Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 486, 2019 г.

Ф. Гётце, А. Ю. Зайцев, Д. Н. Запорожец

УЛУЧШЕННЫЙ МНОГОМЕРНЫЙ ВАРИАНТ ВТОРОЙ РАВНОМЕРНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ КОЛМОГОРОВА

§1. Введение

Зафиксируем некоторое натуральное число $n \in \mathbf{N}$ и рассмотрим *независимые* случайные величины

$$\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbf{R}^1,$$

которые не обязательно одинаково распределены. Классический результат А. Н. Колмогорова [5] утверждает, что если n велико, то при довольно общих условиях распределение их суммы в *метрике Леви* близко к классу всех безгранично делимых распределений. Для уточнения формулировок нам потребуются некоторые обозначения.

Для случайной величины $\xi \in \mathbf{R}^1$ определим ее *функцию концентрации* как

$$Q(\xi;\tau) := \sup_{x\in\mathbf{R}^1} \mathbf{P}[x \leqslant \xi \leqslant x+\tau].$$

Расстояние Леви между двумя случайными величинами $\xi, \xi' \in \mathbf{R}^1$ определяется как

$$L(\xi,\xi') := \inf\{\lambda > 0 : \mathbf{P}[\xi \leqslant x] \leqslant \mathbf{P}[\xi' \leqslant x+\lambda] + \lambda, \\ \mathbf{P}[\xi' \leqslant x] \leqslant \mathbf{P}[\xi \leqslant x+\lambda] + \lambda \text{ при всех } x \in \mathbf{R}^1\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{D}$ класс всех безгранично делимых случайных величин.

Ключевые слова: суммы независимых случайных величин, выпуклые многогранники, аппроксимация, неравенства.

Авторы были поддержаны SFB 1283. Первый и второй авторы были поддержаны также грантом СПБГУ-ННИО 6.65.37.2017. Второй автор был поддержан также грантом РФФИ 19-01-00356.Второй и третий авторы были поддержаны также Программой фундаментальных исследований РАН «Современные проблемы теоретической математики».

А. Н. Колмогоров [5] показал, что существует такая *абсолютная* постоянная c, что для *произвольных* независимых случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ и для всех $\tau > 0$,

$$\inf_{\eta \in \mathfrak{D}} L(\xi_1 + \dots + \xi_n, \eta) \leqslant c \cdot \big(p^{1/5} + \tau^{1/2}(|\log \tau|^{1/4} + 1)\big), \tag{1}$$

где

$$p := \max\{p_1, \dots, p_n\} \quad \text{и} \quad p_i := 1 - Q(\xi_i; \tau), \ i = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Отметим, что исходный результат в [5] имеет несколько иную форму при $\tau \in (0, 1/2]$, см. замечание 1.2.

Ограничение (2) на распределения слагаемых можно рассматривать как неасимптотический аналог условия предельного постоянства слагаемых в схеме серий независимых случайных величин. Оценка точности аппроксимации может рассматриваться как количественное уточнение классической теоремы Хинчина о множестве безгранично делимых распределений как совокупности предельных законов для распределений сумм, рассматриваемых в схеме серий.

Расстояние Леви метризует слабую сходимость вероятностных распределений на вещественной прямой. Поэтому неравенство Колмогорова (1) доказывает теорему Хинчина, поскольку слабая сходимость при $p \to 0$ и $\tau \to 0$ распределений сумм $\xi_1 + \dots + \xi_n$ к некоторому распределению влечет слабую сходимость к тому же распределению распределений некоторых безгранично делимых величин. Предельное распределение безгранично делимо как предел безгранично делимых распределений. Однако неравенство Колмогорова (1) обеспечивает хорошее безгранично делимое приближение при фиксированных малых p и τ, даже если распределения сумм, участвующих в схеме серий с $p \to 0$ и $\tau \to 0$, не являются относительно компактными.

Методы, использованные Колмогоровым при доказательстве (1), наряду с комбинаторной леммой Шпернера позже были использованы Б. А. Рогозиным [8, 9], чтобы получить результат, который теперь хорошо известен как классическое неравенство Колмогорова–Рогозина: для некоторой абсолютной постоянной c и всех $\tau > 0$

$$Q(\xi_1 + \dots + \xi_n; \tau) \leqslant \frac{c}{\sqrt{p_1 + \dots + p_n}}.$$

Последующие уточнения оценки в правой части (1) были получены в работах [4, 6]. Наконец, оптимальная оценка была получена в работе [13]:

$$\inf_{\eta\in\mathfrak{D}} L(\xi_1+\cdots+\xi_n,\eta) \leqslant c\cdot\big(p+\tau(|\log\tau|+1)\big). \tag{3}$$

Авторы рассмотрели в работе [13] также метрику Леви–Прохорова

$$\begin{aligned}\pi(\xi,\xi') := \inf\big\{\lambda\geqslant 0 : \mathbf{P}[\xi\in B]\leqslant \mathbf{P}[\xi'\in B^\lambda]+\lambda,\\ \mathbf{P}[\xi'\in B]\leqslant \mathbf{P}[\xi\in B^\lambda]+\lambda\\ \text{для всех борелевских множеств } B\big\},\end{aligned}$$

где

$$B^\lambda := \{x\in\mathbf{R}^1 : \inf_{y\in B}|x-y|<\lambda\},$$

и получили оценку

$$\inf_{\eta\in\mathfrak{D}} \pi(\xi_1+\cdots+\xi_n,\eta) \leqslant c\cdot\big(p+\tau(|\log\tau|+1)\big)+\sum_{i=1}^n p_1^2, \tag{4}$$

которая также является оптимальной, Для более глубокого обсуждения предмета мы отсылаем читателя к монографии [1].

Оценки (3) и (4), хотя и являются оптимальными, имеют однако свои недостатки: они не являются инвариантными относительно масштабных преобразований случайных величин. В частности, они перестают быть содержательными при больших τ. По этой причине в работе [10] было предложено следующее обобщение (3) и (4), у которого нет такого рода недостатков: для некоторых абсолютных постоянных $c,\varepsilon>0$ и всех $\lambda,\tau>0$

$$\begin{aligned}&\inf_{\eta\in\mathfrak{D}} L_\lambda(\xi_1+\cdots+\xi_n,\eta) \leqslant c\cdot\big(p+\exp(-\varepsilon\cdot\lambda/\tau)\big),\\ &\inf_{\eta\in\mathfrak{D}} \pi_\lambda(\xi_1+\cdots+\xi_n,\eta) \leqslant c\cdot\big(p+\exp(-\varepsilon\cdot\lambda/\tau)\big)+\sum_{i=1}^n p_1^2,\end{aligned} \tag{5}$$

где $L_\lambda(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ и $\pi_\lambda(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – следующие усовершенствования метрик Леви и Леви–Прохорова:

$$L_\lambda(\xi,\xi') := \sup_{x\in\mathbf{R}^1}\max\{\mathbf{P}[\xi\leqslant x]-\mathbf{P}[\xi'\leqslant x+\lambda],\mathbf{P}[\xi'\leqslant x]-\mathbf{P}[\xi\leqslant x+\lambda]\},$$

$$\pi_\lambda(\xi,\xi') := \sup_{\substack{\text{борелевские}\\ \text{множества } B}}\max\{\mathbf{P}[\xi\in B]-\mathbf{P}[\xi'\in B^\lambda],\mathbf{P}[\xi'\in B]-\mathbf{P}[\xi\in B^\lambda]\}.$$

Последняя величина была впервые рассмотрена в работе [2], а первая – в [10]. Знание $L_\lambda(\,\cdot,\,\cdot,)$ и $\pi_\Lambda(\,\cdot,\,\cdot,)$ дает больше информации о близости распределений случайных величин, чем просто знание $L(\,\cdot,\,\cdot,)$ и $\pi(\,\cdot,\,\cdot,)$. В частности,

$$L(\xi,\xi') := \inf\{\lambda > 0 : L_\lambda(\xi,\xi') < \lambda\}, \qquad (6)$$
$$\pi(\xi,\xi') := \inf\{\lambda > 0 : \pi_\lambda(\xi,\xi') < \lambda\}.$$

Замечание 1.1. Подчеркнем, что (5) – это действительно обобщение (3) и (4): несложно проверить, что из (5) и (6) следуют (3) и (4), подробнее см. в [10].

Замечание 1.2. В работе [5] было по существу доказано, что для всех τ, λ, таких что $0 < 2\tau \leqslant \lambda$, справедливо неравенство

$$\inf_{\eta\in\mathfrak{D}} L_\lambda(\xi_1 + \dots + \xi_n, \eta) \leqslant c \cdot \left(p^{1/5} + \frac{\tau}{\lambda}\log^{1/2}\frac{\lambda}{\tau}\right),$$

из которого вместе с (6) следует (1) при $\tau \in (0, 1/2]$.

§2. Высокие размерности

Проблема, обсуждаемая в предыдущем разделе, может быть естественным образом перенесена на случай большего числа измерений. Пусть теперь $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbf{R}^d$ – независимые d-мерные случайные векторы. Функция концентрации случайного вектора $\xi \in \mathbf{R}^d$ определяется как

$$Q(\xi;\tau) := \sup_{x\in\mathbf{R}^d} \mathbf{P}[|\xi - x| \leqslant \tau], \qquad (7)$$

где при $d = 1$ это определение отличается от предыдущего масштабным коэффициентом 2 в аргументе. Определения $\pi(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ и $\pi_\lambda(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ в $\mathbf{R}^d$ остаются без каких-либо изменений с B^λ, определяемым как

$$B^\lambda := \{x \in \mathbf{R}^d : \inf_{y\in B} |x - y| < \lambda\}.$$

Ситуация с $L(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ и $L_\lambda(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ менее однозначна. В работе [11] были предложены следующие многомерные варианты этих величин. Пусть

$$\mathbf{1}_d := (1, \dots, 1) \in \mathbf{R}^d.$$

Для случайных векторов $\xi, \xi' \in \mathbf{R}^d$ определим

$$L(\xi,\xi') := \inf\{\lambda > 0 : \mathbf{P}[\xi \leqslant x] \leqslant \mathbf{P}[\xi' \leqslant x + \lambda \mathbf{1}_d] + \lambda, \tag{8}$$
$$\mathbf{P}[\xi' \leqslant x] \leqslant \mathbf{P}[\xi \leqslant x + \lambda \mathbf{1}_d] + \lambda \text{ при всех } x \in \mathbf{R}^d\}$$

и

$$L_\lambda(\xi,\xi') := \sup_{x\in\mathbf{R}^d} \max\{\mathbf{P}[\xi \leqslant x] - \mathbf{P}[\xi' \leqslant x + \lambda \mathbf{1}_d],$$
$$\mathbf{P}[\xi' \leqslant x] - \mathbf{P}[\xi \leqslant x + \lambda \mathbf{1}_d]\}. \tag{9}$$

Рассмотрим независимые случайные векторы $\xi_1,\ldots,\xi_n \in \mathbf{R}^d$ и пусть $p, p_1, \ldots, p_n$ определяются как в (2). В работе [11] было показано, что справедлив следующий многомерный вариант (5): для некоторых констант $c_d, \varepsilon_d > 0$, зависящих только от d и всех $\tau, \lambda > 0$

$$\inf_{\eta\in\mathfrak{D}_d} L_\lambda(\xi_1 + \cdots + \xi_n, \eta) \leqslant c_d \cdot \big(p + \exp(-\varepsilon_d \cdot \lambda/\tau)\big), \tag{10}$$

$$\inf_{\eta\in\mathfrak{D}_d} \pi_\lambda(\xi_1 + \cdots + \xi_n, \eta) \leqslant c_d \cdot \big(p + \exp(-\varepsilon_d \cdot \lambda/\tau)\big) + \sum_{i=1}^n p_i^2, \tag{11}$$

где $\mathfrak{D}_d$ обозначает класс всех d-мерных безгранично делимых случайных векторов.

Замечание 2.1. Заметим, что (6) остается верным и в более высоких размерностях. Таким образом, нетрудно показать (подробнее см. в [10]) что из (10) и (6) вытекают многомерные аналоги (3) и (4):

$$\inf_{\eta\in\mathfrak{D}_d} L(\xi_1 + \cdots + \xi_n, \eta) \leqslant c_d \cdot \big(p + \tau(|\log\tau| + 1)\big), \tag{12}$$

$$\inf_{\eta\in\mathfrak{D}_d} \pi(\xi_1 + \cdots + \xi_n, \eta) \leqslant c_d \cdot \big(p + \tau(|\log\tau| + 1)\big) + \sum_{i=1}^n p_i^2. \tag{13}$$

§3. Основные результаты

Определение многомерной метрики Леви, данное в предыдущем разделе, не совсем естественно: оно сильно зависит от выбора координатного базиса, в то время как функции концентрации, включенные в верхние оценки в (10), от него не зависят. Мы собираемся предложить свободное от координат определение и получить для него аналог неравенства (10). Начнем с некоторых обозначений.

При $m \in \mathbf{N}$ мы обозначим через $\mathcal{P}_m$ класс выпуклых многогранников $P \subset \mathbf{R}^d$, представимых в виде

$$P = \bigl\{x \in \mathbf{R}^d : \langle x, t_j \rangle \leqslant b_j,\ j = 1, \dots, m\bigr\}, \tag{14}$$

где $t_j \in \mathbf{R}^d$ с $|t_j| = 1$ и $b_j \in \mathbf{R}^1$, $j = 1, \dots, m$. Для $P \in \mathcal{P}_m$, определенного в (14), и $\lambda \geqslant 0$ обозначим

$$P_\lambda = \bigl\{x \in \mathbf{R}^d : \langle x, t_j \rangle \leqslant b_j + \lambda,\ j = 1, \dots, m\bigr\}.$$

По определению P_λ является пересечением замкнутых λ-окрестностей полупространств $\bigl\{x \in \mathbf{R}^d : \langle x, t_j \rangle \leqslant b_j\bigr\}$, где $j = 1, \dots, m$. Подчеркнем, что P_λ зависит от представления (14), которое может быть не единственным для данного многогранника. Пусть $e_1, \dots, e_d \in \mathbf{R}^d$ – векторы стандартного евклидова базиса. Если мы рассмотрим подкласс $\mathcal{P}_d^* \subset \mathcal{P}_d$ тех многогранников, которые представимы в виде

$$P = \bigl\{x \in \mathbf{R}^d : \langle x, e_j \rangle \leqslant b_j,\ j = 1, \dots, d\bigr\}, \tag{15}$$

то (8) и (9) очевидным образом эквивалентны соотношениям

$$\begin{aligned} L(\xi, \xi') := \inf\{\lambda \geqslant 0 : {} & \mathbf{P}[\xi \in P] \leqslant \mathbf{P}[\xi' \in P_\lambda] + \lambda, \\ & \mathbf{P}[\xi' \in P] \leqslant \mathbf{P}[\xi \in P_\lambda] + \lambda \text{ при всех } P \in \mathcal{P}_d^*\} \end{aligned}$$

и

$$L_\lambda(\xi, \xi') := \sup_{P \in \mathcal{P}_d^*} \max\{\mathbf{P}[\xi \in P] - \mathbf{P}[\xi' \in P_\lambda], \mathbf{P}[\xi' \in P] - \mathbf{P}[\xi \in P_\lambda]\}. \tag{16}$$

Это наблюдение приводит к идее свободного от координат определения для $L(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ и $L_\lambda(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ в пространстве $\mathbf{R}^d$.

Определение 3.1. *Для $m \in \mathbf{N}$ и случайных векторов $\xi, \xi' \in \mathbf{R}^d$ положим*

$$\begin{aligned} L_m(\xi, \xi') := \inf\{\lambda \geqslant 0 : {} & \mathbf{P}[\xi \in P] \leqslant \mathbf{P}[\xi' \in P_\lambda] + \lambda, \\ & \mathbf{P}[\xi' \in P] \leqslant \mathbf{P}[\xi \in P_\lambda] + \lambda \textit{ при всех } P \in \mathcal{P}_m\} \end{aligned}$$

и

$$L_{\lambda,m}(\xi, \xi') := \sup_{P \in \mathcal{P}_m} \max\{\mathbf{P}[\xi \in P] - \mathbf{P}[\xi' \in P_\lambda], \mathbf{P}[\xi' \in P] - \mathbf{P}[\xi \in P_\lambda]\}.$$

Из определения непосредственно следует, что при $m \geqslant d$,

$$L(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \leqslant L_m(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \quad \text{и} \quad L_\lambda(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \leqslant L_{\lambda,m}(\,\cdot\,,\,\cdot\,). \tag{17}$$

Наш первый результат дает верхние оценки для $L_m(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ и $L_{\lambda,m}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$, подобные (10) и (12). Рассмотрим снова произвольные независимые случайные векторы $\xi_1,\dots,\xi_n \in \mathbf{R}^d$ и пусть $p, p_1, \dots, p_n$ определяются как в (2).

Теорема 3.1. *Для любого $m \in \mathbf{N}$ существуют константы c_m, ε_m, зависящие только от m и такие что*

$$\inf_{\eta\in\mathfrak{D}_d} L_m(\xi_1+\dots+\xi_n,\eta) \leqslant c_m\cdot\big(p+\tau(|\log\tau|+1)\big),$$
$$\inf_{\eta\in\mathfrak{D}_d} L_{\lambda,m}(\xi_1+\dots+\xi_n,\eta) \leqslant c_m\cdot\big(p+\exp(-\varepsilon_m\cdot\lambda/\tau)\big)$$

при всех $\tau,\lambda>0$.

Подчеркнем, что константы c_m, ε_m не зависят от размерности d.

Применяя теорему 3.1 при $\tau=0$, и то, что

$$\mathbf{P}[\xi\in P] = \lim_{\lambda\to 0}\mathbf{P}[\xi\in P_\lambda] \quad \text{для любого } P\in\mathcal{P}_m,$$

мы получаем следующее следствие 3.1.

Следствие 3.1 ([3], см. также [12])**.** *Пусть выполнены условия теоремы 3.1 с $\tau=0$. Тогда для любого $m\in\mathbf{N}$ существует константа c_m, зависящая только от m и такая, что*

$$\inf_{\eta\in\mathfrak{D}_d}\rho_m(\xi_1+\dots+\xi_n,\eta)\leqslant c_m p,$$

где

$$\rho_m(\xi,\xi') := \sup_{P\in\mathcal{P}_m}\left|\mathbf{P}[\xi\in P]-\mathbf{P}[\xi'\in P]\right|.$$

Для доказательства следствия 3.1 следует применить теорему 3.1 при $\tau\to 0$ с $\lambda=\sqrt{\tau}\to 0$.

В определении $L_m(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ и $L_{\lambda,m}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ мы рассматривали выпуклые многогранники P вместе с их приближениями P_λ, в то время как в классической метрике Леви–Прохорова рассматриваются *все* борелевские множества B и их окрестности B^λ. Таким образом, естественно рассмотреть промежуточный случай: выпуклые многогранники P вместе с их окрестностями P^λ.

Определение 3.2. *Для $m\in\mathbf{N}$ и случайных векторов $\xi,\xi'\in\mathbf{R}^d$ положим*

$$\pi_m(\xi,\xi') := \inf\{\lambda\geqslant 0 : \mathbf{P}[\xi\in P]\leqslant\mathbf{P}[\xi'\in P^\lambda]+\lambda,$$
$$\mathbf{P}[\xi'\in P]\leqslant\mathbf{P}[\xi\in P^\lambda]+\lambda \text{ при всех } P\in\mathcal{P}_m\}$$

и

$$\pi_{\lambda,m}(\xi,\xi') := \sup_{P\in\mathcal{P}_m} \max\{\mathbf{P}[\xi\in P]-\mathbf{P}[\xi'\in P^\lambda], \mathbf{P}[\xi'\in P]-\mathbf{P}[\xi\in P^\lambda]\}.$$

Опять же, из определения мы имеем

$$\begin{gathered} L(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \leqslant L_m(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \leqslant \pi_m(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \leqslant \pi(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \quad \text{и} \\ L_\lambda(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \leqslant L_{\lambda,m}(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \leqslant \pi_{\lambda,m}(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \leqslant \pi_\lambda(\,\cdot\,,\,\cdot\,). \end{gathered} \tag{18}$$

Поэтому (11) и (13) легко дают оценки сверху для $\pi_m(\,\cdot\,,\,\cdot)$ и $\pi_{\lambda,m}(\,\cdot\,,\,\cdot)$. Однако, как показывает наша следующая теорема, замена класса борелевских множеств на выпуклые многогранники позволяет нам избавиться от слагаемого $\sum\limits_{i=1}^n p_i^2$ в этих оценках.

Теорема 3.2. *Для любого $m\in\mathbf{N}$ существуют константы c_m,ε_m, зависящие только от m, такие что*

$$\inf_{\eta\in\mathfrak{D}_d} L_m(\xi_1+\dots+\xi_n,\eta) \leqslant c_m\cdot\bigl(p+\tau(|\log\tau|+1)\bigr),$$
$$\inf_{\eta\in\mathfrak{D}_d} L_{\lambda,m}(\xi_1+\dots+\xi_n,\eta) \leqslant c_m\cdot\bigl(p+\exp(-\varepsilon_m\cdot\lambda/\tau)\bigr)$$

при всех $\tau,\lambda>0$.

Опять-таки, константы c_m,ε_m не зависят от размерности.

Из (18) легко следует, что из теоремы 3.2 вытекает теорема 3.1. Однако нам будет удобно сначала доказать теорему 3.1 и затем вывести из нее теорему 3.2.

Теорема 3.1 будет выведена путем построения для любого выпуклого многогранника из $\mathcal{P}_m$ некоторого линейного преобразования из $\mathbf{R}^d$ в $\mathbf{R}^m$, такого что многогранник оказывается прообразом другого выпуклого многогранника в $\mathbf{R}^m$ вида (15), и затем применяя (10) и (12).

Доказательство теоремы 3.2 несколько сложнее. Чтобы вывести его из теоремы 3.1, нам понадобится вложить P_λ в множество $P^{c\lambda}$ для некоторого $c>1$. В общем случае это невозможно: как легко видеть, для любого $c>1$ существует $P\in\mathcal{P}_m$, для которого $P_\lambda\not\subset P^{c\lambda}$. Однако, как было отмечено выше, P_λ зависит от представления (14), которое не является единственным. Таким образом, как показывает следующее предложение, можно будет добавить к правой части (14) "не слишком много" полупространств, которые не влияют на P, но изменяют P_λ, так что $P_\lambda\subset P^{c\lambda}$.

Предложение 3.1. *Зафиксируем некоторые* $m \in \mathbf{N}$ *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует величина* $c_{m,\varepsilon}$, *зависящая только от* m, ε, *такая что для любого многогранника* $P \in \mathcal{P}_m$ *вида* (14) *существуют* $m_0 \leqslant c_{m,\varepsilon}$, $t_j \in \mathbf{R}^d$ *с* $|t_j| = 1$, *и* $b_j \in \mathbf{R}$, $j = m+1, \dots, m_0$, *такие что*

$$P = \big\{x \in \mathbf{R}^d : \langle x, t_j \rangle \leqslant b_j,\ j = 1, \dots, m_0\big\},$$

и для любого $\lambda > 0$,

$$P_\lambda := \big\{x \in \mathbf{R}^d : \langle x, t_j \rangle \leqslant b_j + \lambda,\ j = 1, \dots, m_0\big\} \subset P^{(1+\varepsilon)\lambda}. \tag{19}$$

Доказательство предложения 3.1 отложено до раздела 6. Перейдем теперь к доказательству теорем.

§4. Замечание об обобщенных распределениях Пуассона

Пусть $\xi \in \mathbf{R}^d$ – случайный вектор и пусть $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots$ – его независимые копии. Обозначим через $e(\xi)$ случайный вектор в $\mathbf{R}^d$, распределенный как

$$e(\xi) \stackrel{d}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (\xi^{(1)} + \dots + \xi^{(k)}) \cdot \mathbf{1}\{\zeta = k\},$$

где ζ имеет стандартное распределение Пуассона и не зависит от векторов $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots$. Мы будем говорить, что $e(\xi)$ имеет *обобщенное распределение Пуассона* по отношению к ξ. Ясно, что случайный вектор $e(\xi)$ безгранично делим. Каждый раз, когда мы строим $e(\xi)$ по некоторому случайному вектору ξ, мы молчаливо предполагаем, что он не зависит от всего остального (включая ξ).

Ле Кам [7] обнаружил, что обобщенные распределения Пуассона являются перспективными кандидатами на роль безгранично делимых приближений для распределений сумм независимых случайных величин. Это наблюдение дало новый способ получения оценок типа Колмогорова, таких как (3) и (4). Перейдем теперь к более конкретному изложению.

Зафиксировав, как и выше, некоторое $\tau > 0$, введем независимые d-мерные случайные векторы $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbf{R}^d$, и пусть величины $p, p_1, \dots, p_n$ определены как в (2). Из (7) и из определения p следует, что существуют $a'_1, \dots, a'_n \in \mathbf{R}^d$, такие что

$$\mathbf{P}[|\xi_i - a'_i| \leqslant \tau] \geqslant 1 - p, \quad i = 1, \dots, n.$$

Обобщив предыдущие одномерные результаты, А. Ю. Зайцев [11] доказал следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Пусть* $\alpha_i \in \mathbf{R}^1$, $X_i, Y_i \in \mathbf{R}^d$, $i = 1, \dots, n$, *– независимые случайные величины и векторы, такие что при некоторых* $a_i' \in \mathbf{R}^d$

$$\mathbf{P}[\alpha_i = 1] = 1 - \mathbf{P}[\alpha_i = 0] = p_i, \quad \mathbf{P}[|X_i - a_i'| \leqslant \tau|] = 1, \quad i = 1, \dots, n. \tag{20}$$

Пусть

$$a_i = \mathbf{E}\, X_i, \quad \xi_i = (1 - \alpha_i)X_i + \alpha_i Y_i, \quad i = 1, \dots, n. \tag{21}$$

где $Y_i \in \mathbf{R}^d$ *– некоторые независимые случайные векторы, не зависящие от* $\{X_i, \alpha_i\}$. *Тогда для вектора*

$$\eta_0 := \sum_{i=1}^{n} \big[a_i + e(\xi_i - a_i)\big]. \tag{22}$$

и для некоторых констант $c_d, \varepsilon_d > 0$, *зависящих только от* d, *выполнено*

$$L_\lambda(\xi_1 + \dots + \xi_n, \eta_0) \leqslant c_d \cdot \big(p + \exp(-\varepsilon_d \cdot \lambda/\tau)\big), \tag{23}$$

$$\pi_\lambda(\xi_1 + \dots + \xi_n, \eta_0) \leqslant c_d \cdot \big(p + \exp(-\varepsilon_d \cdot \lambda/\tau)\big) + \sum_{i=1}^{n} p_i^2,$$

откуда следуют оценки (10) *и* (11).

§5. Доказательство теорем 3.1 и 3.2

Доказательство теоремы 3.1**.** Зафиксируем некоторый многогранник $P \in \mathcal{P}_m$:

$$P = \big\{x \in \mathbf{R}^d : \langle x, t_j\rangle \leqslant b_j,\ j = 1, \dots, m\big\}.$$

Пусть $A : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^m$ – линейный оператор, отображающий

$$x \mapsto y = \big(\langle x, t_1\rangle, \dots, \langle x, t_m\rangle\big).$$

Пусть $e_1, \dots, e_m$ – векторы стандартного евклидова базиса в $\mathbf{R}^m$. Рассмотрим многогранник $\widetilde{P} \subset \mathbf{R}^m$, принадлежащий классу $\mathcal{P}_m^*$ (см. (15)) и определяемый как

$$\widetilde{P} = \big\{y \in \mathbf{R}^m : \langle y, e_j\rangle \leqslant b_j,\ j = 1, \dots, m\big\}.$$

Поскольку

$$\langle x, t_j\rangle = \langle x, A^* e_j\rangle = \langle Ax, e_j\rangle,$$

с сопряженным оператором $A^* : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^d$, отсюда следует, что для любого случайного вектора $\xi \in \mathbf{R}^d$

$$\mathbf{P}[\xi \in P] = \mathbf{P}[A\xi \in \widetilde{P}] \quad \text{и} \quad \mathbf{P}[\xi \in P_\lambda] = \mathbf{P}[A\xi \in \widetilde{P}_\lambda].$$

Поэтому для любых случайных векторов $\xi, \xi' \in \mathbf{R}^d$ мы имеем

$$\begin{aligned} &\max\{\mathbf{P}[\xi \in P] - \mathbf{P}[\xi' \in P_\lambda], \mathbf{P}[\xi' \in P] - \mathbf{P}[\xi \in P_\lambda]\} \\ &\quad = \max\{\mathbf{P}[A\xi \in \widetilde{P}] - \mathbf{P}[A\xi' \in \widetilde{P}_\lambda], \mathbf{P}[A\xi' \in \widetilde{P}] - \mathbf{P}[A\xi \in \widetilde{P}_\lambda]\} \\ &\qquad\qquad \leqslant L_\lambda(A\xi, A\xi'), \end{aligned} \tag{24}$$

где на последнем шаге мы использовали (16). Напомним, что рассматриваемые независимые случайные векторы $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbf{R}^d$ и p, $p_1, \ldots, p_n$ определяются как в (2). Не нарушая общности, мы можем считать, что ξ_i представлены в виде (21), причем распределение X_i совпадает с условным распределением ξ_i при условии, что $|\xi_i - a_i'| \leqslant \tau$ с некоторыми $a_i' \in \mathbf{R}^d$, существующими в силу (2). При этом

$$\mathbf{P}[|\xi_i - a_i'| > \tau] = p_i,$$

а распределение Y_i совпадает с условным распределением ξ_i при условии, что $|\xi_i - a_i'| > \tau$. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ и η_0 определены в (21) и (22). Поскольку $|t_j| = 1$ при $j = 1, \ldots, n$, мы имеем $\|A\| \leqslant \sqrt{m}$. Использование этого дает

$$\mathbf{P}[|AX_i - Aa_i'| \leqslant \sqrt{m}\tau] = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

причем

$$\mathbf{E}\,[AX_i] = Aa_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{25}$$

Заметим, что

$$A\eta_0 = \sum_{i=1}^n \big[Aa_i + Ae(\xi_i - a_i)\big] = \sum_{i=1}^n \big[Aa_i + e(A\xi_i - Aa_i)\big].$$

Таким образом, векторы $A\xi_1, \ldots, A\xi_n$ удовлетворяют всем условиям, которые налагались на векторы $\xi_1, \ldots, \xi_n$ в лемме 4.1 с заменой a_i на Aa_i, a_i' на Aa_i' и τ на $\tau\sqrt{m}$. Поэтому применение (23) к векторам $A\xi_1, \ldots, A\xi_n$ дает (для некоторых констант $c_m, \varepsilon_m > 0$, зависящих только от m):

$$L_\lambda(A\xi_1 + \cdots + A\xi_n, A\eta_0) \leqslant c_m \cdot \big(p + \exp(-\varepsilon_m \cdot \lambda/\tau)\big),$$

что вместе с (24) влечет

$$L_{\lambda,m}(\xi_1+\dots+\xi_n,\eta_0)\leqslant c_m\cdot\bigl(p+\exp(-\varepsilon_m\cdot\lambda/\tau)\bigr).$$

Напомним, что вектор η_0 безгранично делим. Это завершает доказательство второй части теоремы 3.1. Первая часть выводится из второй стандартными рассуждениями, см. замечания 1.1, 2.1. □

Доказательство теоремы 3.2. Зафиксируем некоторый многогранник $P\in\mathcal{P}_m$:

$$P=\bigl\{x\in\mathbf{R}^d:\langle x,t_j\rangle\leqslant b_j,\ j=1,\dots,m\bigr\}.$$

Из предложения 3.1 следует, что можно представить P в виде

$$P=\bigl\{x\in\mathbf{R}^d:\langle x,t_j\rangle\leqslant b_j,\ j=1,\dots,m_0\bigr\},$$

таком что

$$P_{\lambda/2}\subset P^\lambda\quad\text{и}\quad m_0\leqslant N_m\in\mathbf{N},$$

где постоянная N_m зависит только от m. Таким образом, для любых случайных векторов ξ,ξ' мы имеем

$$\begin{aligned}\max\{&\mathbf{P}[\xi\in P]-\mathbf{P}[\xi'\in P^\lambda],\mathbf{P}[\xi'\in P]-\mathbf{P}[\xi\in P^\lambda]\}\\&\leqslant\max\{\mathbf{P}[\xi\in P]-\mathbf{P}[\xi'\in P_{\lambda/2}],\mathbf{P}[\xi'\in P]-\mathbf{P}[\xi\in P_{\lambda/2}]\}\\&\qquad\qquad\leqslant L_{\lambda/2,N_m}(\xi,\xi').\end{aligned}$$

Поскольку это верно для любого $P\in\mathcal{P}_m$, мы приходим к

$$\pi_{\lambda,m}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\leqslant L_{\lambda/2,N_m}(\,\cdot\,,\,\cdot\,).$$

Таким образом, вторая часть теоремы 3.2 следует из второй части теоремы 3.1. Первая часть выводится из второй стандартными рассуждениями, см. замечания 1.1, 2.1. □

§6. Доказательство предложения 3.1

Доказательство. Построим сначала $b_{m+1},t_{m+1},\dots,b_{m_0},t_{m_0}$. Пусть

$$H_j:=\{x\in\mathbf{R}^d:\langle x,t_j\rangle=b_j\},\quad j=1,\dots,m.$$

Обозначим через $\mathcal{F}_k(P)$ совокупность k-мерных граней многогранника P. Если $k<d-\min(d,m)$, то $\mathcal{F}_k(P)$ пусто, поэтому

$$\mathcal{F}(P):=\bigcup_{k=d-\min(d,m)}^{d-1}\mathcal{F}_k(P)$$

является совокупностью всех собственных граней P. Зафиксируем некоторую грань $F \in \mathcal{F}(P)$ и пусть x_F – какая-нибудь точка из ее относительной внутренности, $\mathrm{relint} F$. Обозначим через T_F касательный конус при грани F, который определяется как

$$T_F = T_F(X) := \{x \in \mathbf{R}^d : x_F + \varepsilon x \in X \text{ для некоторого } \varepsilon > 0\}.$$

Очевидно, что T_F не зависит от выбора x_F. Определим также N_F – нормальный конус при грани F, который определяется как полярный конус конуса T_F:

$$N_F = N_F(X) := \{x \in \mathbf{R}^d : \langle x, y\rangle \leqslant 0 \text{ при всех } y \in T_F\}.$$

Известно, что

$$\dim N_F \leqslant m. \tag{26}$$

Пусть $\delta > 0$ – достаточно маленькая константа, которая будет уточнена позже. Поскольку пересечение конуса N_F с единичной сферой $\mathbb{S}^{d-1}$ компактно, существует конечное покрытие $\mathcal{S}_F \subset N_F \cap \mathbb{S}^{d-1}$, такое что

$$\max_{v \in \mathcal{S}_F} \langle u, v\rangle \geqslant 1 - \delta \quad \text{для любого} \quad u \in N_F \cap \mathbb{S}^{d-1}. \tag{27}$$

Более того, из (26) следует, что $\mathcal{S}_F$ содержится в $(\min(d,m)-1)$-мерной единичной сфере, так что

$$\#\mathcal{S}_F \leqslant c_{m,\delta}, \tag{28}$$

где $c_{m,\delta}$ зависит только от m, δ.

Теперь определим искомый набор $\{(b_j, t_j)\}_{j=m+1}^{m_0}$ как набор всех пар $(\langle x_F, v\rangle, v)$, где v пробегает все точки $\mathcal{S}_F$, а F – все грани P. Опять же, подчеркнем, что это определение не зависит от выбора x_F. Поскольку любая грань представляется как пересечение P с несколькими гиперплоскостями из $H_1, \ldots, H_m$, их число не превышает 2^m, откуда вместе с (28) вытекает

$$m_0 \leqslant m + 2^m c_{m,\delta}.$$

Определив теперь $b_{m+1}.t_{m+1}, \ldots, b_{m_0}, t_{m_0}$, докажем (19). Зафиксируем некоторую точку $x_0 \in P_\lambda$. Пусть y_0 обозначает евклидову проекцию x_0 на P:

$$y_0 := \mathrm{argmin}\{\|x_0 - y\| : y \in P\}. \tag{29}$$

Теперь нам остается показать, что

$$\|x_0 - y_0\| \leqslant (1+\varepsilon)\lambda. \tag{30}$$

Очевидно, мы можем предположить, что $x_0 \notin P$, откуда следует, что $y_0 \in \partial P$. Хорошо известно, что граница многогранника может быть представлена как объединение относительных внутренностей его собственных граней (которые не пересекаются). Таким образом, существует единственная грань F многогранника P, такая что

$$y_0 \in \mathrm{relint} F.$$

Из последнего вместе с (29) вытекает, что

$$x_0 - y_0 \in N_F.$$

Таким образом, из (27), примененного к $(x_0 - y_0)/\|x_0 - y_0\|$, следует, что для некоторого $v \in \mathcal{S}_F$,

$$\langle x_0 - y_0, v\rangle \geqslant (1-\delta)\|x_0 - y_0\|.$$

С другой стороны, по построению $\{(b_j, t_j)\}_{j=m+1}^{m_0}$ и из $x_0 \in P_\lambda$ и следует, что

$$\langle x_0, v\rangle \leqslant \langle y_0, v\rangle + \lambda.$$

Комбнация двух последних неравенств дает

$$\|x_0 - y_0\| \leqslant \frac{\lambda}{1-\delta}.$$

Выбирая $\delta = 1 - \frac{1}{1+\varepsilon}$, получаем (30), откуда следует утверждение предложения. □

Список литературы

1. Т. В. Арак, А. Ю. Зайцев, *Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* — Тр. МИАН СССР, **174** (1986), 214 с.
2. А. А. Боровков, А. И. Саханенко, *Об оценках скорости сходимости в принципе инвариантности для банаховых пространств.* — Теория вероятн. и ее примен. **25**, No. 4 (1980), 734–744.
3. Ф. Гётце, А. Ю. Зайцев, *Оценки близости сверток вероятностных распределений на выпуклых многогранниках.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **474** (2018), 108–117.
4. И. А. Ибрагимов, Э. Л. Пресман, *О скорости сближения распределений сумм независимых случайных величин с сопровождающими законами.* — Теория вероятн. и ее примен. **18**, No. 4 (1973), 753–766.
5. А. Н. Колмогоров, *Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых.* — Теория вероятн. и ее примен. **1**, No. 4 (1956), 384–394.
6. А. Н. Колмогоров,*О приближении распределений сумм независимых слагаемых неограниченно делимыми распределениями.* — Труды Москов. матем. об-ва **12** (1963), 437–451.

7. L. Le Cam, *On the distribution of sums of independent random variables.* — In: Bernoulli, Bayes, Laplace (anniversary volume), pp. 179–202. Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer. 1965.
8. Б. А. Рогозин, *Об одной оценке функций концентраций.* — Теория вероятн. и ее примен. **6**, No. 1 (1961), 103–105.
9. Б. А. Рогозин, *Об увеличении рассеивания сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **6**, No. 1 (1961), 106–108.
10. А. Ю. Зайцев, *Несколько замечаний об аппроксимации распределений сумм независимых слагаемых*, — Зап. научн. семин. ЛОМИ **136** (1984), 48–57.
11. А. Ю. Зайцев, *Многомерный вариант второй равномерной предельной теоремы Колмогорова.* — Теория вероятн. и ее примен. **34**, No. 1 (1989), 128–151.
12. А. Ю. Зайцев, *Об одном классе неравномерных оценок в многомерных предельных теоремаxs.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **184** (1990), 92–105.
13. А. Ю. Зайцев, Т. В. Арак, *О скорости сходимости во второй равномерной предельной теореме Колмогорова.* — Теория вероятн. и ее примен. **28**, No. 2 (1984), 333–353.

Götze F., Zaitsev A. Yu., Zaporozhets D. N. Improved multivariate version of the second Kolmogorov's uniform limit theorem.

The aim of the present work is to show that the results obtained earlier on the approximation of distributions of sums of independent summands by the infinitely divisible laws may be transferred to the estimation of the closeness of distributions on convex polyhedra.

Поступило 28 ноября 2019 г.

Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld, Postfach 100131,
D-33501 Bielefeld, Germany
E-mail: goetze@math.uni-bielefeld.de

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург, Россия;
С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034 Россия
E-mail: zaitsev@pdmi.ras.ru
E-mail: zap1979@gmail.com