i k_n} \theta_{n_i j}^2 = \sum_{j > C_i k_n} (\theta_{1n_i j} + \theta_{2n_i j})^2 = o(n^{-2r}), \quad \sum_{j < C_i k_n} \theta_{2n_i j}^2 = o(n^{-2r}). \quad (\text{A.21})$$

Из (A.20) и (A.21) получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \theta_{n_i j}^2 = \sum_{j < C_i k_n} \theta_{n_i j}^2 + o(n^{-2r}) = \sum_{j < C_i k_n} \theta_{1n_i j}^2 + o(n^{-2r}). \quad (\text{A.22})$$

Отсюда и из (A.20) следует $\|f_{2n_i}\| = o(n^{-r})$. Мы приходим к противоречию.

Для доказательства необходимости предположим (4.9) не имеет место. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ и последовательности C_i , n_i , $C_i \rightarrow \infty$, $n_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, такие что

$$\sum_{j > C_i k_{n_i}} \theta_{n_i j}^2 > \varepsilon n_i^{-2r}.$$

Тогда, в силу A4 и (4.2) получаем

$$n_i^2 \sum_{j > C_i k_{n_i}} \kappa_{n_i j}^2 \theta_{n_i j}^2 = o(1).$$

Следовательно, по теореме 4.3 получаем, что подпоследовательность $f_{1n_i} = \sum_{j > C_i k_{n_i}} \theta_{n_i j} \phi_j$ несостоятельна. $\square$

Доказательство теоремы 4.9. Для доказательства необходимости достаточно положить

$$f_{1n} = \sum_{j < C_1(\varepsilon) k_n} \theta_{n j} \phi_j.$$

По лемме A.3 найдется γ_ε , такая что $f_{1n} \in \gamma_\varepsilon U$. Доказательство достаточности довольно просто и опускается. $\square$

Доказательство теоремы 4.10. Доказательство необходимости довольно очевидно и опускается. Доказательство достаточности довольно просто.

Лемма А.6. Пусть для последовательности f_n , $cn^{-r} < \|f_n\| < Cn^{-r}$, имеет место (4.10). Тогда последовательность f_n — чисто n^{-r} -состоятельна.

Предположим, что $f_n = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{nj} \phi_j$ — не чисто n^{-r} -состоятельна. Тогда, по теореме 4.8 найдутся c_1 , последовательность n_i и подпоследовательность c_{n_i} , $c_{n_i} \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, такие что

$$\sum_{j > c_{n_i} k_{n_i}} \theta_{n_i j}^2 > c_1 n_i^{-r}.$$

Следовательно, если мы положим $f_{1n_i} = \sum_{j > c_{n_i} k_{n_i}} \theta_{n_i j} \phi_j$, то (4.10) не имеет место. $\square$

А.3. Доказательство теорем параграфа 5 . Если мы положим $|\hat{K}(jh_n)|^2 = \kappa_{nj}^2$, то окажется, что совпадают асимптотика (4.5) в теореме 4.3 и асимптотика (5.4) в теореме 5.2. Функция $\hat{K}(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}^1$, может обращаться в нуль. Это обуславливает основные отличия в формулировках теорем и доказательствах. Чтобы проиллюстрировать эти отличия, будут даны доказательства достаточности в аналоге теоремы 5.1 и доказательство iv. в аналоге теоремы 4.4. Остальные доказательства будут опущены.

Доказательство аналога теоремы 4.1. Достаточность. Пусть (4.3) имеет место. Тогда

$$\begin{aligned} T_{1n}(f_n) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{K}(jh_n)|^2 |\theta_{nj}|^2 \geq \sum_{|j|h_n < b} |\hat{K}(jh_n)|^2 |\theta_{nj}|^2 \\ &\asymp \sum_{|j| < c_2 k_n} |\hat{K}(jh_n)|^2 |\theta_{nj}|^2 \asymp n^{-1} h_n^{-1/2} \asymp n^{-2r} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

для $c_2 k_n < b h_n^{-1}$. По теореме 5.2 (A.23) означает состоятельность. $\square$

Доказательство iv. в аналоге теоремы 4.4. Пусть

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau_j \phi_j \notin \gamma U \quad \text{для всех } \gamma > 0.$$

Тогда найдется последовательность m_l , $m_l \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$, такая что

$$m_l^{2s} \sum_{|j| \geq m_l}^{\infty} |\tau_j|^2 = C_l, \quad (\text{A.24})$$

где $C_l \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$.

Легко видеть, что мы можем определить последовательность m_l так, что

$$m_l^{2s} \sum_{m_l \leq |j| \leq 2m_l} |\tau_j|^2 > \delta C_l, \quad (\text{A.25})$$

где δ , $0 < \delta < 1/2$, не зависит от l .

В противном случае, мы бы имели

$$2^{2s(i-1)} m_l^{2s} \sum_{j=2^{i-1}m_l}^{2^i m_l} \tau_j^2 < \delta C_l$$

для всех $i = 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что правая часть (A.24) не превосходит $2\delta C_l$.

Определим последовательность $\eta_l = \{\eta_{lj}\}_{j=-\infty}^{\infty}$, такую что $\eta_{lj} = \tau_j$, $|j| \geq m_l$, и $\eta_{lj} = 0$ в противном случае.

Обозначим

$$\tilde{f}_l(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \eta_{lj} \exp\{2\pi i j x\}.$$

Для альтернатив $\tilde{f}_l(x)$ зададим последовательность n_l , такую что $\|\tilde{f}_l(x)\| \asymp n_l^{-r}$. Тогда

$$n_l \asymp C_l^{-1/(2r)} m_l^{s/r}.$$

Мы имеем $|\hat{K}(\omega)| \leq \hat{K}(0) = 1$ для всех $\omega \in R^1$ и $|\hat{K}(\omega)| > c > 0$ для всех $|\omega| < b$. Следовательно, если мы положим $h_l = h_{n_l} = 2^{-1} b^{-1} m_l^{-1}$, то в силу (A.25) найдется $C > 0$, такая что для всех $h > 0$

$$T_{1n_l}(\tilde{f}_l, h_l) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{K}(jh_l) \eta_{lj}|^2 > C \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{K}(jh) \eta_{lj}|^2 = C T_{1n_l}(\tilde{f}_l, h).$$

Следовательно, мы можем взять для дальнейших рассуждений $h = h_l$.

Используя (A.25), получаем

$$T_{1n_l}(\tilde{f}_l) = \sum_{|j| > m_l} |\hat{K}(jh_l) \eta_{lj}|^2 \asymp \sum_{j=m_l}^{2m_l} |\eta_{lj}|^2 \asymp n_l^{-2r}. \quad (\text{A.26})$$

Если мы положим в оценках (A.11), (A.12), $k_l = [h_{n_l}^{-1}]$ и $m_l = k_l$, то получим

$$h_{n_l}^{1/2} \asymp C_l^{(2r-1)/2} n_l^{2r-1}. \quad (\text{A.27})$$

Используя (A.26) и (A.27), получаем

$$n_l T_{1n_l}(\tilde{f}_l) h_{n_l}^{1/2} \asymp C_l^{-(1-2r)/2}.$$

По теореме 5.2 это означает несостоятельность последовательности альтернатив $\tilde{f}_l$. $\square$

A.4. Доказательство теорем параграфа 6. Имеем

$$n^{-1} m_n^{-1} T_n(F) = \sum_{l=0}^{m_n-1} \left(\int_{l/m_n}^{(l+1)/m_n} f(x) dx \right)^2.$$

Используя задание $f(x)$ в виде ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \theta_j \exp\{2\pi i j x\},$$

получаем

$$\int_{l/m_n}^{(l+1)/m_n} f(x) dx = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\theta_j}{2\pi i j} \exp\{2\pi i j l / m_n\} (\exp\{2\pi i j / m_n\} - 1)$$

для $1 \leq l < m_n$.

Условимся использовать следующее соглашение $0/0 = 0$.

Лемма A.7. *Имеет место*

$$n^{-1} m_n^{-1} T_n(F) = m_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j \neq k m_n} \frac{\theta_j \bar{\theta}_{j-k m_n}}{4\pi^2 j(j-k m_n)} (2 - 2 \cos(2\pi j / m_n)). \quad (\text{A.28})$$

Доказательство A.7. Имеем

$$\begin{aligned} n^{-1} m_n^{-1} T_n(F) &= \sum_{l=0}^{m_n-1} \left(\sum_{j \neq 0} \frac{\theta_j}{2\pi i j} \exp\{2\pi i j l / m_n\} (\exp\{2\pi i j / m_n\} - 1) \right) \\ &\times \left(\sum_{j \neq 0} \frac{-\bar{\theta}_j}{2\pi i j} \exp\{-2\pi i j l / m_n\} (\exp\{-2\pi i j / m_n\} - 1) \right) = J_1 + J_2, \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

где

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \sum_{l=0}^{m_n-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j_1=j-km_n} \frac{\theta_j \bar{\theta}_{j_1}}{4\pi^2 j j_1} \exp\{2\pi i l k\} \\
 &\times (\exp\{2\pi i j/m_n\} - 1) (\exp\{-2\pi i j_1/m_n\} - 1) \\
 &= m_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\theta_j \bar{\theta}_{j-km_n}}{4\pi^2 j (j-km_n)} (2 - 2 \cos(2\pi j/m_n))
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

и

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \sum_{l=0}^{m_n-1} \sum_{j \neq 0} \sum_{j_1 \neq j-km_n} \frac{\theta_j \bar{\theta}_{j_1}}{4\pi^2 j j_1} \exp\{2\pi i (j-j_1) l/m_n\} \\
 &\times (\exp\{2\pi i j/m_n\} - 1) (\exp\{-2\pi i j_1/m_n\} - 1) = 0,
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

где $j_1 \neq j - km_n$ означает, что суммирование проводится по всем j_1 , таким что $j_1 \neq j - km_n$ для всех целых k .

В последнем равенстве (A.31) мы использовали тождество

$$\sum_{l=0}^{m_n-1} \exp\{2\pi i (j-j_1) l/m_n\} = \frac{\exp\{2\pi i (j-j_1) m_n/m_n\} - 1}{\exp\{2\pi i (j-j_1)/m_n\} - 1} = 0,$$

если $j - j_1 \neq km_n$ для всех целых k .

Из (A.29) - (A.31) получаем (A.28). $\square$

Для функции распределения F и любого натурального числа k обозначим $\tilde{F}_k$ функцию, имеющую производные

$$1 + \tilde{f}_k(x) = 1 + \sum_{|j|>k} \theta_j \exp\{2\pi i j x\},$$

и такую что $\tilde{F}_k(1) = 1$.

Обозначим $i_n = [dm_n]$, где $d > 1 + c$.

Лемма А.8. *Имеет место*

$$n^{-1} m_n^{-2} T_n(\tilde{F}_{i_n}) \leq C m_n^{-1} i_n^{-1} \sum_{|j|>i_n} |\theta_j|^2. \tag{A.32}$$

Доказательство. Обозначим $\eta_j = \theta_j$, если $|j| > i_n$, и $\eta_j = 0$, если $|j| < i_n$.

Имеем

$$\begin{aligned}
n^{-1} m_n^{-2} T_n(\tilde{F}_{i_n}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j \neq km_n} \frac{\eta_j \bar{\eta}_{j-km_n}}{4\pi^2 j(j-km_n)} (2 - 2 \cos(2\pi j/m_n)) \\
&\leq C \sum_{|j| > i_n} \left| \frac{\eta_j}{j} \right| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\eta_{j+km_n}}{j+km_n} \right| \\
&= C \sum_{j=1}^{m_n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\eta_{j+km_n}}{j+km_n} \right| \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\eta_{j+(k+k_1)m_n}}{j+(k+k_1)m_n} \right| \\
&= C \sum_{j=1}^{m_n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\eta_{j+km_n}}{j+km_n} \right| \right)^2 \\
&\leq C \sum_{j=1}^{m_n} \left(\sum_{|k| > d-1} |\eta_{j+km_n}|^2 \right) \left(\sum_{|k| > d-1} (j+km_n)^{-2} \right) \\
&\leq C \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\eta_j|^2 \sum_{|k| > d} (km_n)^{-2} \leq C m_n^{-1} i_n^{-1} \sum_{|j| > i_n} |\theta_j|^2.
\end{aligned}$$

□

Доказательство аналога теоремы 4.1. Достаточность. Предположим, что (4.3) выполнено. Обозначим

$$\tilde{f}_n = \tilde{f}_{n, c_2 k_n} = \sum_{|j| > c_2 k_n} \theta_{nj} \phi_j \quad \text{и} \quad \bar{f}_n = \bar{f}_{n, c_2 k_n} = f_n - \tilde{f}_n$$

Обозначим $\tilde{F}_n, \bar{F}_n$ функции, имеющие производные $1 + \tilde{f}_{n, c_2 k_n}$ и $1 + \bar{f}_{n, c_2 k_n}$ соответственно, и такие что $\tilde{F}_n(1) = 1$ и $\bar{F}_n(1) = 1$.

Пусть T_n – тестовая статистика критерия хи-квадрат, имеющая число ячеек $m_n = [c_3 k_n]$, где $c_2 < c_3$. Обозначим $\mathbb{L}_{2,n}$ – линейное подпространство, порожденное функциями $1_{\{x \in ((j-1)/m_n, j/m_n)\}}$, $1 \leq j \leq m_n$.

Обозначим $\bar{h}_n$ ортогональную проекцию $\bar{f}_n$ на $\mathbb{L}_{2,n}$. Обозначим $\tilde{h}_n$ ортогональную проекцию $\tilde{f}_n$ на прямую $\{h : h = \lambda \bar{h}_n, \lambda \in \mathbb{R}^1\}$.

Заметим, что $n^{-1/2} T_n^{1/2}(F_n)$ является $\mathbb{L}_{2,n}$ -нормой функции f_n . Отсюда, получаем

$$n^{-1/2} T_n^{1/2}(F_n) \geq \|\bar{h}_n + \tilde{h}_n\|. \quad (\text{A.33})$$

Таким образом, в силу теоремы 6.3 остается показать, что при некотором выборе постоянных c_3 имеет место $\|\bar{h}_n + \tilde{h}_n\| \asymp n^{-r}$, если $m_n > c_3 k_n$.

Обозначим $\bar{g}_n = \bar{f}_n - \bar{h}_n$ и $\tilde{g}_n = \tilde{f}_n - \tilde{h}_n$.

Обозначим

$$\bar{p}_{jn} = \frac{1}{m_n} \int_{(j-1)/m_n}^{j/m_n} \bar{f}_n(x) dx, \quad 1 \leq j \leq m_n.$$

Из лемм 3 и 4 раздела 7 в [24], получаем

$$\|\bar{g}_n\|^2 = m_n \sum_{j=1}^{m_n} \int_{(j-1)/m_n}^{j/m_n} (\bar{f}_n(x) - \bar{p}_{jn})^2 dx \leq 2\omega^2\left(\frac{1}{m_n}, \bar{f}_n\right). \quad (\text{A.34})$$

Здесь

$$\omega^2(h, f) = \int_0^1 (f(t+h) - f(t))^2 dt, \quad h > 0,$$

для любого $f \in \mathbb{L}_2^{per}$.

Если $f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \theta_j \phi_j$, то

$$\omega^2(h, f) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} |\theta_j|^2 (2 - 2 \cos(2\pi j h)). \quad (\text{A.35})$$

Так как $1 - \cos(x) \leq x^2$, то применяя (A.34) и (A.35), получаем

$$\|\bar{g}_n\| \leq 4\pi(c_2 k_n/m_n)^{1/2} \|\bar{f}_n\| = \delta \|\bar{f}_n\| (1 + o(1)), \quad (\text{A.36})$$

где $\delta = 4\pi(c_2/c_3)^{1/2}$.

Из (4.3), (A.34) и (A.36) получаем, что найдется такое c_{30} , что

$$\|\bar{h}_n\|_n > \frac{c_1}{2} n^{-r} \quad (\text{A.37})$$

для $c_3 > c_{30}$.

Для функций $g_1, g_2 \in \mathbb{L}_2(0, 1)$ обозначим (g_1, g_2) скалярное произведение g_1 и g_2 .

Имеем

$$0 = (\bar{f}_n, \tilde{f}_n) = (\bar{h}_n, \tilde{h}_n) + (\bar{g}_n, \tilde{f}_n). \quad (\text{A.38})$$

Из (A.36) получаем

$$|(\bar{g}_n, \tilde{f}_n)| \leq \|\bar{g}_n\| \|\tilde{f}_n\| \leq \delta C^2 n^{-2r}.$$

Отсюда, имеем

$$|(\bar{h}_n, \tilde{h}_n)| \leq \delta C^2 n^{-2r}. \quad (\text{A.39})$$

Из (A.37) и (A.39) получаем, что, для достаточно малых $\delta > 0$ имеет место $\|\bar{h}_n + \tilde{h}_n\| \asymp n^{-r}$. Отсюда и из (A.33), применяя теорему 6.3, получаем требуемое утверждение. $\square$

Доказательство аналога теоремы 4.2. Достаточность. Пусть $k_n = [c_1 n^{2-4r}]$. Для $c_2 > 2c_1$ имеем

$$T_n^{1/2}(F_n) \leq T_n^{1/2}(\bar{F}_n) + T_n^{1/2}(\tilde{F}_n). \quad (\text{A.40})$$

Из леммы A.8 получаем

$$n^{-1} T_n(\tilde{F}_n) \leq c_2^{-1} m_n k_n^{-1} \|\tilde{f}_n\|^2 \leq c_2^{-1} c_1 C n^{-2r}. \quad (\text{A.41})$$

Имеем

$$n^{-1/2} T_n^{1/2}(\bar{F}_n) \leq \|\bar{f}_n\|. \quad (\text{A.42})$$

Так как мы можем выбрать произвольное значение c_2 , $c_2 > 2c_1$, то из теоремы 6.3, (4.4) и (A.40) - (A.42) следует несостоятельность последовательности f_n . $\square$

Доказательство *iv*. в аналоге теоремы 4.4. Предположим противное. Тогда найдется последовательность i_l , $i_l \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$, такая что

$$i_l^{2s} \|\tilde{f}_{i_l}\|^2 = C_l,$$

где $C_l \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$. Здесь $f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau_j \phi_j$ и $\tilde{f}_{i_l} = \sum_{|j| > i_l} \tau_j \phi_j$.

Зададим последовательность n_l , такую что $n_l^{-r} \asymp \|\tilde{f}_{i_l}\|$ при $l \rightarrow \infty$.

Тогда, проводя оценки аналогичные (A.11) и (A.12), получаем $i_l^{-1/2} \asymp C_l^{(2r-1)/2} n_l^{2r-1}$ при $l \rightarrow \infty$.

Если $m_l = o(i_l)$, то применяя лемму A.8, получаем

$$m_l^{-1/2} T_{n_l}(\tilde{F}_{i_l}) \leq m_l^{1/2} i_l^{-1} n_l \sum_{|j| > i_l} |\tau_j|^2 \asymp m_l^{1/2} i_l^{-1} n_l^{1-2r} = o(C_l^{(2r-1)/2}). \quad (\text{A.43})$$

Пусть $m_l \asymp i_l$ или $i_l = o(m_l)$. Тогда, имеем

$$n_l^{-2r} \asymp \|\tilde{f}_{i_l}\|^2 \geq n_l^{-1} T_{n_l}(\tilde{F}_{i_l}). \quad (\text{A.44})$$

Следовательно,

$$m_l^{-1/2} T_{n_l}(\tilde{F}_{i_l}) \leq C m_l^{-1/2} n_l^{1-2r} = C m_l^{-1/2} i_l^{1/2} C_l^{(2r-1)/2} = o(1). \quad (\text{A.45})$$

По теореме 6.3, из (A.43) – (A.45) следует iv. $\square$

Доказательство аналога теоремы 4.6. Пусть $f_{1n} = \sum_{|j| < ck_n} \theta_{nj} \phi_j$.

Тогда, по лемме A.3 найдется такое наибольшее множество $\tilde{\mathbb{B}}_{2\infty}^s(P_0)$, что $f_{1n} \in \tilde{\mathbb{B}}_{2\infty}^s(P_0)$.

Обозначим F_{1n} функцию, имеющую производную $1 + f_{1n}$, и такую, что $F_{1n}(1) = 1$.

Имеем

$$|T_n^{1/2}(F_n) - T_n^{1/2}(F_{1n})| \leq T_n^{1/2}(F_n - F_{1n} + F_0). \quad (\text{A.46})$$

Если $m_n = [c_0 k_n]$ и $c > 2c_0$, то по лемме A.8 имеем

$$n^{-1} T_n(F_n - F_{1n} + F_0) \leq c_0 c^{-1} \|f_n - f_{1n}\|^2. \quad (\text{A.47})$$

Так как выбор постоянной c произволен, по теореме 6.3 из (A.46) и (A.47) следует (4.7) и (4.8). $\square$

Доказательство iii. в аналоге теоремы 4.4 и аналогов теорем 4.5, 4.8, 4.9, 4.10 следуют из теоремы 6.3 и аналогов теорем 4.1, 4.2, применяя те же самые рассуждения, что и в подсекции A.2.

Доказательство теоремы 6.2 аналогично доказательству теоремы 4.7 и опускается.

A.5. Доказательство теорем параграфа 7. Приводимая ниже лемма A.9 позволяет свести все рассуждения для эмпирической функции распределения к аналогичным рассуждениям для броуновского моста $b(t)$, $t \in (0, 1)$.

Лемма A.9. При любом $c > 0$, для любого $x > 0$

$$P_{F_n}(n T^2(\hat{F}_n - F_0) < x) - P(T^2(b(t) + \sqrt{n}(F_n(t) - F_0(t))) < x) = o(1) \quad (\text{A.48})$$

равномерно по последовательностям функций распределения F_n , таким что $T(F_n - F_0) < c n^{-1/2}$.

Если $\sqrt{n}(F_n - F_0)$ сходится к некоторой функции G в метрике расстояния Колмогорова–Смирнова, (A.48) было доказано Чибисовым [25] без каких либо утверждений о равномерной сходимости. Лемма A.9

следует из лемм A.10 и A.12 приводимых ниже, как результат применения венгерской конструкции (см. [21, теорему 3, гл. 12, секция 1]).

Лемма A.10. *Для любого $x > 0$*

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(T^2(b(F_n(t)) + \sqrt{n}(F_n(t) - F_0(t))) < x) \\ & - \mathbf{P}(T^2(b(t) + \sqrt{n}(F_n(t) - F_0(t))) < x) = o(1) \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

равномерно по последовательностям функций распределения F_n , таким что $T(F_n - F_0) < cn^{-1/2}$ при любом $c > 0$.

Лемма A.10 следует из лемм A.11 и A.12, приведенных ниже.

Лемма A.11. *Имеет место*

$$\mathbf{E}[|T^2(b(F_n(t))) - T^2(b(t))|] < CT^{1/4}(F_n - F_0). \quad (\text{A.50})$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}^2[|T^2(b(F_n(t))) - T^2(b(t))|] \\ & \leq \mathbf{E}^2[|(T(b(F_n(t))) - T(b(t)))(T(b(F_n(t))) + T(b(t)))|] \\ & \leq \mathbf{E}[|(T(b(F_n(t))) - T(b(t)))|^2] \mathbf{E}[(T(b(F_n(t))) + T(b(t)))^2] \\ & \leq C \mathbf{E}[|(T(b(F_n(t))) - T(b(t)))|^2] \leq C \mathbf{E}[T^2(b(F_n(t))) - b(t))] \\ & = C \int_0^1 F_n(t) - F_n^2(t) - 2\min(F_n(t), F_0(t)) \\ & \quad + 2F_n(t)F_0(t) + F_0(t) - F_0^2(t) dt \\ & = C \int_0^1 F_n(t) + F_0(t) - 2\min(F_n(t), F_0(t)) - (F_n(t) - F_0(t))^2 dt \\ & = C \int_0^1 |F_n(t) - F_0(t)| - (F_n(t) - F_0(t))^2 dt \\ & \leq C \int_0^1 |F_n(t) - F_0(t)| dt \leq CT^{1/2}(F_n - F_0). \end{aligned}$$

Лемма A.12. *Плотности функций распределения*

$$\mathbf{P}(T^2(b(t) + n^{1/2}(F_n(t) - F_0(t))) \leq x)$$

равномерно ограничены на множествах функций распределений F_n , таких что $nT^2(F_n - F_0) < C$, где C – произвольная постоянная.

Доказательство. Броуновский мост может быть представлен в виде

$$b(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j}{\pi j} \psi_j(t),$$

где $\psi_j(t) = \sqrt{2} \sin(\pi j t)$ и ξ_j , $1 \leq j < \infty$, – независимые гауссовские случайные величины, $\mathbf{E} \xi_j = 0$ и $\mathbf{E} \xi_j^2 = 1$.

Следовательно, если $f_n(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{nj} \phi_j$, то

$$T^2(b(t) + n^{1/2} (F_n(t) - F_0(t))) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\xi_j + n^{1/2} \theta_{nj})^2}{\pi^2 j^2}. \quad (\text{A.51})$$

Правая часть (A.51) является суммой независимых случайных величин. Поэтому достаточно показать, что для любого C случайные величины

$$(\xi_1 + n^{1/2} \theta_{n1})^2 + \frac{1}{4} (\xi_2 + n^{1/2} \theta_{n2})^2$$

имеют равномерно ограниченные плотности относительно $n^{1/2} |\theta_{n1}| \leq C$ и $n^{1/2} |\theta_{n2}| \leq C$. Плотности $(\xi_1 + a)^2$ и $(\xi_2 + b)^2$ имеют хорошо известное аналитическое задание и доказательство равномерной ограниченности плотностей $(\xi_1 + a)^2 + \frac{1}{4}(\xi_2 + b)^2$ при $|a| \leq C$ и $|b| \leq C$ получается стандартной техникой. Мы опустим эти стандартные оценки. $\square$

Доказательство ii. в теореме 7.1. Венгерская конструкция позволяет свести соответствующие рассуждения к доказательству аналогичного утверждения для броуновского моста $b(t)$, $t \in [0, 1]$. Таким образом, достаточно только доказать следующую лемму.

Лемма A.13. Для любых a и C , $C > a$, имеет место

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \Omega_n(a, C)} \mathbf{P}(T^2(b(t) + \sqrt{n}(F(t) - F_0(t))) \leq x_\alpha) < 1 - \alpha, \quad (\text{A.52})$$

где $\Omega_n(a, C) = \{F : a < nT^2(F - F_0) < C, F \in \mathfrak{F}\}$. Здесь x_α находится из равенства $\mathbf{P}(T^2(b(t)) > x_\alpha) = \alpha$.

Доказательство. Предположим противное, что (A.52) не имеет места. Тогда найдется последовательность функций распределения $F_{n_i} \in \Omega_{n_i}(a, C)$, $n_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, такая что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{P}(T^2(b(t) + \sqrt{n_i}(F_{n_i}(t) - F_0(t))) \leq x_\alpha) \geq 1 - \alpha. \quad (\text{A.53})$$

Пусть $F_{n_i}(x) = x + \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{n_i j} \psi_j(x)/(\pi j)$, $x \in (0, 1)$.

Найдется вектор $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$ и подпоследовательность n_{i_k} последовательности n_i , такие что $n_{i_k}^{1/2} \theta_{n_{i_k} j} j^{-1} \rightarrow \eta_j$ при $k \rightarrow \infty$ для каждого j , $1 \leq j < \infty$.

Следовательно, существует последовательность C_k , $C_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, такая что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_{i_k} \sum_{j < C_k} \theta_{n_{i_k} j}^2 j^{-2}}{\sum_{j < C_k} \eta_j^2} = 1 \quad (\text{A.54})$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j < C_k} (n_{i_k}^{1/2} \theta_{n_{i_k} j} j^{-1} - \eta_j)^2 = 0. \quad (\text{A.55})$$

Рассмотрим два случая.

i. Имеет место

$$\lim_{k \rightarrow \infty} n_{i_k} \sum_{j > C_k} \theta_{n_{i_k} j}^2 j^{-2} = 0.$$

ii. Имеет место

$$n_{i_k} \sum_{j > C_k} \theta_{n_{i_k} j}^2 j^{-2} > c \quad \text{для} \quad k > k_0.$$

Если имеет место *i.*, то мы имеем

$$\begin{aligned} n_{i_k} \mathbf{E} \left(\sum_{j > C_k} \xi_j \theta_{n_{i_k} j} j^{-2} \right)^2 &= n_{i_k} \sum_{j > C_k} \theta_{n_{i_k} j}^2 j^{-4} \\ &\leq C_k^{-2} n_{i_k} \sum_{j > C_k} \theta_{n_{i_k} j}^2 j^{-2} = o(1). \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

Используя (A.55), получаем

$$\mathbf{E} \left(\sum_{j < C_k} \xi_j (n_{i_k}^{1/2} \theta_{n_{i_k} j} j^{-1} - \eta_j) \right)^2 = \sum_{j < C_k} (n_{i_k}^{1/2} \theta_{n_{i_k} j} j^{-1} - \eta_j)^2 = o(1). \quad (\text{A.57})$$

Используя (A.56) и (A.57), получаем

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \left(\pi^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} (\xi_j + n_{i_k}^{1/2} \theta_{n_{i_k} j})^2 j^{-2} < x_{\alpha} \right) \\
&= \mathbf{P} \left(\pi^{-2} \sum_{j < C_k} (\xi_j + n_{i_k}^{1/2} \theta_{n_{i_k} j})^2 j^{-2} + \pi^{-2} \sum_{j > C_k} \xi_j^2 j^{-2} < x_{\alpha} (1 + o_P(1)) \right) \\
&= \mathbf{P} \left(\pi^{-2} \sum_{j < C_k} (\xi_j j^{-1} + \eta_j)^2 + \pi^{-2} \sum_{j > C_k} \xi_j^2 j^{-2} < x_{\alpha} (1 + o_P(1)) \right) \\
&< \mathbf{P} \left(\pi^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 j^{-2} < x_{\alpha} \right) (1 + o(1)),
\end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из леммы A.14, приводимой ниже.

Лемма A.14. Пусть последовательность $\eta = \{\eta_j\}_1^{\infty}$, такая что $\pi^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j^2 > c$. Тогда имеет место

$$\mathbf{P} \left(\pi^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 j^{-2} < x_{\alpha} \right) > \mathbf{P} \left(\pi^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} (\xi_j/j + \eta_j)^2 < x_{\alpha} \right). \quad (\text{A.58})$$

Доказательство. Для простоты символики рассуждения будут проведены для случая $\eta_1 \neq 0$. Применяя теорему Андерсона [1], получаем

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \left(\pi^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} (\xi_j/j + \eta_j)^2 < x_{\alpha} \right) \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\pi\sqrt{x_{\alpha}} - \eta_1}^{\pi\sqrt{x_{\alpha}} - \eta_1} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} \\
&\times \mathbf{P} \left(\pi^{-2} \sum_{j=2}^{\infty} (\xi_j/j + \eta_j)^2 < x_{\alpha} - \pi^{-2} (x + \eta_1)^2 \right) dx \quad (\text{A.59}) \\
&\leq (2\pi)^{-1/2} \int_{-\pi\sqrt{x_{\alpha}} - \eta_1}^{\pi\sqrt{x_{\alpha}} - \eta_1} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} \mathbf{P} \left(\sum_{j=2}^{\infty} \xi_j^2 j^{-2} < \pi^2 x_{\alpha} - (x + \eta_1)^2 \right) dx \\
&= \mathbf{P} \left((\xi_1 + \eta_1)^2 + \sum_{j=2}^{\infty} \xi_j^2 j^{-2} < \pi^2 x_{\alpha} \right) < \mathbf{P} \left(\pi^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 j^{-2} < x_{\alpha} \right).
\end{aligned}$$

Для доказательства последнего неравенства в (A.59) достаточно заметить, что $\mathbf{P}(\xi_1^2 < x) > \mathbf{P}((\xi_1 + \eta_1)^2 < x)$ для $x \in (0, x_\alpha)$, и, для произвольного δ , $0 < \delta < x_\alpha$, найдется $\delta_1 > 0$, такое что функция $\mathbf{P}(\xi_1^2 < x) - \mathbf{P}((\xi_1 + \eta_1)^2 < x) - \delta_1$ положительна на интервале (δ, x_α) . $\square$

Предположим, что имеет место *ii.* Для простоты символики будем считать $n_{i_k} = n$.

Имеем

$$\begin{aligned} T^2(b(t) + \sqrt{n}(F_n(t) - F_0(t))) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\xi_j + n^{1/2}\theta_{nj})^2}{\pi^2 j^2} \\ &= \sum_{j < C_n} \frac{(\xi_j + n^{1/2}\theta_{nj})^2}{\pi^2 j^2} + \sum_{j \geq C_n} \frac{(\xi_j + n^{1/2}\theta_{nj})^2}{\pi^2 j^2} = J_{1n} + J_{2n}. \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Имеем

$$\begin{aligned} J_{2n} &= \sum_{j \geq C_n} \frac{\xi_j^2}{\pi^2 j^2} + 2\sqrt{n} \sum_{j \geq C_n} \frac{\xi_j \theta_{nj}}{\pi^2 j^2} \\ &\quad + n \sum_{j \geq C_n} \frac{\theta_{nj}^2}{\pi^2 j^2} = J_{21n} + 2J_{22n} + J_{23n}. \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Имеем

$$J_{21n} = o_P(1) \quad \text{и} \quad J_{22n} \leq J_{21n}^{1/2} J_{23n}^{1/2} = o_P(1). \quad (\text{A.62})$$

Из (A.60)–(A.62), применяя теорему Андерсона [1], получаем, что для любого $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\xi_j + n^{1/2}\theta_{nj})^2}{\pi^2 j^2} < x\right) &\leq \mathbf{P}\left(\sum_{j < C_n} \frac{(\xi_j + n^{1/2}\theta_{nj})^2}{\pi^2 j^2} \leq x - c - o_P(1)\right) \\ &\leq \mathbf{P}\left(\sum_{j < C_n} \frac{\xi_j^2}{\pi^2 j^2} \leq x - c + \delta\right)(1 + o(1)) \\ &\leq \mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j^2}{\pi^2 j^2} \leq x - c + 2\delta\right)(1 + o(1)). \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

$\square$

$\square$

Доказательство аналога теоремы 4.1. Пусть имеет место (4.3). Тогда

$$n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\theta_{nj}^2}{\pi^2 j^2} \geq n \sum_{j < c_2 k_n} \frac{\theta_{nj}^2}{\pi^2 j^2} \geq c_2^{-2} n k_n^{-2} \sum_{j < c_2 k_n} \theta_{nj}^2 \asymp 1.$$

В силу (7.3) это влечет достаточность. $\square$

Доказательство аналога теоремы 4.2. Пусть имеет место (4.4). Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\theta_{nj}^2}{\pi^2 j^2} &= n \sum_{j < c_2 k_n} \frac{\theta_{nj}^2}{\pi^2 j^2} + n \sum_{j > c_2 k_n} \frac{\theta_{nj}^2}{\pi^2 j^2} \\ &\leq o(1) + (c_2 k_n)^{-2} n \sum_{j > c_2 k_n} \theta_{nj}^2 \asymp o(1) + (c_2 k_n)^{-2} n^{1-2r} = O(c_2^{-2}). \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

Так как c_2 произвольно, то в силу (7.3) из (A.64) следует достаточность. $\square$

Доказательство iii. в теореме 7.2. Рассуждения аналогичны доказательству iii. в теореме 4.4. Оно следует из (4.3) и леммы A.15, приводимой ниже.

Лемма A.15. Пусть $f_n \in c_1 U$ и $cn^{-r} \leq \|f_n\| \leq Cn^{-r}$. Тогда для $k_n = C_1 n^{(1-2r)/2} (1 + o(1))$, для $C_1^{2s} > 2c_1/c$ имеет место

$$\sum_{j=1}^{k_n} \theta_{nj}^2 > \frac{c}{2} n^{-2r}.$$

Доказательство леммы A.15 аналогично доказательству леммы A.2 и опускается. $\square$

Доказательство iv. в аналоге теоремы 7.2. Рассуждения аналогичны. Предположим противное. Тогда найдется $f = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j \phi_j \notin \mathbb{B}_{2\infty}^s$ и последовательность $m_l, m_l \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$, такие что имеет место (A.9). Определим последовательности η_l, n_l и $\tilde{f}_l$ также как в доказательстве теоремы 4.4.

Тогда

$$n_l \asymp C_l^{-1/(2r)} m_l^{s/r} = C_l^{-1/(2r)} m_l^{\frac{2}{1-2r}}.$$

Следовательно,

$$m_l \asymp C_l^{(1-2r)/(4r)} n_l^{\frac{1-2r}{2}}.$$

Отсюда получаем

$$n_l \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\eta_{lj}^2}{j^2} \leq n_l m_l^{-2} \sum_{j=m_l}^{\infty} \eta_{lj}^2 \asymp n_l^{1-2r} m_l^{-2} \asymp C_l^{\frac{2r-1}{2r}} = o(1). \quad (\text{A.65})$$

По теореме 7.1 (A.65) означает несостоятельность последовательности альтернатив $\tilde{f}_l$. $\square$

Доказательство теоремы 7.3. В силу леммы A.9 достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $n_0(\varepsilon)$, такое что для $n > n_0(\varepsilon)$

$$|\mathbf{P}(T^2(b(F_n(t) + F_{1n}(t) - F_0(t)) + \sqrt{n}(F_n(t) + F_{1n}(t) - 2F_0(t))) > x_\alpha) - \mathbf{P}(T^2(b(F_n(t)) + \sqrt{n}(F_n(t) - F_0(t))) > x_\alpha)| < \varepsilon. \quad (\text{A.66})$$

Так как T является нормой, в силу леммы A.12 доказательство (A.66) сводится к доказательству того, что для всякого $\delta_1 > 0$

$$\mathbf{P}(|T(b(F_n(t) + F_{1n}(t) - F_0(t))) - T(b(F_n(t)))| > \delta_1) = o(1), \quad (\text{A.67})$$

и найдется последовательность δ_n , $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, такая что

$$n^{1/2} |T(F_n(t) + F_{1n}(t) - 2F_0(t)) - T(F_n(t) - F_0(t))| < \delta_n. \quad (\text{A.68})$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & |T(b(F_n(t) + F_{1n}(t) - F_0(t))) - T(b(F_n(t)))| \\ & \leq T(b(F_n(t)) + F_{1n}(t) - F_0(t)) - b(F_n(t)) \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

и

$$|T(F_n(t) + F_{1n}(t) - 2F_0(t)) - T(F_n(t) - F_0(t))| \leq T(F_{1n}(t) - F_0(t)). \quad (\text{A.70})$$

Применяя лемму A.10, получаем

$$\mathbf{E} T^2(b(F_n(t) + F_{1n}(t) - F_0(t)) - b(F_n(t))) \leq T^{1/4}(F_{1n} - F_0) = o(1). \quad (\text{A.71})$$

Из (A.69) и (A.71) следует (A.67).

Так как последовательность альтернатив f_{1n} несостоятельна, то

$$n T^2(F_{1n}(t) - F_0(t)) = o(1) \quad (\text{A.72})$$

при $n \rightarrow \infty$. Из (A.70) и (A.72) следует (A.68). $\square$

Доказательство аналога теоремы 4.6. Имеет место $f_n = f_{1n} + f_{2n}$, где $f_{1n} = \sum_{j < ck_n} \theta_{nj} \phi_j$ и $f_{2n} = \sum_{j \geq ck_n} \theta_{nj} \phi_j$. Обозначим F_{1n} и F_{2n} — функции распределения плотностей $1 + f_{1n}$ и $1 + f_{2n}$ соответственно. Тогда, используя неравенство

$$|T(F_n - F_0) - T(F_{1n} - F_0)| < T(F_n - F_{1n}) \quad (\text{A.73})$$

и применяя те же самые оценки, что и при доказательстве теоремы 7.3, получаем утверждение теоремы. Мы опустим детальные рассуждения. $\square$

Теорема 7.1, G1 и В сводят доказательство теоремы 7.4 к анализу сумм $\sum_{ck_n < j < Ck_n} \theta_{nj}^2$ при $C > c$. Такой анализ уже был проведен в под-секции А.2 с другими параметрами r и s . Мы опустим доказательство теоремы 7.4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. T. Anderson, *The integral of a symmetric unimodal function*. — Proc. Amer. Math. Soc. **6**, No. 1 (1955), 170–176.
2. F. Autin, M. Clausel, J. Jean-Marc Freyermuth, C. Marteau, *Maxiset point of view for signal detection in inverse problems*. — (2018) [arxiv 1803.05875](#).
3. A. Cohen, R. DeVore, G. Kerkycharian, D. Picard, *Maximal spaces with given rate of convergence for thresholding algorithms*. — Appl. Comput. Harmon. Anal. **11** (2001), 167–191.
4. H. Engl, M. Hanke, A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*. — Kluwer Academic Publishers (1996).
5. М. С. Ермаков, *Минимаксное обнаружение сигнала в гауссовском белом шуме*. — Теория вероятн. и ее примен. **35**, No. 4 (1990), 704–715.
6. М. С. Ермаков, *Асимптотическая минимаксность критериев хи-квадрат*. — Теория вероятн. и ее примен. **42**, No. 4 (1997), 668–695.
7. M. S. Ermakov, *On asymptotic minimaxity of kernel-based tests*. — ESAIM Probab. Stat. **7** (2003), 279–312.
8. М. С. Ермаков, *Минимаксное обнаружение сигнала в весовом гауссовском белом шуме*. — Зап. научн. сем. ПОМИ **320** (2004), 54–68.
9. М. С. Ермаков, *О состоятельной проверке гипотез*. — Зап. научн. сем. ПОМИ **442** (2015), 48–74.
10. М. С. Ермаков, *Об асимптотически минимаксном обнаружении сигнала в гауссовском белом шуме*. — Зап. научн. сем. ПОМИ **474** (2018), 124–138.
11. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, *Об оценке бесконечномерного параметра в гауссовом белом шуме*. — Докл. АН СССР **236**, No. 5 (1977), 1053–1055.
12. Ю. И. Ингстер, *О сравнении минимаксных свойств тестов Колмогорова, ω^2 и χ^2* . — Теория вероятн. и ее примен. **32**, No. 2 (1987), 374–378.

13. Yu. I. Ingster, I. A. Suslina, *Nonparametric Goodness-of-fit Testing under Gaussian Models*. — Lecture Notes in Statistics **169** Springer: N.Y. (2002).
14. I. M. Johnstone, *Gaussian estimation. Sequence and wavelet models*. — Book Draft <http://statweb.stanford.edu/~imj/> (2015).
15. G. Kerkycharian, D. Picard, *Density estimation by kernel and wavelets methods: optimality of Besov spaces*. — Statist. Probab. Lett. **18** (1993), 327–336.
16. G. Kerkycharian, D. Picard, *Minimax or maxisets?* — Bernoulli **8** (2002), 219–253.
17. L. Le Cam, L. Schwartz, *A necessary and sufficient conditions for the existence of consistent estimates*. — Ann. Math. Statist. **31** (1960), 140–150.
18. L. Le Cam, *Convergence of estimates under dimensionality restrictions*. — Ann. Statist. **1** (1973), 38–53.
19. E. L. Lehmann, J. P. Romano, *Testing Statistical Hypothesis*. Springer Verlag, NY (2005).
20. V. Rivoirard, *Maxisets for linear procedures*. — Statist. Probab. Lett. **67** (2004), 267–275.
21. G. R. Shorack, J. A. Wellner, *Empirical Processes with Application to Statistics*. J. Wiley Sons NY (1986).
22. L. Schwartz, *On Bayes procedures*. — Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **4** (1965), 10–26.
23. A. Tsybakov, *Introduction to Nonparametric Estimation*. Berlin: Springer (2009).
24. П. Л. Ульянов, *О рядах Хаара*. — Матем. сб. **63(105)**, No. 2 (1964), 356–391.
25. Д. М. Чибисов, *К исследованию асимптотической мощности критериев согласия*. — Теория вероятн. и ее примен. **10**, No. 3 (1965), 460–478.

Ermakov M. S. On uniform consistency of nonparametric tests.

We provide necessary and sufficient conditions of uniform consistency of nonparametric sets of alternatives for widespread nonparametric tests. Nonparametric sets of alternatives can be defined both in terms of distribution function and density (or signals in the problem of signal detection in Gaussian white noise).

Институт проблем машиноведения РАН
Большой пр. В.О., 61;
С.-Петербургский государственный
университет, Университетский пр., 28,
Петродворец, 198504 С.-Петербург
Россия
E-mail: erm2512@gmail.com

Поступило 6 ноября 2019 г.