Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 486, 2019 г.

А. Н. Бородин

ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ СЛОЖНОГО ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ МЕЖДУ НЕСКОЛЬКИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

В работе рассматривается специальный класс сложных пуассоновских процессов с переключениями между несколькими значениями. Эта работа продолжает исследования начатые в [1] и [2]. Имеется конечное число последовательностей (наборов) из независимых одинаково распределенных случайных величин. Через показательно распределенные моменты времени эти величины задают значения скачков сложного процесса Пуассона. Переключения с одного набора случайных величин на другой происходят циклически (последовательно с одного на другой) и происходят в моменты, определяемые независимыми бернуллиевскими величинами, независящими от исходных величин. Таким образом, процесс с переключениями начинается как классический сложный пуассоновский процесс с первым набором случайных слагаемых. Затем в распределенный по геометрическому распределению момент времени слагаемые заменяются на величины из другого набора независимых одинаково распределенных величин, и уже в соответствии с этими величинами происходит дальнейшее развитие процесса. Через независимый геометрически распределенный момент времени слагаемые заменяются на величины из третьего набора, и так далее.

В работе изучается предельное поведение сложного пуассоновского процесса с переключениями. При подходящей нормировке предельным процессом является броуновское движение с переключающейся дисперсией.

Общий подход к изучению предельного поведения распределений сложных пуассоновских процессов с переключениями, предложенный

Ключевые слова: сложный пуассоновский процесс с переключениями, броуновское движение с переключающейся дисперсией, предельное распределение.

Настоящая работа частично поддерживалась грантом РФФИ 16-01-00367.

в настоящей работе не меняется в зависимости от числа последовательностей случайных величин, между которыми происходят переключения. Мы детально рассмотрим переключения между тремя наборами независимых одинаково распределенных в каждом наборе величин и приведем основные формулы для переключений в случае четырех наборов. Отметим также некоторые особенности для произвольного конечного числа последовательностей одинаково распределенных величин.

1. Броуновское движение с переключающейся дисперсией из трех значений. Вопросы о распределении броуновского движения с переключающейся дисперсией из двух значений рассматривались в работах [3] и [4] в качестве примеров простейших диффузий с переключениями. Как уже отмечалось, в случае трех значений переключения происходят циклически. Удобнее всего это задать произведениями значений кубических корней из единицы. Нециклические переключения, как это сделано в [4] для двух значений, повлекут в случае трех значений громоздкие формулы, связанные с определителями матриц размера 3×3.

Положим $\delta := e^{i2\pi/3}$. Тогда $1 = \delta^0$, δ, δ^2 являются значениями кубических корней из единицы.

Процесс Пуассона $N(t)$, $t \geqslant 0$, с интенсивностью $\lambda_1 > 0$ может быть представлен в следующем виде:

$$N(t) := \max\Big\{l : \sum_{k=1}^{l} \tau_k \leqslant t\Big\}\mathbb{1}_{[0,t]}(\tau_1),$$

где τ_k, $k = 1, 2, \dots,$ – независимые экспоненциально распределенные с параметром λ_1 случайные величины.

Пусть $W(s)$, $s \geqslant 0$, – процесс броуновского движения с начальным значением $W(0) = 0$. Броуновское движение с переключающейся дисперсией имеет следующий вид:

$$S_{l,x}(t) := x + \sqrt{\lambda_1}\int_0^t \sigma_{l\delta^{N(s)}}\, dW(s), \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{1.1}$$

где σ_1, σ_δ, σ_{δ^2} – три произвольных коэффициента, а l одно из начальных значений 1, δ, δ^2.

Наряду с процессом $S_{l,x}(t)$, $t \geqslant 0$, нужно рассмотреть переключатель $l\delta^{N(t)}$, поскольку именно векторный процесс

$$\vec{V}_l(t) := \bigl(l\delta^{N(t)}, S_{l,x}(t)\bigr), \qquad t \geqslant 0, \tag{1.2}$$

будет однородным марковским процессом. Это доказывается аналогично доказательству соответствующего утверждения из работы [4].

Вычислим характеристическую функцию величины $\vec{V}_l(t)$. Для этого сначала вычислим при $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$ функцию

$$Q_l(x) := \mathbf{E}\exp\Bigl(i\alpha l\delta^{N(\tau)} + i\beta S_{l,x}(\tau)\Bigr) = e^{i\beta x}Q_l(0), \tag{1.3}$$

где τ – не зависящий от процессов Пуассона $N(t)$, $t \geqslant 0$, и броуновского движения $W(t)$, $t \geqslant 0$ экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ случайный момент времени.

Момент τ соответствует преобразованию Лапласа по времени t. Для того чтобы получить распределение функционала в момент t, следует обратить преобразование Лапласа по λ в распределении соответствующего функционала в момент τ. Поэтому требуемая характеристическая функция определяется формулой

$$\mathbf{E}\exp\bigl(i\alpha l\delta^{N(t)} + i\beta S_{l,0}(t)\bigr) = \mathcal{L}_\lambda^{-1}\Bigl(\frac{1}{\lambda}Q_l(0)\Bigr),$$

где $\mathcal{L}_\lambda^{-1}|_t$ – оператор обратного преобразования Лапласа. Левая часть этой формулы является характеристической функцией переходной вероятности марковского процесса $\vec{V}_l(t)$, $t \geqslant 0$.

Для краткости будем использовать обозначение $\mathbf{E}\{\xi;\, A\} := \mathbf{E}\{\xi\mathbb{1}_A\}$. Положим $\varPhi(v,y) := e^{i\alpha v + i\beta y}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} Q_l(x) = \mathbf{E}\Bigl\{\varPhi(l, x+\sqrt{\lambda_1}\sigma_l W(\tau)); \tau < \tau_1\Bigr\} + \mathbf{E}\Bigl\{\varPhi\bigl(l\delta^{N(\tau)}, S_{l,x}(\tau)\bigr); \tau_1 \leqslant \tau\Bigr\} \\ =: e^{i\alpha l}M_1(x) + M_2(x), \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $e^{i\alpha l}M_1(x)$ и $M_2(x)$ – соответственно первое и второе слагаемые.

Поскольку τ_1 не зависит от τ и процесса W, то справедлива формула

$$\mathbf{P}\bigl(\tau < \tau_1 \big| \sigma(\tau, W(\tau))\bigr) = e^{-\lambda_1\tau},$$

где $\sigma(\tau, W(\tau))$ – σ-алгебра событий, порожденная величинами τ и $W(\tau)$. Тогда, применяя теорему Фубини, и сначала вычисляя математическое ожидание по τ_1, а затем по $W(\tau)$, получим

$$M_1(x) = \mathbf{E}\Bigl\{\varPhi\bigl(x+\sqrt{\lambda_1}\sigma_l W(\tau)\bigr)e^{-\lambda_1\tau}\Bigr\}.$$

Для вычисления $M_1(x)$ применим теорему 4.1 гл. IV из [5] при $\Phi(x) = e^{i\beta x}$, $f(x) = \lambda_1$ и $\sigma(x) = \sqrt{\lambda_1}\sigma_l$, $\mu(x) \equiv 0$. Из этого результата следует, что $M_1(x)$, $x \in \mathbf{R}$, является единственным ограниченным решением уравнения

$$\frac{1}{2}\lambda_1\sigma_l^2 M_1''(x) - (\lambda + \lambda_1)M_1(x) = -\lambda e^{i\beta x}.$$

Это решение имеет вид

$$M_1(x) = \frac{\lambda e^{i\beta x}}{\lambda + \lambda_1 + \lambda_1\sigma_l^2\beta^2/2}. \tag{1.5}$$

Для того чтобы преобразовать второе слагаемое $M_2(x)$, воспользуемся независимостью момента τ от процесса $S_{l,x}$ и момента τ_1. По теореме Фубини имеем

$$M_2(x) = \lambda\mathbf{E}\int_{\tau_1}^{\infty} e^{-\lambda t}\Phi\big(l\delta^{N(t)}, S_{l,x}(t)\big)dt.$$

В выражении для $M_2(x)$ сделаем замену переменной $t = u + \tau_1$. Положим $\widetilde{N}(u) := N(u+\tau_1) - N(\tau_1)$, $\widetilde{W}(u) := W(u+\tau_1) - W(\tau_1)$, которые снова являются процессами Пуассона и броуновского движения. Так как $N(\tau_1) = 1$, то

$$M_2(x) = \mathbf{E}\bigg\{e^{-\lambda\tau_1}\lambda\int_0^{\infty} e^{-\lambda u}\Phi\big(l\delta\delta^{\widetilde{N}(u)}, S_{l,x}(u+\tau_1)\big)\,du\bigg\}.$$

Напишем при $t \geqslant \tau_1$ представление

$$\begin{aligned} S_{l,x}(t) &= x + \sqrt{\lambda_1}\sigma_l W(\tau_1) + \sqrt{\lambda_1}\int_{\tau_1}^{t}\sigma_{l\delta\delta^{\widetilde{N}(s-\tau_1)}}\,dW(s) \\ &= x + \sqrt{\lambda_1}\sigma_l W(\tau_1) + \sqrt{\lambda_1}\int_0^{t-\tau_1}\sigma_{l\delta\delta^{\widetilde{N}(s)}}\,d\widetilde{W}(s). \end{aligned}$$

В силу этой формулы

$$\begin{aligned} S_{l,x}(s+\tau_1) &= x + \sqrt{\lambda_1}\sigma_l W(\tau_1) + \sqrt{\lambda_1}\int_0^{s}\sigma_{l\delta\delta^{\widetilde{N}(v)}}\,d\widetilde{W}(v) \\ &= \widetilde{S}_{l\delta,x+\sqrt{\lambda_1}\sigma_l W(\tau_1)}(s), \qquad s \geqslant 0, \end{aligned}$$

где полагаем

$$\widetilde{S}_{l,y}(t) := y + \sqrt{\lambda_1}\int\limits_0^t \sigma_{l\delta^{\widetilde{N}(s)}}\, d\widetilde{W}(s), \tag{1.6}$$

При неслучайном начальном значении y процесс $\widetilde{S}_{l,y}(s)$, $s \geqslant 0$, не зависит от величины $W(\tau_1)$, так как от нее не зависят процессы $\widetilde{N}$ и $\widetilde{W}$. Кроме того, в силу своей структуры $\widetilde{S}_{l,y}(s)$, $s \geqslant 0$, распределен одинаково с процессом $S_{l,y}(s)$, $s \geqslant 0$, определенным формулой (1.1).

По теореме Фубини в выражении для $M_2(x)$ интеграл по параметру u с весом $\lambda\, e^{-\lambda u}$ можно заменить на подынтегральное выражение с $\widetilde{\tau}$ вместо u, где $\widetilde{\tau}$ – экспоненциально распределенная с параметром λ случайная величина, не зависящая от других процессов и величин, включая τ_1. Тем самым, для $M_2(x)$ получим следующее представление:

$$M_2(x) = \mathbf{E}\Big\{\mathbf{E}\Big\{e^{-\lambda\tau_1}\varPhi\big(l\delta\delta^{\widetilde{N}(\widetilde{\tau})}, \widetilde{S}_{l\delta, x+\sqrt{\lambda_1}\sigma_l W(\tau_1)}(\widetilde{\tau})\big)\Big|\sigma(\tau_1, W(\tau_1))\Big\}\Big\}.$$

Здесь $\sigma(\tau_1, W(\tau_1))$ – σ-алгебра событий, порожденная случайными величинами τ_1 и $W(\tau_1)$. Применяя лемму 2.1 гл. I из [5], получим

$$M_2(x) = \mathbf{E}\Big\{e^{-\lambda\tau_1}Q_{l\delta}(x + \sqrt{\lambda_1}\sigma_l W(\tau_1))\Big\}.$$

Это выражение преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} M_2(x) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q_{l\delta}(z)\mathbf{E}\Big\{e^{-\lambda\tau_1}; x + \sqrt{\lambda_1}\sigma_l W(\tau_1) \in dz\Big\} \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z^{(l)}(x) Q_{l\delta}(z)\, dz, \end{aligned}$$

где

$$G_z^{(l)}(x) := \frac{d}{dz}\mathbf{E}\Big\{e^{-\lambda\tau_1}; x + \sqrt{\lambda_1}\sigma_l W(\tau_1) < z\Big\}.$$

Функция $G_z^{(l)}(x)$, $x \in \mathbf{R}$, согласно теореме 6.2, $a = -\infty$, $b = \infty$, гл. IV из [5] является единственным непрерывным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2}\lambda_1\sigma_l^2 G''(x) - (\lambda_1 + \lambda))G(x) = 0, \qquad x \neq z, \tag{1.7}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2/\sigma_l^2. \tag{1.8}$$

Ограниченное непрерывное решение задачи (1.7), (1.8) имеет вид

$$G_z^{(l)}(x) = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sigma_l\sqrt{2\lambda+2\lambda_1}} e^{-|x-z|\sqrt{2\lambda+2\lambda_1}/\sqrt{\lambda_1}\sigma_l}.$$

Ясно, что $G_z^{(l)}(x) = G_0^{(l)}(x-z)$. Нам понадобится следующее легко проверяемое равенство: при $\rho > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta z}}{\rho} e^{-|z-x|\rho}\, dz = \frac{2e^{i\beta x}}{\rho^2+\beta^2}.$$

Принимая во внимание это равенство и (1.3), нетрудно убедится, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z^{(l)}(x)\, Q_{l\delta}(z)\, dz, = Q_{l\delta}(0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0^{(l)}(x-z) e^{i\beta z}\, dz, = \frac{\lambda_1 e^{i\beta x} Q_{l\delta}(0)}{\lambda+\lambda_1+\lambda_1\sigma_l^2\beta^2/2}.$$

Обозначим $\Delta_l := \lambda_1 + \lambda_1\sigma_l^2\beta^2/2$. Теперь при $x = 0$ из (1.4) и (1.5) следует, что

$$Q_l(0) = \frac{1}{\lambda+\Delta_l}\big(\lambda e^{i\alpha l} + \lambda_1 Q_{l\delta}(0)\big). \tag{1.9}$$

Применяя это рекуррентное равенство три раза, получаем

$$Q_l(0) = \frac{1}{\lambda+\Delta_l}\Big(\lambda e^{i\alpha l} + \frac{\lambda_1}{\lambda+\Delta_{l\delta}}\Big(\lambda e^{i\alpha l\delta} + \frac{\lambda_1}{\lambda+\Delta_{l\delta^2}}\big(\lambda e^{i\alpha l\delta^2} + \lambda_1 Q_l(0)\big)\Big)\Big).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\lambda} Q_l(0) = \frac{e^{i\alpha l}(\lambda+\Delta_{l\delta})(\lambda+\Delta_{l\delta^2}) + \lambda_1 e^{i\alpha l\delta}(\lambda+\Delta_{l\delta^2}) + \lambda_1^2 e^{i\alpha l\delta^2}}{(\lambda+\Delta_l)(\lambda+\Delta_{l\delta})(\lambda+\Delta_{l\delta^2}) - \lambda_1^3}. \tag{1.10}$$

Рассмотрим вопрос об обратном преобразовании Лапласа по λ в (1.10). Полином по λ в знаменателе правой части этого соотношения является устойчивым по критерию Рауса-Гурвица (см., например, [6]), поскольку произведение коэффициентов при второй и первой степени больше свободного члена. Следовательно, он имеет либо отрицательные вещественные корни, обозначим их $-r_1$, $-r_2$, $-r_3$, $0 < r_k$, либо один отрицательный $-r_1$ и два комплексно сопряженных с отрицательной реальной частью, $-r - i\gamma$, $-r + i\gamma$, $r > 0$, $\gamma \geqslant 0$. Все корни можно вычислить по формуле Кардано (см., например, [7]).

Рассмотрим первый вариант.

$$\mathbf{E}\exp\big(i\alpha l\delta^{N(t)} + i\beta S_{l,0}(t)\big) = \mathcal{L}_\lambda^{-1}\Big(\frac{\eta\lambda^2+\mu\lambda+\nu}{(\lambda+r_1)(\lambda+r_2)(\lambda+r_3)}\Big)\Big|_t,$$

где $\mathcal{L}_\lambda^{-1}|_t$ – оператор обратного преобразования Лапласа по λ и $\eta := e^{i\alpha l}$, $\mu := e^{i\alpha l}(\Delta_{l\delta} + \Delta_{l\delta^2}) + e^{i\alpha l\delta}\lambda_1$, $\nu := e^{i\alpha l}\Delta_{l\delta}\Delta_{l\delta^2} + e^{i\alpha l\delta}\lambda_1\Delta_{l\delta^2} + \lambda_1^2 e^{i\alpha l\delta^2}$.

По формуле (10) §5.2 гл. V из [8]

$$\mathbf{E}\exp\big(i\alpha l\delta^{N(t)} + i\beta S_{l,0}(t)\big) \tag{1.11}$$
$$= \frac{\eta r_1^2 - \mu r_1 + \nu}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}e^{-r_1 t} + \frac{\eta r_2^2 - \mu r_2 + \nu}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}e^{-r_2 t} + \frac{\eta r_3^2 - \mu r_3 + \nu}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)}e^{-r_3 t}.$$

Эта формула задает характеристическую функцию переходной вероятности марковского процесса $\vec{V}_l(t)$, $t \geqslant 0$.

Второй вариант будет следовать из равенства

$$\mathbf{E}\exp\big(i\alpha l\delta^{N(t)} + i\beta S_{l,0}(t)\big) = \lambda_1\mathcal{L}_\lambda^{-1}\Big(\frac{\eta\lambda^2 + \mu\lambda + \nu}{(\lambda + r_1)((\lambda + r)^2 + \gamma^2)}\Big)\Big|_t.$$

Для обращения нужно применить формулу (9) §5.2 гл. V из [8].

2. Сложный пуассоновский процесс с переключениями между тремя значениями. Переключения, как и ранее, происходят циклически и задаются произведениями значений кубических корней из единицы. Воспользуемся прежним обозначением $\delta := e^{i2\pi/3}$.

Предположим, что $(Y_k(1), Y_k(\delta), Y_k(\delta^2))$, $k = 1, 2, \dots,$ – независимые одинаково распределенные случайные векторы. Обозначим через $f_1(\beta) := \mathbf{E}e^{i\beta Y_1(1)}$, $f_\delta(\beta) := \mathbf{E}e^{i\beta Y_1(\delta)}$, $f_{\delta^2}(\beta) := \mathbf{E}e^{i\beta Y_1(\delta^2)}$ характеристические функции их координат.

Пусть χ_j, $j = 1, 2, \dots,$ – независимые одинаково распределенные бернуллиевские случайные величины:

$$\mathbf{P}(\chi_1 = 1) = 1 - p \qquad \mathbf{P}(\chi_1 = \delta) = p.$$

Предположим, что они не зависят от последовательности величин $(Y_k(1), Y_k(\delta), Y_k(\delta^2))$, $k = 1, 2, \dots,$ и все эти величины не зависят от процесса Пуассона $N(t)$, $t \geqslant 0$, с интенсивностью λ_1.

Пусть χ_0 неслучайная величина со значения 1, δ или δ^2.

Нас интересует процесс

$$B_p(t) := \int_0^t Y_{N(s)}\Big(\prod_{j=0}^{N(s-)}\chi_j\Big)\,dN(s) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k\Big(\prod_{j=0}^{k-1}\chi_j\Big), \qquad t \geqslant 0,$$

который будем называть *сложным пуассоновским процессом с переключениями.*

Выбор $\chi_0 = 1$ означает, что суммирование начинается с величины $Y_1(1)$, а $\chi_0 = \delta$ или $\chi_0 = \delta^2$ означает, что суммирование начинается с величины $Y_1(\delta)$ или $Y_1(\delta^2)$.

Обозначим $\mathbf{E}_l$ математическое ожидание при условии $\chi_0 = l$, $l = 1, \delta, \delta^2$.

Положим

$$T_p(t) := \prod_{j=0}^{N(t)} \chi_j, \qquad t \geqslant 0.$$

Этот процесс отвечает за переключения. Рассмотрим двумерный процесс

$$\vec{Q}_p(t) = \big(T_p(t), x + B_p(t)\big), \qquad t \geqslant 0, \qquad \vec{Q}_p(0) = (\chi_0, x).$$

Этот процесс в отличие от $B_p(t)$ будет марковским.

Рассмотрим характеристическую функцию

$$\mathbf{E}_l \exp(i(\vec{\gamma}, \vec{Q}_p(t))) = e^{i\beta x}\mathbf{E}_l \exp(i\alpha T_p(t) + i\beta B_p(t)), \tag{2.1}$$

где $\vec{\gamma} := (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. Как и в случае броуновского движения с переключающейся дисперсией (см. (1.3)) для вычисления этой функции нужно рассмотреть преобразование Лапласа по времени.

В силу аддитивности второй координаты процесса, начальное значение x процесса $\vec{Q}_p(t)$ участвует в (2.1) в виде множителя $e^{i\beta x}$, поэтому значение x можно полагать равным нулю.

Вычислим преобразование Лапласа по t от характеристической функции (2.1).

Пусть τ – не зависящий от процесса Пуассона $N(t)$, $t \geqslant 0$, величин $(Y_k(1), Y_k(\delta), Y_k(\delta^2))$ и χ_k, $k = 1, 2, \ldots$, экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ случайный момент времени. В силу теоремы Фубини

$$\begin{aligned} I_l(\lambda, \alpha, \beta, \lambda_1, p) &:= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}_l \exp(i\alpha T_p(t) + i\beta B_p(t))\, dt \\ &= \mathbf{E}_l \exp(i\alpha T_p(\tau) + i\beta B_p(\tau)). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. *Двумерный процесс $\vec{Q}_p(t)$, $t \geqslant 0$, является однородным марковским процессом. Преобразование Лапласа по времени от характеристической функции переходной вероятности определяется* *формулой*

$$
\begin{aligned}
&I_l(\lambda,\alpha,\beta,\lambda_1,p) \qquad\qquad (2.3)\\
&= \frac{\lambda}{D(\lambda,\beta,\lambda_1,p)}\Big(e^{i\alpha l}(\lambda+\lambda_1(1-f_{l\delta}(\beta)(1-p)))(\lambda+\lambda_1(1-f_{l\delta^2}(\beta)(1-p)))\\
&+\lambda_1 p f_l(\beta)e^{i\alpha l\delta}(\lambda+\lambda_1(1-f_{l\delta^2}(\beta)(1-p)))+\lambda_1^2p^2f_l(\beta)f_{l\delta}(\beta)e^{i\alpha l\delta^2}\Big),
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
D(\lambda,&\beta,\lambda_1,p):=(\lambda+\lambda_1(1-f_1(\beta)(1-p)))(\lambda+\lambda_1(1-f_\delta(\beta)(1-p)))\\
&\times(\lambda+\lambda_1(1-f_{\delta^2}(\beta)(1-p)))-\lambda_1^3p^3f_1(\beta)f_\delta(\beta)f_{\delta^2}(\beta).
\end{aligned}
$$

Доказательство. Марковость процесса $\vec{Q}_p(t)$, $t\geqslant 0$, устанавливается аналогично тому как это сделано в работе [1]. Так же доказывается, что характеристическая функция переходной вероятности зависит только от разности моментов времени, поэтому процесс является однородным. Рассмотрим как устроены его переходные вероятности. Выведем для $I_l(\lambda,\alpha,\beta,\lambda_1,p)$, $l=1,\delta,\delta^2$, рекуррентную формулу.

Рассмотрим для определенности начальное значение $\chi_0=1$. Обозначим через ζ случайную величину, равную количеству величин χ_j, $j=1,2,\dots$, принявших значение 1 до первого появления δ. Эта величина имеет геометрическое распределение:

$$\mathbf{P}(\zeta=m)=(1-p)^m p,\qquad m=0,1,\dots,$$

и

$$\mathbf{P}(\zeta\geqslant v)=(1-p)^v,\qquad v=0,1,\dots.$$

Положим для краткости $I_l:=I_l(\lambda,\alpha,\beta,\lambda_1,p)$. Поскольку $\chi_{\zeta+1}=\delta$, то

$$
\begin{aligned}
I_1=\mathbf{E}_1\Big\{\exp\Big(i\alpha+i\beta\sum_{k=1}^{N(\tau)}Y_k(1)\Big);N(\tau)\leqslant\zeta\Big\}+\mathbf{E}\Big\{\exp\Big(i\beta\sum_{k=1}^{\zeta+1}Y_k(1)\Big)\\
\times\exp\Big(i\alpha\delta\prod_{j=\zeta+2}^{N(\tau)}\chi_j+i\beta\sum_{k=\zeta+2}^{N(\tau)}Y_k\Big(\delta\prod_{j=\zeta+2}^{k-1}\chi_j\Big)\Big);\zeta<N(\tau)\Big\}=:L_1+L_2.
\end{aligned}
$$

Здесь и далее полагаем произведение равным 1, когда верхний индекс меньше нижнего. Поскольку при $|s|\leqslant 1$

$$\mathbf{E}s^{N(\tau)}=\mathbf{E}\sum_{k=0}^{\infty}s^k\frac{(\lambda_1\tau)^k}{k!}e^{-\lambda_1\tau}=\mathbf{E}e^{\lambda_1(s-1)\tau}=\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1(1-s)},$$

то в силу теоремы Фубини

$$L_1 = e^{i\alpha}\mathbf{E}\Big\{\big(f_1(\beta)\,(1-p)\big)^{N(\tau)}\Big\} = \frac{\lambda e^{i\alpha}}{\lambda + \lambda_1(1 - f_1(\beta)(1-p))}.$$

Для L_2 получаем

$$L_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{E}\Big\{\mathbb{1}_{\{\zeta=m\}} \exp\Big(i\beta \sum_{k=1}^{m+1} Y_k(1)\Big)\Big\}\mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(i\alpha\delta \prod_{k=m+2}^{N(\tau)} \chi_k\Big)$$

$$\times \exp\Big(i\beta \sum_{k=m+2}^{N(\tau)} Y_k\Big(\delta \prod_{j=m+2}^{k-1} \chi_j\Big)\Big)\mathbb{1}_{\{m<N(\tau)\}}\Big\}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^m p f_1^{m+1}(\beta)\mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(i\alpha\delta \prod_{k=1}^{N(\tau)-m-1} \chi_{k+m+1}\Big)$$

$$\times \exp\Big(i\beta \sum_{k=1}^{N(\tau)-m-1} Y_{k+m+1}\Big(\delta \prod_{j=1}^{k-1} \chi_{j+m+1}\Big)\Big)\mathbb{1}_{\{m+1\leqslant N(\tau)\}}\Big\}$$

$$= p\sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^m f_1^{m+1}(\beta)\mathbf{E}_\delta\Big\{ \exp\Big(i\alpha \prod_{k=0}^{N(\tau)-m-1} \chi_k\Big)$$

$$\times \exp\Big(i\beta \sum_{k=1}^{N(\tau)-m-1} Y_k\Big(\prod_{j=0}^{k-1} \chi_j\Big)\Big)\mathbb{1}_{\{m+1\leqslant N(\tau)\}}\Big\}. \tag{2.4}$$

Индекс δ у математического ожидания означает, что выполняется условие $\chi_0 = \delta$. В последнем равенстве использовалась теорема Фубини и тот факт, что при любом фиксированном m случайные последовательности χ_j, $j = 1, 2, \ldots$, и χ_{j+m+1}, $j = 1, 2, \ldots$, одинаково распределены, а также, что для произвольной последовательности l_k, $k = 1, 2, \ldots$, составленной из 1, δ и δ^2 случайные последовательности $Y_k(l_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, и $Y_{k+m+1}(l_k)$, одинаково распределены.

Поскольку

$$\mathbf{P}(N(\tau) = k) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}\, e^{-\lambda_1 t}\, dt = \frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1}\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}\Big)^k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

то

$$\mathbf{E}_\delta\Big\{\exp\Big(i\alpha\prod_{k=0}^{N(\tau)-m-1}\chi_k\Big)\exp\Big(i\beta\sum_{k=1}^{N(\tau)-m-1}Y_k\Big(\prod_{j=0}^{k-1}\chi_j\Big)\Big)\mathbb{1}_{\{m+1\leqslant N(\tau)\}}\Big\}$$

$$=\sum_{v=m+1}^{\infty}\mathbf{E}_\delta\Big\{\exp\Big(i\alpha\prod_{k=0}^{v-m-1}\chi_k\Big)\exp\Big(i\beta\sum_{k=1}^{v-m-1}Y_k\Big(\prod_{j=0}^{k-1}\chi_j\Big)\Big)\Big\}\frac{\lambda\lambda_1^v}{(\lambda+\lambda_1)^{v+1}}$$

$$=\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}\Big)^{m+1}\mathbf{E}_\delta\exp\Big(i\alpha\prod_{k=0}^{N(\tau)}\chi_k+i\beta\sum_{k=1}^{N(\tau)}Y_k\Big(\prod_{j=0}^{k-1}\chi_j\Big)\Big)=\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}\Big)^{m+1}I_\delta.$$

Напомним, что I_δ определено в (2.2).

Теперь, согласно (2.4), имеем

$$I_1=\frac{\lambda e^{i\alpha}}{\lambda+\lambda_1(1-f_1(\beta)(1-p))}+p\sum_{m=0}^{\infty}(1-p)^m f_1^{m+1}(\beta)\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}\Big)^{m+1}I_\delta$$

$$=\frac{\lambda e^{i\alpha}}{\lambda+\lambda_1(1-f_1(\beta)(1-p))}+\frac{p\lambda_1 f_1(\beta)}{\lambda+\lambda_1(1-f_1(\beta)(1-p))}I_\delta.$$

Выполняя аналогичные вычисления при начальных условиях $\chi_0=\delta$ и $\chi_0=\delta^2$, получим общую формулу

$$I_l=\frac{1}{\lambda+\lambda_1(1-f_l(\beta)(1-p))}\big(\lambda e^{i\alpha l}+\lambda_1 p f_l(\beta)I_{l\delta}\big),\quad l=1,\delta,\delta^2. \tag{2.5}$$

Применяя это рекуррентное равенство три раза, получаем

$$I_l=\frac{1}{\lambda+\lambda_1(1-f_l(\beta)(1-p))}\Big(\lambda e^{i\alpha l}+\frac{\lambda_1 p f_l(\beta)}{\lambda+\lambda_1(1-f_{l\delta}(\beta)(1-p))}\Big(\lambda e^{i\alpha l\delta}$$

$$+\frac{\lambda_1 p f_{l\delta}(\beta)}{\lambda+\lambda_1(1-f_{l\delta^2}(\beta)(1-p))}\Big(\lambda e^{i\alpha l\delta^2}+\lambda_1 p f_{l\delta^2}(\beta)I_l\Big)\Big)\Big).$$

Отсюда следует (2.3).

Теорема доказана. □

Можно использовать формулу (2.3) или рекуррентное соотношение (2.5) для вычисления математического ожидания $\mathbf{E}_l B_p(\tau)$, $l=1,\delta,\delta^2$. Пусть $\alpha=0$. Дифференцируя эти формулы по β и полагая $\beta=0$, получаем

$$\mathbf{E}_l B_p(\tau)=\frac{\lambda_1(m_l(\lambda+\lambda_1 p)^2+m_{l\delta}\lambda_1 p(\lambda+\lambda_1 p)+m_{l\delta^2}\lambda_1^2p^2)}{\lambda((\lambda+\lambda_1 p)^2+\lambda_1 p(\lambda+\lambda_1 p)+\lambda_1^2p^2)}, \tag{2.6}$$

где $m_l := \mathbf{E}Y_1(l)$, $l = 1, \delta, \delta^2$. В этом равенстве можно обратить преобразование Лапласа по λ. Имеем

$$\mathbf{E}_l B_p(t) = \mathcal{L}_\lambda^{-1}\Big(\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_l B_p(\tau)\Big)\Big|_t = \int_0^t \mathcal{L}_\lambda^{-1}\Big(\mathbf{E}_l B_p(\tau)\Big)\Big|_s ds, \qquad (2.7)$$

где как и ранее $\mathcal{L}_\lambda^{-1}|_t$ – оператор обратного преобразования Лапласа по λ. Для вычисления обратного преобразования Лапласа по λ от правой части в (2.6) применим формулу (9) §5.2 гл. V из [8]. Положим $\eta := m_l$, $\mu := \lambda_1 p(2m_l + m_{l\delta})$, $\nu := \lambda_1^2 p^2(m_l + m_{l\delta} + m_{l\delta^2})$, $\alpha := 3\lambda_1 p/2$ и $\beta := \lambda_1 p\sqrt{3}/2$. Тогда

$$\mathcal{L}_\lambda^{-1}\Big(\frac{\mathbf{E}_l B_p(\tau)}{\lambda_1}\Big)\Big|_s = \mathcal{L}_\lambda^{-1}\Big(\frac{\eta\lambda^2 + \mu\lambda + \nu}{\lambda((\lambda+\alpha)^2+\beta^2)}\Big)\Big|_s = \Big(\eta - \frac{\nu}{\alpha^2+\beta^2}\Big)e^{-\alpha s}\cos(\beta s)$$
$$+ \Big(\mu - \alpha\eta - \frac{\alpha\nu}{\alpha^2+\beta^2}\Big)e^{-\alpha s}\frac{\sin(\beta s)}{\beta} + \frac{\nu}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Подставляя теперь в (2.7) значения интегралов

$$\int_0^t e^{-\alpha s}\cos(\beta s)\,ds = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}(\beta\sin(\beta t) - \alpha\cos(\beta t)),$$

$$\int_0^t e^{-\alpha s}\sin(\beta s)\,ds = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin(\beta t) + \beta\cos(\beta t)),$$

получаем

$$\frac{1}{\lambda_1}\mathbf{E}_l B_p(t) = \frac{\nu t}{\alpha^2+\beta^2} + \Big(\mu - \frac{2\alpha\nu}{\alpha^2+\beta^2}\Big)\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\Big(1 - e^{-\alpha t}\cos(\beta t)\Big)$$
$$+ \Big(\frac{\nu(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2+\beta^2} + \eta(\alpha^2+\beta^2) - \alpha\mu\Big)\frac{1}{\beta(\alpha^2+\beta^2)}e^{-\alpha t}\sin(\beta t)$$
$$= t\frac{m_1 + m_\delta + m_{\delta^2}}{3} + \frac{m_l - m_{l\delta^2}}{3\lambda_1 p}\Big(1 - e^{-3\lambda_1 pt/2}\cos(\lambda_1 pt\sqrt{3}/2)\Big)$$
$$+ \frac{m_l - 2m_{l\delta} + m_{l\delta^2}}{3\sqrt{3}\lambda_1 p}e^{-3\lambda_1 pt/2}\sin(\lambda_1 pt\sqrt{3}/2). \qquad (2.8)$$

Заметим, что величина $\frac{1}{a}\mathbf{E}_l B_{\frac{1}{a}}(at)$ при $a \to \infty$ имеет предел. Это важное обстоятельство к вопросу о выполнимости закона больших чисел для средних от сумм переключающихся слагаемых.

Кроме того отметим, что при условии $m_1 = m_\delta = m_{\delta^2} =: m$ математическое ожидание величины $B_p(t)$ имеет наиболее простое выражение: $\mathbf{E}_l B_p(t) = \lambda_1 mt$. Именно при этом условии в следующем параграфе изучается предельное поведение процесса $B_p(t)$, $t \geqslant 0$.

3. Предельное поведение сложного пуассоновского процесса с переключениями. Особенностью изучения предельного поведения сложного пуассоновского процесса с переключениями является то, что мы вынуждены предположить совпадение математических ожиданий у слагаемых. В противном случае не удается получить предельное распределение.

Предположим, что

$$\mathbf{E}Y_1(1) = \mathbf{E}Y_1(\delta) = \mathbf{E}Y_1(\delta^2) =: m.$$

При малой вероятности переключений равной $1/a$ ($a \to \infty$) мы в a раз увеличиваем время, при котором рассматривается процесс и в $\sqrt{a}$ уменьшаем значения сложного пуассоновского процесса с переключениями.

Определим центрированный и нормированный процесс:

$$L_a(t) := \frac{1}{\sqrt{a}}\big(B_{\frac{1}{a}}(at) - \lambda_1 mat\big) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{k=1}^{N(at)} Y_k\Big(\prod_{j=0}^{k-1} \chi_j\Big) - \lambda_1 \sqrt{a} mt. \quad (3.1)$$

Рассмотрим предельное поведение при $a \to \infty$ однородного марковского процесса

$$\vec{Z}_a(t) := \big(T_{\frac{1}{a}}(at), x + L_a(t)\big), \qquad t \geqslant 0.$$

Марковость процесса позволяет устанавливать сходимость конечномерных распределений рассматриваемого процесса к конечномерным распределениям предельного, основываясь на сходимости переходных вероятностей. Для сложного пуассоновского процесса с переключениями это доказано в [1].

При предположении $\chi_0 = l$, где l одно из значений $1, \delta, \delta^2$, в качестве предельного процесса выступает процесс $\vec{V}_l(t)$, определенный формулой (1.2).

Теорема 3.1. *Предположим, что* $\mathbf{E}Y_1(j) = m$ *и* $\mathbf{E}Y_1^2(j) = \sigma_j^2$, $j = 1, \delta, \delta^2$. *Тогда конечномерные распределения процесса* $\vec{Z}_a(t)$, $t \geqslant 0$, *сходятся при* $a \to \infty$ *к конечномерным распределениям процесса* $\vec{V}_l(t)$.

Доказательство. Положим $x = 0$. Используя (2.2) можно написать

$$\mathbf{E}_l \exp\Big(i\alpha T_p(\tau) + i\frac{\beta}{\sqrt{a}} B_p(\tau) - i\beta\lambda_1\sqrt{a}m\tau\Big)$$
$$= \frac{\lambda}{\lambda + i\beta\lambda_1\sqrt{a}m} I_l(\lambda + i\beta\lambda_1\sqrt{a}m, \alpha, \beta, \lambda_1, p). \tag{3.2}$$

Увеличение времени τ в a раз приводит к тому, что в этом соотношении либо λ заменяется на λ/a, либо, что эквивалентно, λ_1 заменяется на $a\lambda_1$. Это следует, например, из формулы (2.3).

Рассмотрим сначала предельное поведение величин

$$\vec{Z}_a(\tau) := \Big(T_{\frac{1}{a}}(a\tau), x + \frac{1}{\sqrt{a}} B_{\frac{1}{a}}(a\tau) - \lambda_1\sqrt{a}\tau\Big), \qquad \text{при} \qquad a \to \infty.$$

Поскольку начальное значение x второй компоненты этого вектора аддитивно входит в выражение, то можно рассматривать предельное поведение лишь при $x = 0$. Для сходимости совместных распределений двумерных векторов достаточно изучить предельное поведение при $a \to \infty$ их характеристических функций:

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}\exp\big(i(\vec{\gamma}, \vec{Z}_a(\tau))\big) = \frac{1}{\lambda + i\beta\lambda_1\sqrt{a}m} I_l(\lambda + i\beta\lambda_1\sqrt{a}m, \alpha, \beta/\sqrt{a}, a\lambda_1, 1/a),$$

где $\vec{\gamma} = (\alpha, \beta)$.

Используя асимптотическое разложение характеристической функции $f_l(\beta)$, при малых β, имеем

$$a\lambda_1\Big(1 - f_l\big(\frac{\beta}{\sqrt{a}}\big)\big(1 - \frac{1}{a}\big)\Big) = a\lambda_1\Big(1 - \big(1 + i\frac{\beta m}{\sqrt{a}} - \frac{\beta^2\sigma_l^2}{2a} + o\big(\frac{1}{a}\big)\big)\big(1 - \frac{1}{a}\big)\Big)$$
$$= \lambda_1 - i\beta\lambda_1\sqrt{a}m + \lambda_1\beta^2\sigma_l^2/2 + o(1).$$

Тогда в соотношении (2.3), в котором λ заменяется на $\lambda + i\beta\lambda_1\sqrt{a}m$, β на $\beta/\sqrt{a}$, λ_1 на $a\lambda_1$ и p на $1/a$ можно перейти к пределу. Имеем

$$\lim_{a\to\infty}\Big(\lambda + i\beta\lambda_1\sqrt{a}m + a\lambda_1\Big(1 - f_l(\beta/\sqrt{a})\big(1 - \frac{1}{a}\big)\Big)\Big)$$
$$= \lambda + \lambda_1 + \lambda_1\beta^2\sigma_l^2/2 = \lambda + \Delta_l, \tag{3.3}$$

где в последнем равенстве использовалось обозначение Δ_l, введенное перед формулой (1.9). Тогда в силу (2.3) и (3.2) при $a \to \infty$

$$\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}\exp\big(i(\vec{\gamma}, \vec{Z}_a(\tau))\big) \to \frac{e^{i\alpha l}(\lambda + \Delta_{l\delta})(\lambda + \Delta_{l\delta^2}) + e^{i\alpha l\delta}\lambda_1(\lambda + \Delta_{l\delta^2}) + e^{i\alpha l\delta^2}\lambda_1^2}{(\lambda + \Delta_l)(\lambda + \Delta_{l\delta})(\lambda + \Delta_{l\delta^2}) - \lambda_1^3}.$$

В силу (1.10) правая часть этого выражения равна $\frac{1}{\lambda}Q_l(0)$, т.е. согласно (1.3), имеем

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}\exp\big(i(\vec{\gamma},\vec{Z}_a(\tau))\big)=\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}\exp\big(i\alpha l\delta^{N(\tau)}+i\beta S_{l,0}(\tau)\big). \tag{3.4}$$

Функция в правой части (3.4), в свою очередь, является преобразованием Лапласа по t от совместной характеристической функции

$$\mathbf{E}\exp\big(i\alpha l\delta^{N(t)}+i\beta S_{l,0}(t)\big).$$

Из сходимости (см. (3.3)) при $a\to\infty$ коэффициентов полиномов $D(\lambda+i\beta\lambda_1\sqrt{a}m,\beta/\sqrt{a},a\lambda_1,1/a)$, определенных при формулировке теоремы 2.1, следует сходимость их корней. В силу простой структуры характеристической функции (1.11) и значит аналогичной при больших a структуры допредельной функции, сходимость преобразований Лапласа (3.4) влечет сходимость обратных преобразований, т.е. при $a\to\infty$

$$\mathbf{E}_l\exp\Big(i\alpha T_{\frac{1}{a}}(at)+i\frac{\beta}{\sqrt{a}}B_{\frac{1}{a}}(at)-i\beta\lambda_1\sqrt{a}mt\Big)$$
$$\to\mathbf{E}\exp\big(i\alpha l\delta^{N(t)}+i\beta S_{l,0}(t)\big). \tag{3.5}$$

Это эквивалентно сходимости характеристических функций переходных вероятностей однородного марковского процесса $\vec{Z}_a(t)$. Как уже отмечалось, в [1] установлено, что из (3.5) следует сходимость конечномерных распределений. Теорема доказана. □

4. Переключения между произвольным числом значений. Пусть число последовательностей независимых одинаково распределенных случайных величин равно d. Переключения с одной последовательности на другую происходят циклически и задаются произведениями корней степени d из единицы, т.е. величинами $\delta:=e^{i2\pi/d}$.

Предположим, что $(Y_k(1),Y_k(\delta),\dots,Y_k(\delta^{d-1}))$, $k=1,2,\dots,$ – независимые одинаково распределенные d-мерные случайные векторы. Обозначим через $f_{\delta^j}(\beta):=\mathbf{E}e^{i\beta Y_1(\delta^j)}$, $j=0,1,\dots,d-1$, характеристические функции их координат. Все остальные обозначения остаются в силе.

Основное утверждение: теорема 3.1 верна при любом d.

Остановимся лишь на некоторых моментах доказательства. Центральным местом первого параграфа, в котором вычислялась совместная характеристическая функция переключателя и броуновского движения с переключающейся дисперсией, функция (1.3), является формула (1.9). Она верна при любом d. Знаменатель формулы (1.10) в этом случае будет иметь вид

$$\prod_{j=0}^{d-1}(\lambda + \Delta_{\delta^j}) - \lambda_1^d, \qquad \Delta_{\delta^j} > \lambda_1. \tag{4.1}$$

Важным обстоятельством является то, что все корни этого полинома по λ согласно критерию Рауса-Гурвица (см. критерий в [6]) имеют отрицательные действительные части. Это верно по следующей причине. Критерий является необходимым и достаточным, и основан на строгой положительности главных диагональных миноров матрицы Гурвица. Все такие миноры, кроме определителя самой матрицы, совпадают с такими же минорами для полинома

$$\prod_{j=0}^{d-1}(\lambda + \Delta_{\delta^j}), \tag{4.2}$$

и, следовательно, они являются строго положительными, поскольку полином (4.2) имеет отрицательные корни $-\Delta_{\delta^j}$. Отличаться будут лишь определители самих матриц Гурвица, содержащих в правом нижнем углу свободные члены, но эти определители отличаются на множитель, равный отношению свободных членов, которые у этих полиномов строго положительны.

Обозначив корни полинома (4.1) через $-r_j$, $j = 1, 2, \ldots, d$, мы имеем следующую явную структуру для обратного преобразования Лапласа (аналог (1.11))

$$\mathbf{E} \exp\Big(i\alpha l \delta^{N(t)} + i\beta S_{l,0}(t)\Big) = \sum_{j=1}^{d} A_{l,j} e^{-r_j t},$$

где $\mathrm{Re}\, r_j > 0$. Такая структура при больших a сохранится, в силу (3.3), и у характеристической функции допредельного процесса, т.е. у функции $\mathbf{E}_l \exp(i(\vec{\gamma}, \overrightarrow{Q}_p(t)))$. Это гарантирует сходимость обратных преобразований Лапласа (см. (3.5)) из сходимости самих преобразований, т.е. из (3.4).

Остановимся теперь на некоторых явных формулах при $d = 4$.

Аналог формулы (1.10) имеет вид

$$\frac{1}{\lambda}Q_l(0)=\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}\exp\Big(i\alpha l\delta^{N(\tau)}+i\beta S_{l,0}(\tau)\Big)$$
$$=\frac{e^{i\alpha l}(\lambda+\Delta_{l\delta})(\lambda+\Delta_{l\delta^2})(\lambda+\Delta_{l\delta^3})+\lambda_1 e^{i\alpha l\delta}(\lambda+\Delta_{l\delta^2})(\lambda+\Delta_{l\delta^3})}{(\lambda+\Delta_l)(\lambda+\Delta_{l\delta})(\lambda+\Delta_{l\delta^2})(\lambda+\Delta_{l\delta^3})-\lambda_1^4}$$
$$+\frac{\lambda_1^2 e^{i\alpha l\delta^2}(\lambda+\Delta_{l\delta^3})+\lambda_1^3 e^{i\alpha l\delta^3}}{(\lambda+\Delta_l)(\lambda+\Delta_{l\delta})(\lambda+\Delta_{l\delta^2})(\lambda+\Delta_{l\delta^3})-\lambda_1^4}. \tag{4.3}$$

Для компактной записи аналога формулы (2.3) удобно ввести обозначение $\Delta_l(\beta,p):=\lambda_1(1-f_l(\beta)(1-p))$. Тогда

$$I_l(\lambda,\alpha,\beta,\lambda_1,p)=\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}_l\exp(i\alpha T_p(t)+i\beta B_p(t))\,dt \tag{4.4}$$
$$=\frac{\lambda}{D(\lambda,\beta,\lambda_1,p)}\Big(e^{i\alpha l}\prod_{j=1}^{3}(\lambda+\Delta_{l\delta^j}(\beta,p))+\lambda_1 p f_l(\beta)e^{i\alpha l\delta}\prod_{j=2}^{3}(\lambda+\Delta_{l\delta^j}(\beta,p))$$
$$+\lambda_1^2p^2 f_l(\beta)f_{l\delta}(\beta)e^{i\alpha l\delta^2}(\lambda+\Delta_{l\delta^3}(\beta,p))+\lambda_1^3p^3 f_l(\beta)f_{l\delta}(\beta)f_{l\delta^2}(\beta)e^{i\alpha l\delta^3}\Big),$$
где
$$D(\lambda,\beta,\lambda_1,p):=\prod_{j=0}^{3}(\lambda+\Delta_{\delta^j}(\beta,p))-\lambda_1^4p^4 f_1(\beta)f_\delta(\beta)f_{\delta^2}(\beta)f_{\delta^3}(\beta).$$

Можно использовать формулу (4.4) или соответствующее ей рекуррентное соотношение (2.5) для вычисления математического ожидания $\mathbf{E}_l B_p(\tau)$, $l=1,\delta,\delta^2,\delta^3$. Пусть $\alpha=0$. Дифференцируя эти формулы по β и полагая $\beta=0$, получаем

$$\frac{1}{\lambda_1}\mathbf{E}_l B_p(\tau) \tag{4.5}$$
$$=\frac{m_l(\lambda+\lambda_1p)^3+m_{l\delta}\lambda_1 p(\lambda+\lambda_1p)^2+m_{l\delta^2}\lambda_1^2p^2(\lambda+\lambda_1p)+m_{l\delta^3}\lambda_1^3p^3}{(\lambda+\lambda_1p)^4-\lambda_1^4p^4},$$

где $m_l := \mathbf{E}Y_1(l)$. В этом равенстве можно обратить преобразование Лапласа по λ. Имеем

$$\mathbf{E}_l B_p(t) = \mathcal{L}_\lambda^{-1}\Big(\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_l B_p(\tau)\Big)\Big|_t = \int\limits_0^t \mathcal{L}_\lambda^{-1}\big(\mathbf{E}_l B_p(\tau)\big)\big|_s\,ds \tag{4.6}$$

$$= \lambda_1 \int\limits_0^t e^{-\lambda_1 ps}\mathcal{L}_{\widetilde{\lambda}}^{-1}\Big(\frac{m_l\widetilde{\lambda}^3 + m_{l\delta}\lambda_1 p\widetilde{\lambda}^2 + m_{l\delta^2}\lambda_1^2p^2\widetilde{\lambda} + m_{l\delta^3}\lambda_1^3p^3}{\widetilde{\lambda}^4 - \lambda_1^4p^4}\Big)\Big|_s\,ds,$$

где как и ранее $\mathcal{L}_{\widetilde{\lambda}}^{-1}|_t$ – оператор обратного преобразования Лапласа по $\widetilde{\lambda}$. Для вычисления обратного преобразования Лапласа по $\widetilde{\lambda}$ применим формулу (12) §5.2 гл. V из [8]. В результате имеем

$$\frac{1}{\lambda_1}\mathbf{E}_l B_p(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t e^{-\lambda_1 ps}\big((m_l - m_{l\delta^2})\cos(\lambda_1 ps) + (m_{l\delta} - m_{l\delta^3})\sin(\lambda_1 ps)$$
$$+ (m_l + m_{l\delta^2})\operatorname{ch}(\lambda_1 ps) + (m_{l\delta} + m_{l\delta^3})\operatorname{sh}(\lambda_1 ps)\big)ds$$
$$= \frac{m_l - m_{l\delta} - m_{l\delta^2} + m_{l\delta^3}}{4\lambda_1 p}e^{-\lambda_1 pt}\sin(\lambda_1 pt)$$
$$+ \frac{m_l + m_{l\delta} - m_{l\delta^2} - m_{l\delta^3}}{4\lambda_1 p}\big(1 - e^{-\lambda_1 pt}\cos(\lambda_1 pt)\big)$$
$$+ \frac{t(m_l + m_{l\delta} + m_{l\delta^2} + m_{l\delta^3})}{4} + \frac{m_l - m_{l\delta} + m_{l\delta^2} - m_{l\delta^3}}{8\lambda_1 p}\big(1 - e^{-2\lambda_1 pt}\big).$$

Как и в случае переключения между тремя наборами величин математическое ожидание $\frac{1}{a}\mathbf{E}_l B_{\frac{1}{a}}(at)$ при $a \to \infty$ имеет предел. Также при условии $m_1 = m_\delta = m_{\delta^2} = m_{\delta^3} = m$ математическое ожидание величины $B_p(t)$ имеет наиболее простое выражение: $\mathbf{E}_l B_p(t) = \lambda_1 mt$. Только при этом условии и изучается предельное поведение процесса $L_a(t)$, $t \geqslant 0$.

Если $m_l = m_{l\delta^2}$ и $m_{l\delta} = m_{l\delta^3}$, то мы фактически имеем математическое ожидание, отвечающее переключению между двумя наборами последовательностей и ответ совпадает с соответствующим выражением для переключения между двумя последовательностями величин (см. формулу (3.5) из [9]).

Список литературы

1. А. Н. Бородин, *Предельное поведение сложного пуассоновского процесса с переключениями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 54–66.
2. А. Н. Бородин, *Предельное поведение сложного пуассоновского процесса с переключениями и доминирующими слагаемыми.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **474** (2018), 46–62.
3. А. Н. Бородин, *Распределения функционалов от диффузий с переключениями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 52–81.
4. А. Н. Бородин, *Распределения функционалов от телеграфного процесса и диффузий с переключениями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 38–53.
5. А. Н. Бородин, *Случайные процессы*, Санкт-Петербург, Лань, 2013.
6. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, 3-е изд., Наука, М. 1967.
7. А. Г. Курош, *Курс высшей алгебры*, 11-е изд., Наука, М. 1975.
8. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований*, т. 1, Наука, М. 1969.
9. Е. С. Гарай, *О сходимости нагрузки в системе обслуживания к броуновскому движению с переключающейся дисперсией.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **474** (2018), 77–89.

Borodin A. N. Limit behaviour of a compound Poisson process with switching between multiple values.

The paper deals with the limit behaviour of a compound Poisson process with switching between a finite number of sequences of i.i.d. random variables. The switching is provided with Bernulli's random variables. Under suitable normalization the limit process is a Brownian motion with switching variance.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 13 ноября 2019 г.