Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 486, 2019 г.

Я. С. Голикова

О ВЫЧИСЛЕНИИ КОНСТАНТ В НЕРАВЕНСТВАХ АРАКА ДЛЯ ФУНКЦИЙ КОНЦЕНТРАЦИИ СВЕРТОК ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В настоящей работе оцениваются абсолютные постоянные в неравенствах Арака для функций концентрации сверток вероятностных распределений, что позволит в дальнейшем оценивать постоянную в оценке близости в метрике Колмогорова n и $(n+1)$-кратных сверток одномерных симметричных вероятностных распределений с отделенной от -1 характеристической функцией вида $\rho(F^n, F^{n+1}) \leqslant \frac{c}{n}$, а также ряда других оценок, в частности точности аппроксимации выборок из редких событий пуассоновским точечным процессом. Как было отмечено Роосом [2], для многих современных оценок численное значение констант неизвестно, что делает невозможным их практическое применение, поскольку, хотя аппроксимация порядка $\frac{c}{n}$ и убывает быстрее, чем оценка вида $\frac{c}{\sqrt{n}}$, однако о последних известно что они становятся информативными при достаточно малых n. Например, в работе автора [3] показано, что оценка $\rho(F^n, F^{n+1}) \leqslant \frac{c}{\sqrt{nq(1-q)}}$ информативна при $n \geqslant 35$ (злесь 0 является q-квантилью распределения F, а $c \leqslant 4.132847$).

Введем некоторые обозначения, которые будут использоваться в работе.
$[X]_\delta$ – замкнутая δ-окрестность множества X;
$\mathcal{F}$ – множество вероятностных распределений на вещественной прямой;
Для $F \in \mathcal{F}$, закона распределения случайной величины ξ, и $\alpha \in \mathbf{R}$ обозначим $F^{(\alpha)}$ – закон распределения случайной величины $\alpha\xi$;
$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$ – множество симметричных распределений;
$\mathfrak{H}_\tau \subset \mathcal{F}$, $\tau \geqslant 0$, – множество распределений, сосредоточенных на отрезке $[-\tau; \tau]$;
$\widehat{F}$ – характеристическая функция распределения F;

Ключевые слова: неравенства, функции концентрации, оценка абсолютной постоянной.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов СПбГУ-ННИО 6.65.37.2017 и РФФИ 19-01-00356.

$Q(F,\,\tau)=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} F\{[x,x+\tau]\}$ – функция концентрации распределения F;
На протяжении всей статьи c_i будут обозначать абсолютные постоянные, причем константы с одинаковыми индексами совпадают.

Чтобы охарактеризовать сложность строения конкретного конечного множества, необходимо задать способ сравнения сложности строения множеств. Для этого мы зададим абстрактную шкалу сложности.

Следуя [1], под заданием шкалы сложности мы будем подразумевать задание некоторого частично упорядоченного множества $\mathbf{\Xi}=\{\alpha\}$ и сопоставление каждому элементу $\alpha\in\mathbf{\Xi}$ семейства $\mathfrak{R}_\alpha$ конечных множеств вещественных чисел, интерпретируемого как "семейство множеств со сложностью, не превосходящее α". Заметим, что $\bigcup\limits_\alpha \mathfrak{R}_\alpha$ не покрывает совокупность всех конечных множеств вещественных чисел.

Далее в работе мы будем пользоваться шкалой сложности, устроенной следующим образом. Для любых $l\in\mathbf{Z}_+$ и $\mathbf{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_l)\in\mathbf{R}^l$ определим множество

$$K_1(\mathbf{u})=\Big\{\sum_{i=1}^{l} n_i u_i\ :n_i\in\{-1,0,1\}\text{ при } i=1,\ldots,l\Big\}. \tag{1}$$

Положим

$$\mathfrak{R}_l=\{K_1(\mathbf{u}\ :\mathbf{u}\in\mathbf{R}^l)\},\quad l=0,1,2,\ldots.$$

Семейство $\mathfrak{R}_0$ состоит из единственного множества $K_1(\,)=\{0\}$. Семейство $\mathfrak{R}_1$ содержит и трехточечные множества вида $\{-u_1,0,u_1\}$. Ясно, что при увеличении l охватываются все более сложные множества. С помощью приведенных в данной статье теорем можно оценить меру сосредоточенности вероятностных распределений вблизи замкнутых множеств вида $K_1(\mathbf{u})$.

Заметим, что если распределения $F_1,\ldots,F_m$ сосредоточены на множестве $[K_1(\mathbf{u})]_\tau$ (обозначение (1)), то распределение $F=F_1F_2\cdots F_m$ (здесь и далее произведения и степени распределений понимаются в смысле свертки) сосредоточено в замкнутой $m\tau$-окрестности множества

$$K_m(\mathbf{u})=\Big\{\sum_{i=1}^{l} n_i u_i\ :n_i\in\{-m,-m+1,\ldots,m\}\text{ при } i=1,\ldots,l\Big\}. \tag{2}$$

Приведенные далее теоремы 1–3 и лемма 1 взяты из монографии [1, гл. II, §3]. В статье будут оценены все константы из данных утверждений. Для этого потребуется обратиться к доказательствам, приведенным в [1, гл. II, §3]. Отметим, что доказательства, приведенные в данной статье, будут несколько отличаться от доказательств в [1].

Лемма 1. *Пусть $F \in \mathcal{F}_s$, $\alpha > 0$, $\tau > 0$. Положим*

$$\varepsilon = \frac{\tau}{2} \int\limits_{|t|<1/\tau} e^{\alpha(\widehat{F}(t)-1)} dt.$$

Тогда существуют такие $l \in \mathbf{Z}_+$ и $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_l) \in \mathbf{R}^l$, что

$$l \leqslant c_1 \left(|\ln \varepsilon| + 1\right); \tag{3}$$

$$F\{\mathbf{R} \backslash [K_1(\mathbf{u})]_\tau\} \leqslant \frac{c_2 \left(|\ln \varepsilon| + 1\right)^3}{\alpha}, \tag{4}$$

где $c_1 < 6.237$, $c_2 < 103.8$.

Теорема 1. *Пусть $F_i \in \mathcal{F}$ при $i = 1, \dots, n$. Положим*

$$\gamma = Q\Big(\prod_{i=1}^n F_i,\, \tau\Big).$$

Тогда существует такой вектор $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_l)$ и такие числа $x_1, \dots, x_n$, что

$$l \leqslant c_4 \left(|\ln \gamma| + 1\right);$$

$$\sum_{i=1}^n F_i\{\mathbf{R} \backslash [K_1(\mathbf{u})]_\tau + x_i\} \leqslant c_5 \left(|\ln \gamma| + 1\right)^3,$$

где $c_4 < 7.267$, $c_5 < 603.4$.

В качестве следствия из теоремы 1 несложно получить следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $F \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbf{N}$, $\geqslant 0$. Положим $\gamma = Q(F^n, \tau)$. Тогда существует такой вектор $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_l)$, что*

$$l \leqslant c_4 \left(|\ln \gamma| + 1\right);$$

$$F\{\mathbf{R} \backslash [K_1(\mathbf{u})]_\tau\} \leqslant c_5 \left(|\ln \gamma| + 1\right)^3 n^{-1}.$$

Теорема 3. *Пусть D – безгранично делимое распределение со спектральной мерой Леви G. Положим $\gamma = Q(D,\tau)$. Тогда существует такой вектор $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_l)$, что*

$$l \leqslant c_4\,(|\ln\gamma| + 1);$$

$$G\{\mathbf{R}\backslash[K_1(\mathbf{u})]_\tau\} \leqslant c_6\,(|\ln\gamma| + 1)^3,$$

где $c_6 = c_5/2 < 301.7$.

При доказательствах леммы 1 и теорем 1–3 нам потребуются некоторые неравенства для характеристических функций и функции концентрации.

Теорема 4. (*неравенство для приращений*). *Пусть $F \in \mathcal{F}$. Тогда для любых $t,\ h \in \mathbf{R}$*

$$|\widehat{F}(t+h) - \widehat{F}(t)|^2 \leqslant 2\,(1 - \mathrm{Re}\widehat{F}(h)).$$

Теорема 5. *Пусть $F \in \mathfrak{H}_\tau$, $\int\limits_{\mathbf{R}} x\,F\{dx\} = 0$, $\sigma^2 = \int\limits_{\mathbf{R}} x^2\,F\{dx\}$. Тогда при $|t| \leqslant \tau^{-1}$ справедливы неравенства*:

$$\sigma^2\,t \leqslant 1; \tag{5}$$

$$|\exp(\widehat{F}(t) - 1)| \leqslant \exp\Big(-\frac{1}{3}\,\sigma^2 t^2\Big); \tag{6}$$

$$|\widehat{F}(t)| \leqslant 1 - \frac{1}{3}\sigma^2 t^2 \leqslant \exp\Big(-\frac{1}{3}\,\sigma^2 t^2\Big); \tag{7}$$

и при всех $t \in \mathbf{R}$ имеют место оценки

$$|\widehat{F}(t) - 1| \leqslant \frac{1}{2}\,\sigma^2 t^2 \leqslant \tau^2 t^2; \tag{8}$$

$$\Big|\frac{\widehat{F}(t)}{dt}\Big| \leqslant \sigma^2\,|t|. \tag{9}$$

Лемма 2. *При любом $\tau > 0$ имеет место неравенство*

$$Q(F,\tau) \leqslant \Big(\frac{96}{95}\Big)^2\,\tau \int\limits_{|t|<\frac{1}{\tau}} |\widehat{F}(t)|\,dt.$$

Доказательства теорем 4, 5 и леммы 2 можно посмотреть в [1, гл. I, §1 и гл. II, §1].

Доказательство леммы 1. Следуя [1], разделим доказательство на 4 этапа.

I этап. Введение вспомогательной меры μ. Пусть μ – вероятностное распределение на пряиой с плотностью

$$p_\mu(t) \quad = \quad \begin{cases} \frac{\tau\, e^{\alpha\,(\widehat{F}(t)-1)}}{2\varepsilon} & \text{при} \quad |t| \leqslant 1/\tau, \\ 0 & \text{при} \quad |t| > 1/\tau. \end{cases}$$

Так как распределение μ симметрично, то его характеристическая функция $\widehat{\mu}(t)$ является четной, а также принимает только вещественные значения. По теореме Римана–Лебега,

$$\lim_{x\to\infty} \widehat{\mu}(x) = 0. \tag{10}$$

Так как распределение μ сосредоточено на $[-1/\tau; 1/\tau]$, то по теореме 5 имеем:

$$1 - \widehat{\mu}(x) \leqslant \frac{x^2}{2\tau^2}. \tag{11}$$

С помощью равенства Парсеваля можно получить оценку

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\mu}(x)|^2 = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\mu^2(t) dt \leqslant 2\pi \sup_{t\in\mathbf{R}} p_\mu(t) \\ = 2\pi \sup_{t\in\mathbf{R}} \tau e^{\alpha\,(\widehat{F}(t)-1)}/2\varepsilon = \frac{\pi\tau}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{12}$$

Докажем следующее утверждение:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 - \widehat{\mu}(x)) F\{dx\} \leqslant \frac{\ln\varepsilon}{\alpha}. \tag{13}$$

Применим равенство Парсеваля к левой части (13):

$$\int\limits_{\mathbf{R}} (1-\widehat{\mu}(x)) F\{dx\} = \int\limits_{\mathbf{R}} (1-\widehat{F}(t))\mu\{dt\} = \frac{\tau}{2\varepsilon} \int\limits_{|t|<1/\tau} e^{\alpha(\widehat{F}(t)-1)}(1-\widehat{F}(t))\, dt.$$

Представим выражение $\frac{\tau}{2\varepsilon} \int\limits_{|t|<1/\tau} e^{\alpha(\widehat{F}(t)-1)}(1 - \widehat{F}(t))\, dt$ в виде $\frac{\mathbf{E} f(e^{\alpha(\widehat{F}(\xi)-1)})}{\alpha\varepsilon}$, где $f(x) = -x\ln x$, а ξ – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[-\frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau}]$. Функция $f(x)$ выпукла вверх при $x > 0$, следовательно мы можем применить неравенство ЙенсенаL

$$\mathbf{E} f(e^{\alpha(\widehat{F}(\xi)-1)}) \leqslant f(\mathbf{E} e^{\alpha(\widehat{F}(\xi)-1)} = \varepsilon|\ln\varepsilon| \Rightarrow \frac{\mathbf{E} f(e^{\alpha(\widehat{F}(\xi)-1)})}{\alpha\varepsilon} \leqslant \frac{|\ln\varepsilon|}{\alpha}.$$

Таким образом, утверждение (13) доказано.

II этап. Построение вектора u. Введем число

$$\chi = \frac{1}{8\,(\log_2\frac{\pi}{\varepsilon} + \log_2 12 + 1 + \delta)^2}, \tag{14}$$

где $\delta > 0$. В дальнейших вычислениях $\delta = 10^{-4}$.
Построим вектор $\mathbf{u}$ следующим образом:

(1) положим $\mathbf{u}^0 = (\quad)$;
(2) определим X_k, u_{k+1}, $\mathbf{u}^{k+1}$ для $k = 0, 1, \dots$ следующими равенствами:

$$X_k = \{x : x \in \mathbf{R}\backslash[K_1(\mathbf{u}^k)]_\tau, \quad 1 - \widehat{\mu}(x) \leqslant \chi\},$$
$$u_{k+1} = \sup X_k, \quad \mathbf{u}^{k+1} = (u_1, \dots, u_{k+1}) \in \mathbf{R}^{k+1},$$

продолжая до тех пор, пока $X_k \neq \varnothing$;
(3) определим l как первый индекс, такой что $X_l = \varnothing$, и положим $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_l)$.

III этап. Доказательство неравенства (3). Докажем, что описанный на этапе II процесс заканчивается за конечное число шагов и при этом

$$l \leqslant (8\chi)^{-1/2} = \log_2\frac{\pi}{\varepsilon} + \log_2 12 + 1 + \delta. \tag{15}$$

Предположим противное: пусть $X_k \neq \varnothing$ при $k \leqslant r$, где

$$r = [(8\chi)^{-\frac{1}{2}}] = [\log_2\frac{\pi}{\varepsilon} + \log_2 12 + 1 + \delta]. \tag{16}$$

Введем множество

$$K^+ = \Big\{\sum_{i=1}^{r} n_i\, u_i : n_i \in \{0, 1\} \text{ при } i = 1, \dots, r\Big\}.$$

Рассмотрим две точки $x_1 = \sum\limits_{i=1}^{r} n_i\, u_i$ и $x_2 = \sum\limits_{i=1}^{r} m_i\, u_i$, соответствующие двум различным векторам $(n_1, \dots, n_r)$ и $(m_1, \dots, m_r)$, составленным из нулей и единиц. Эти две точки x_1 и x_2 отделены друг от друга на расстояние не меньше τ. Действительно, положим $v = \max\{i : n_i \neq m_i\}$. Тогда $|n_v - m_v| = 1$, и из определения чисел $u_1, u_2, \ldots$ получаем:

$$|x_1 - x_2| = \Big| u_v - \sum_{i=1}^{v-1} \frac{n_i - m_i}{n_v - m_v} \Big| \geqslant \tau.$$

Нетрудно заметить, что $|K^+| = 2^r$,

$$[K^+]_{\tau/2} = \bigcup_{x \in K^+} [\{x\}]_{\frac{\tau}{2}}, \quad \text{при этом}$$

$$\forall\, x_1, x_2 \in K^+ : \, x_1 \neq x_2 \quad [\{x_1\}]_{\frac{\tau}{2}} \cap [\{x_2\}]_{\frac{\tau}{2}} = \varnothing. \tag{17}$$

Рассмотрим выражение $\int\limits_{[K^+]_{\tau/2}} |\widehat{\mu}(y)|^2 \, dy$ и оценим его сверху и снизу. Применяя (12), получим оценку сверху:

$$\int\limits_{[K^+]_{\tau/2}} |\widehat{\mu}(y)|^2 \, dy \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\mu}(y)|^2 \, dx \leqslant \frac{\pi \tau}{\varepsilon}. \tag{18}$$

Получим теперь нижнюю оценку.

Пусть x – произвольная точка множества K^+, то есть $x = \sum\limits_{i=1}^{r} n_i \, u_i$, $u_i \in \{0, 1\}$ при $i = 1, \ldots, r$. Положим $x_0 = 0$ и $x = \sum\limits_{j=1}^{i} n_j \, u_j$ при $i = 1$, …, $r - 1$. Применяя теорему 4, получим:

$$\begin{aligned}1 - \widehat{\mu}(x) &= \sum_{i=1}^{r} (\widehat{\mu}(x_{i-1}) - \widehat{\mu}(x_{i-1} + n_i u_i)) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{r} |\widehat{\mu}(x_{i-1}) - \widehat{\mu}(x_{i-1} + u_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{r} \sqrt{2\,(1 - \widehat{\mu}(u_i))}.\end{aligned}$$

Используя последнее неравенство, а также (16) и тот факт, что из определения u_i следует $1 - \widehat{\mu}(u_i) \leqslant \chi$, получим:

$$\widehat{\mu}(x) \geqslant 1 - r\,\sqrt{2\chi} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{19}$$

Учитывая (17), имеем:

$$\int\limits_{[K^+]_{\tau/2}} |\widehat{\mu}(y)|^2 \, dy = \sum_{x \in K^+} \int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |\widehat{\mu}(x + s)|^2 \, ds.$$

Оценим снизу $\widehat{\mu}(x+s)$ с помощью теоремы 4 и неравенств (11) и (19):

$$\widehat{\mu}(x+s) \geqslant \widehat{\mu}(s) - |\widehat{\mu}(x+s) - \widehat{\mu}(x)| \geqslant \frac{1}{2} - \sqrt{2(1-\widehat{\mu}(s))}$$
$$\geqslant \frac{1}{2} - \sqrt{2\frac{s^2}{2\tau^2}} = \frac{1}{2} - \left|\frac{s}{\tau}\right|. \tag{20}$$

Учитывая $|K^+| = 2^r$ и (20), получим

$$\int\limits_{[K^+]_{\tau/2}} |\widehat{\mu}(y)|^2\,dy = \sum_{x\in K^+} \int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |\widehat{\mu}(x+s)|^2\,ds \geqslant 2^r \int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \Big(\frac{1}{2} - \Big|\frac{s}{\tau}\Big|\Big)^2\,ds$$
$$\geqslant 2^r\, 2 \int\limits_0^{1/2} (\frac{1}{2} - t)^2 \tau\,dt = \frac{1}{12}\, 2^r\, \tau. \tag{21}$$

Таким образом, мы получили оценку

$$\frac{1}{12}\, 2^r\, \tau \leqslant \int\limits_{[K^+]_{\tau/2}} |\widehat{\mu}(y)|^2\,dy \leqslant \frac{\pi\tau}{\varepsilon},$$

откуда следует:

$$r \leqslant \log_2 \frac{12\pi}{\varepsilon} = \log_2 \frac{\pi}{\varepsilon} + \log_2 12. \tag{22}$$

Но это неравенство противоречит (16). Из этого противоречия вытекает конечность процесса, описанного на этапе II, а также неравенство (15). Отсюда несложно получить неравенство (3). Действительно,

$$l \leqslant (8\chi)^{-\frac{1}{2}} = \log_2 \frac{\pi}{\varepsilon} + (\log_2 12 + 1 + \delta)$$
$$\leqslant \frac{1}{\ln 2}(|\ln\varepsilon| + \ln\pi + (\log_2 12 + 1 + \delta)\ln 2)$$
$$\leqslant (\log_2 \pi + \log_2 12 + 1 + \delta)(|\ln\varepsilon| + 1) = c_1(|\ln\varepsilon| + 1), \tag{23}$$

где $c_1 = \log_2 \pi + \log_2 12 + 1 + \delta < 6.237$.

IV этап. Доказательство неравенства (4). Так как $X_l = \varnothing$, то

$$\mathbf{R}\backslash[K_1((u))]_\tau \subset \{x \,:\, 1 - \widehat{\mu}(x) > \chi\}.$$

Из этого, а также из неравенства (13) следует, что

$$\begin{aligned}F\{\mathbf{R}\backslash[K_1(\mathbf{u})]_\tau\} &\leqslant F\{\{x : 1-\widehat{\mu}(x) > \chi\}\}\\ &\leqslant \frac{1}{\chi}\int\limits_{\mathbf{R}}(1-\widehat{\mu}(x))\,F\{dx\} \leqslant \frac{|\ln\varepsilon|}{\alpha\chi}\\ &= \frac{8\,|\ln\varepsilon|\,(\log_2\frac{\pi}{\varepsilon}+\log_2 12+1+\delta)^2}{\alpha} \leqslant \frac{8\,\frac{c_1^2}{3}\,(|\ln\varepsilon|+1)^3}{\alpha}\\ &= \frac{c_2\,(|\ln\varepsilon|+1)^3}{\alpha},\end{aligned} \tag{24}$$

где $c_2 = \frac{8}{3}c_1^2 < 103.8$. В некоторых случаях может быть целесообразнее пользоваться промежуточной оценкой:

$$\begin{aligned}F\{\mathbf{R}\backslash[K_1(\mathbf{u})]_\tau\} &\leqslant \frac{8\,|\ln\varepsilon|\,(\log_2\frac{\pi}{\varepsilon}+\log_2 12+1+\delta)^2}{\alpha}\\ &\leqslant \frac{8}{\ln^2 2}\frac{(|\ln\varepsilon|+\frac{2}{3}\,c_1\,\ln 2))^3}{\alpha} = \frac{c_2^*(|\ln\varepsilon|+c_2^{**})}{\alpha},\end{aligned} \tag{25}$$

где $c_2^* = \frac{8}{\ln^2 2} < 16.66$, $c_2^{**} = \frac{2}{3}\,c_1\,\ln 2 < 2.882$.
Таким образом, лемма 1 доказана. □

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим сначала случай $\tau > 0$. Применим лемму 1 к распределению

$$F = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i^*,$$

где $F_i^* = F_i\,F_i^{(-1)}$, полагая $\alpha = \frac{n}{2}$. Пусть l и $\mathbf{u}$ таковы, что выполнены неравенства (3) и (4). Используя лемму 2, неравенство $x \leqslant e^{x-1}$ и $\widehat{F_i^*}(t) = |\widehat{F}_i(t)|^2$, находим следующее:

$$\begin{aligned}\gamma &\leqslant \Big(\frac{96}{95}\Big)^2\tau\int\limits_{|t|<\frac{1}{\tau}}\Big|\prod_{i=1}^{n}\widehat{F}_i(t)\Big|\,dt = \Big(\frac{96}{95}\Big)^2\tau\int\limits_{|t|<\frac{1}{\tau}}\Big(\prod_{i=1}^{n}\widehat{F_i^*}(t)\Big)^{\frac{1}{2}}dt\\ &\leqslant \Big(\frac{96}{95}\Big)^2\tau\int\limits_{|t|<\frac{1}{\tau}}\exp\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{F_i^*}-1)\Big)\,dt = 2\Big(\frac{96}{95}\Big)^2\varepsilon,\end{aligned}$$

где ε – число, определяемое в лемме 1. Отсюда следует, что

$$|\ln\varepsilon| \leqslant |\ln\gamma| + \ln 2 + 2\ln\Big(\frac{96}{95}\Big) = |\ln\gamma| + c_3.$$

Из последнего выражения и (23) получаем:

$$\begin{aligned} l &\leqslant \log_2 \frac{\pi}{\varepsilon} + \log_2 12 + 1 + \delta \leqslant \frac{1}{\ln 2}(|\ln\varepsilon| + \ln\pi + (\log_2 12 + 1 + \delta)\ln 2) \\ &\leqslant \frac{1}{\ln 2}(|\ln\gamma| + c_3 + \ln\pi + (\log_2 12 + 1 + \delta)\ln 2) \\ &\leqslant \Big(\frac{c_3}{\ln 2} + c_1\Big)(|\ln\gamma| + 1) = c_4\,(|\ln\gamma| + 1), \end{aligned}$$

где $c_4 = (\frac{c_3}{\ln 2} + c_1) < 7.267$.

Заметим, что для любого борелевского $X \subset \mathbf{R}$, в том числе и для $X = \mathbf{R}\backslash[K_1((u))]_\tau$, имеем:

$$F\{X\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i^*\{X\} \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \inf_{x_i\in\mathbf{R}} F_i\{X + x_i\}.$$

Таким образом, учитывая (24),

$$\begin{aligned} F\{\mathbf{R}\backslash[K_1(\mathbf{u})]_\tau\} &\leqslant \frac{2}{n}\,8\,|\ln\varepsilon|\,(\log_2\frac{\pi}{\varepsilon} + \log_2 12 + 1 + \delta)^2 \\ &\leqslant \frac{16}{n}(|\ln\gamma| + c_3)\left(\frac{1}{\ln 2}(|\ln\gamma| + c_3 + \ln\pi + (\log_2 12 + 1 + \delta)\ln 2)\right)^2 \\ &\leqslant \frac{16}{n(\ln 2)^2}(c_3(c_3 + \ln\pi + (\log_2 12 + 1 + \delta)\ln 2)^2)(|\ln\gamma| + 1)^3 \\ &= \frac{16\,c_3}{n}\left(\frac{c_3}{\ln 2} + c_1\right)^2(|\ln\gamma| + 1)^3 = \frac{16\,c_3}{n}\,c_4^2(|\ln\gamma| + 1)^3, \end{aligned}$$

откуда получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i\{\mathbf{R}\backslash[K_1(\mathbf{u})]_\tau + x_i\} \leqslant 16\,c_3\,c_4^2(|\ln\gamma| + 1)^3 = c_5\,(|\ln\gamma| + 1)^3,$$

где $c_5 = 16\,c_3\,c_4^2 < 603.4$.

При $\tau = 0$ оценка получается предельным переходом. □

Доказательство теоремы 3. В случае, когда мера G конечна и $\tau > 0$, применим лемму 1, полагая $F = (2G\{\mathbf{R}\})^{-1}(G + G^{(-1)})$ и $\alpha = G\{\mathbf{R}\}$. В силу того, что множество $K_1(\mathbf{u})$ симметрично относительно начала координат, имеем $G\{\mathbf{R}\backslash[K_1(\mathbf{u})]_\tau\} = G^{(-1)}\{\mathbf{R}\backslash[K_1(\mathbf{u})]_\tau\}$, откуда $G\{\mathbf{R}\backslash[K_1(\mathbf{u})]_\tau\} = \alpha F\{\mathbf{R}\backslash[K_1(\mathbf{u})]_\tau\}$. Учитывая лемму 2, имеем:

$$\gamma \leqslant \left(\frac{96}{95}\right)^2 \tau \int\limits_{|t|<\frac{1}{\tau}} |\widehat{D}(t)|\,dt \leqslant \left(\frac{96}{95}\right)^2 \tau \int\limits_{|t|<\frac{1}{\tau}} e^{\alpha(\widehat{F}(t)-1)} = 2\left(\frac{96}{95}\right)^2 \varepsilon, \quad (26)$$

где ε – число, определяемое в лемме 1. Отсюда, аналогично доказательству теоремы 1,

$$|\ln\varepsilon| \leqslant |\ln\gamma| + 2\left(\frac{96}{95}\right)^2 \leqslant |\ln\gamma| + c_3$$

и

$$\begin{aligned} l &\leqslant \log_2\frac{\pi}{\varepsilon} + \log_2 12 + 1 + \delta \leqslant \frac{1}{\ln 2}(|\ln\varepsilon| + c_1\ln 2) \\ &\leqslant \frac{1}{\ln 2}(|\ln\gamma| + c_3 + c_1\ln 2) \\ &\leqslant \left(\frac{c_3}{\ln 2} + c_1\right)(|\ln\gamma| + 1) = c_4\,(|\ln\gamma| + 1), \end{aligned}$$

где $c_4 = (\frac{c_3}{\ln 2} + c_1) < 7.267$.
Осталось доказать второе неравенство теоремы. Используя (4), получим:

$$\begin{aligned} G\{\mathbf{R}\backslash[K_1(\mathbf{u})]_\tau\} &= \alpha F\{\mathbf{R}\backslash[K_1(\mathbf{u})]_\tau\} \\ &\leqslant 8|\ln\varepsilon|(\log_2\frac{\pi}{\varepsilon} + (\log_2 12 + 1 + \delta))^2 \\ &= \frac{1}{2}c_5(|\ln\gamma| + 1)^3. \end{aligned} \tag{27}$$

□

Список литературы

1. Т. В. Арак, А. Ю. Зайцев, *Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* — Тр. МИАН СССР **174** (1986), 3–214.
2. B. Roos, *On Hipp's compound Poisson approximations via concentration functions.* — Bernoulli **11**, No. 3 (2005), 533–557.
3. Я. С. Голикова *Об улучшении оценки расстояния между распределениям последовательных сумм независимых случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **474** (2018), 118–123.

Golikova Ia. S. On the calculation of constants in the Arak inequalities for the concentration functions of convolutions of probability distributions.

The aim of present work is evaluation of the absolute constants in the Arak inequalities for the concentration functions of convolutions of probability distributions. This result will subsequently allow us to calculate the constant in the inequality for the uniform distance between n and

$(n+1)$-fold convolutions of one-dimensional symmetric probability distributions with a characteristic function separated from -1, as well as a number of other estimates, in particular, the accuracy of the approximation of samples of rare events by the Poisson point process.

С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7/9
Санкт-Петербург,
199034 Россия
Балтийский государственный технический
университет "Военмех" им. Д. Ф. Устинова,
1-я Красноармейская, д.1
С.-Петербург, 190005 Россия
E-mail: laviniaspb@gmail.com

Поступило 6 ноября 2019 г.