Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 486, 2019 г.

А. Н. Бородин

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ БРОУНОВСКОГО ПРОЦЕССА С НЕСТАНДАРТНЫМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ

1. Броуновский процесс с нестандартным переключением. Стандартные переключения с одного набора диффузионных коэффициентов на другой наступают в случайные моменты времени, соответствующие моментам скачков процесса Пуассона, независящего от исходных диффузий. Распределения функционалов от диффузий с такими переключениями изучались, например, в работе [1]. Можно рассмотреть другие переключения, осуществляемые в моменты остановки зависящие от траекторий переключающегося диффузионного процесса. Рассматривается процесс броуновского движения с дисперсией принимающей одно из двух состояний и переключение, зависящее от траектории процесса. Наиболее привлекательным с вычислительной точки зрения является момент, обратный к локальному времени.

Пусть $W(s)$, $s \geqslant 0$, стандартный процесс броуновского движения. Рассмотрим два набора броуновских движений с различными диффузионными коэффициентами, $W_j(s) := \sigma_j W(s)$, $s \geqslant 0$, где $\sigma_j > 0$, $j = -1, 1$. Полагаем $W_j(0) = x$.

Если для процесса X с вероятностью единица для всех $(t, r) \in [0, T] \times \mathbf{R}$ существует предел

$$\ell_X(t, r) = \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\delta + \varepsilon} \int\limits_0^t \mathbb{1}_{(r-\delta, r+\varepsilon)}(X(s))\, ds,$$

то он называется *локальным временем* процесса X.

В дальнейшем, в качестве процесса X будут выступать процессы $W_j(s)$, $s \geqslant 0$, определенные на различных случайных интервалах времени. Локальное время у этих процессов существует. Для них является

Ключевые слова: диффузии с переключениями, распределения функционалов, момент обратный к локальному времени.

Настоящая работа частично поддерживалась грантом РФФИ 16-01-00367 и грантом СПбГУ-ННИО No. 6.65.37.2017.

конечным и *момент, обратный к локальному времени*

$$\varrho_X(q,r) = \min\{s : \ell_X(s,r) = q\}.$$

Важно, что в момент $\varrho_X(q,r)$ процесс X принимает значение r, поскольку, в силу определения, значение локального времени меняется только в те моменты времени, в которые сам процесс пересекает уровень r.

Броуновское движение с переключающейся дисперсией имеет следующий вид:

$$B_j(t) := x + \int_0^t \sigma_{j(-1)^{S(s)}}\, dW(s), \qquad j = -1, 1, \tag{1.1}$$

где

$$S(t) := \max\{k : \varkappa_k \leqslant t\} \mathbb{1}_{[0,t]}(\varkappa_1).$$

Здесь индекс j характеризует начальный выбор коэффициента диффузии, а моменты $\varkappa_k$, $k = 1, 2, \ldots$, определяются рекуррентно следующим образом. Пусть

$$\begin{cases} \varkappa_1 := \min\{s \geqslant 0 : \ell_{W_j}(s,r) = q\} = \varrho_{W_j}(q,r), \\ \varkappa_2 := \min\{s \geqslant \varkappa_1 : \ell_{B_j}(s,r) - \ell_{B_j}(\varkappa_1, r) = q\}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varkappa_{k+1} := \min\{s \geqslant \varkappa_k : \ell_{B_j}(s,r) - \ell_{B_j}(\varkappa_k, r) = q\}. \end{cases}$$

Нас интересуют результаты, позволяющие вычислять распределения различных функционалов от броуновского процесса с переключениями в моменты обратные к локальному времени на заданном уровне. Для броуновского движения, основополагающее значение для развития теории распределений интегральных функционалов имеет работа М. Каца [2].

2. Распределение интегральных функционалов. Рассмотрим метод вычисления распределения интегрального функционала

$$I_j(t) := \int_0^t f\big(j(-1)^{S(s)}, B_j(s)\big)\, ds, \quad f \geqslant 0, \;\; j = 1, -1.$$

Общий подход к вычислению распределений интегральных функционалов от броуновского движения был описан в [3 §1, гл. III]. Этот подход применим к широкому классу процессов, в частности к диффузиям с переключениями. Поэтому мы будем рассматривать лишь основные результаты, которые позволяют вычислять искомые совместные распределения в рамках этого общего подхода.

Пусть τ – не зависящий от броуновского движения $\{W(s), s\geqslant 0\}$ экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ случайный момент времени.

Этот момент соответствует преобразованию Лапласа по времени t от распределения функционала. Для того чтобы получить распределение функционала в момент t, следует обратить преобразование Лапласа по λ в распределении соответствующего функционала в момент τ.

Обозначим $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$ вероятность и математическое ожидание по процессам B_j, $j = 1, -1$, при условии $B_j(0) = x$. Для краткости будем использовать обозначение $\mathbf{E}\{\xi;\, A\} := \mathbf{E}\{\xi \mathbb{1}_A\}$.

Теорема 2.1. *Пусть $\Phi(j,x)$ и $f(j,x)$, $x \in \mathbf{R}$, $j = 1, -1$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f \geqslant 0$ и Φ ограничена. Тогда*

$$Q_j(x) := \mathbf{E}_x\biggl\{\Phi\bigl(j(-1)^{S(\tau)}, B_j(\tau)\bigr)\exp\biggl(-\int\limits_0^\tau f\bigl(j(-1)^{S(s)}, B_j(s)\bigr)\,ds\biggr)\biggr\}$$

$$= U_j(x) - e^{-q\sigma_j^2\omega_j/2}\Bigl(\psi_j(x)\mathbb{1}_{(-\infty,r)}(x) + \varphi_j(x)\mathbb{1}_{[r,\infty)}(x)\Bigr)$$

$$\times\, \frac{1 - e^{-q\sigma_{-j}^2\omega_{-j}/2}}{1 - e^{-q(\sigma_j^2\omega_j + \sigma_{-j}^2\omega_{-j})/2}}\bigl(U_j(r) - U_{-j}(r)\bigr), \qquad (2.1)$$

где при каждом $j = -1, 1$ функция $U_j(x)$, $x \in \mathbf{R}$, является единственным ограниченным решением уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma_j^2 U''(x) - (\lambda + f(j,x))U(x) = -\lambda\Phi(j,x), \qquad (2.2)$$

а $\psi_j(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – неотрицательное возрастающее, $\varphi_j(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – неотрицательное убывающее решения уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma_j^2 Y''(x) - (\lambda + f(j,x))Y(x) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}, \qquad (2.3)$$

удовлетворяющие условию $\psi_j(r) = \varphi_j(r) = 1$, и

$$\omega_j = \psi_j'(x)\varphi_j(x) - \psi_j(x)\varphi_j'(x)$$

их вронскиан, который постоянен.

Замечание 2.1 Для кусочно непрерывных функций f и $\varPhi$ уравнение (2.2), а также (2.3), при каждом j надо понимать следующим образом: оно имеет место во всех точках непрерывности функций f и $\varPhi$, а в точках разрыва f и $\varPhi$ его решение непрерывно вместе с первой производной.

Доказательство теоремы 2.1**.** Функция $U_j(x)$, $x \in \mathbf{R}$, имеет (см. [3], гл. IV, теорема 4.2, $a = -\infty$, $b = \infty$) следующую вероятностную интерпретацию:

$$U_j(x) := \mathbf{E}_x\biggl\{\varPhi(j, W_j(\tau)) \exp\biggl(-\int\limits_0^\tau f(j, W_j(s))\, ds\biggr)\biggr\}. \tag{2.4}$$

Воспользуемся тем, что $\{\tau < \varkappa_1\} = \{\ell_{W_j}(\tau, r) < q\}$ и что τ не зависит от процесса B_j. Имеем

$$\begin{aligned}
Q_j(x) &= \mathbf{E}_x\biggl\{\varPhi(j, W_j(\tau)) \exp\biggl(-\int\limits_0^\tau f(j, W_j(s))\, ds\biggr); \tau < \varkappa_1\biggr\} \\
&\quad + \mathbf{E}_x\biggl\{\varPhi\bigl(j(-1)^{S(\tau)}, B_j(\tau)\bigr) \exp\biggl(-\int\limits_0^{\varkappa_1} f(j, W_j(s))\, ds\biggr) \\
&\qquad \times \exp\biggl(-\int\limits_{\varkappa_1}^\tau f\bigl(j(-1)^{S(s)}, B_j(s)\bigr)\, ds\biggr); \tau \geqslant \varkappa_1\biggr\} \\
&= \mathbf{E}_x\biggl\{\varPhi(j, W_j(\tau)) \exp\biggl(-\int\limits_0^\tau f(j, W_j(s))\, ds\biggr); \ell_{W_j}(\tau, r) < q\biggr\} \\
&\quad + \lambda \mathbf{E}_x \int\limits_{\varkappa_1}^\infty e^{-\lambda t} \exp\biggl(-\int\limits_0^{\varkappa_1} f(j, W_j(s))\, ds\biggr) \\
&\qquad \times \varPhi\bigl(j(-1)^{S(t)}, B_j(t)\bigr) \exp\biggl(-\int\limits_{\varkappa_1}^t f\bigl(j(-1)^{S(s)}, B_j(s)\bigr)\, ds\biggr) dt \\
&=: V_j(x) + L_j(x)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где $V_j(x)$ и $L_j(x)$ – соответственно первое и второе слагаемые.

Используя свойства обратного преобразования Лапласа, имеем $V_j(x)=\mathcal{L}_\gamma^{-1}\Big(\gamma^{-1}M_\gamma(x)\Big)$, где

$$M_\gamma(x):=\mathbf{E}_x\bigg\{\varPhi(j,W_j(\tau))\exp\bigg(-\int\limits_0^\tau f(j,W_j(s))\,ds-\gamma\ell_{W_j}(\tau,r)\bigg),$$

$\mathcal{L}_\gamma^{-1}$ – оператор обратного преобразования Лапласа по γ. Согласно теореме 3.1 и замечанию 3.1 из [3 гл. III] функция $M_\gamma(x)$, $x\in\mathbf{R}$, является единственным непрерывным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2}\sigma_j^2M''(x)-(\lambda+f(j,x))M(x)=-\lambda\varPhi(j,x),\qquad x\neq r, \tag{2.6}$$

$$M'(r+0)-M'(r-0)=\frac{2\gamma}{\sigma_j^2}M(r). \tag{2.7}$$

Пусть функции φ_j, ψ_j и U_j определены как в формулировке теоремы. Тогда решение $M_\gamma(x)$, $x\in\mathbf{R}$, задачи (2.6), (2.7) можно представить в следующем виде:

$$M_\gamma(x)=U_j(x)-U_j(r)\frac{2\gamma}{2\gamma+\sigma_j^2\omega_j}\Big(\psi_j(x)\mathbb{1}_{(-\infty,r)}(x)+\varphi_j(x)\mathbb{1}_{[r,\infty)}(x)\Big). \tag{2.8}$$

Действительно, функция $M_\gamma(x)$ такого вида является при $x\neq r$ непрерывным ограниченным решением уравнения (2.6) и выполняется условие

$$\begin{aligned}M_\gamma'(r+0)-M_\gamma'(r-0)&=-U_j(r)\frac{2\gamma}{2\gamma+\sigma_j^2\omega_j}(\varphi_j'(r)-\psi_j'(r))\\&=U_j(r)\frac{2\gamma\omega_j}{2\gamma+\sigma_j^2\omega_j}=\frac{2\gamma}{\sigma_j^2}M_\gamma(r).\end{aligned}$$

Обращая в (2.8), деленном на γ, преобразование Лапласа по γ, имеем

$$V_j(x)=U_j(x)-U_j(r)e^{-q\sigma_j^2\omega_j/2}\Big(\psi_j(x)\mathbb{1}_{(-\infty,r)}(x)+\varphi_j(x)\mathbb{1}_{[r,\infty)}(x)\Big). \tag{2.9}$$

Рассмотрим слагаемое $L_j(x)$, $x\in\mathbf{R}$. В выражении для $L_j(x)$ сделаем замену переменной $t=u+\varkappa_1$. Положим $\widetilde{S}(u):=S(u+\varkappa_1)-S(\varkappa_1)$, $\widetilde{W}(u):=W(u+\varkappa_1)-W(\varkappa_1)$,

$$\widetilde{B}_{-j}(u):=B_j(u+\varkappa_1)=B_j(u+\varkappa_1)-B_j(\varkappa_1)+r=r+\int\limits_0^u\sigma_{-j(-1)^{\widetilde{S}(s)}}\,d\widetilde{W}(s).$$

Мы пользуемся тем, что $(-1)^{S(\varkappa_1)}=-1$, и что $\widetilde{W}(s)$, $s\geqslant 0$, – снова броуновское движение. Тогда

$$L_j(x)=\mathbf{E}_x\biggl\{\exp\biggl(-\int_0^{\varkappa_1}(\lambda+f(j,W_j(s)))\,ds\biggr)\lambda\int_0^{\infty}e^{-\lambda u}$$
$$\times\varPhi\bigl(-j(-1)^{\widetilde{S}(u)},\widetilde{B}_{-j}(u)\bigr)\exp\biggl(-\int_0^u f\bigl(-j(-1)^{\widetilde{S}(v)},\widetilde{B}_{-j}(v)\bigr)\,dv\biggr)du\biggr\}.$$

По теореме Фубини интеграл по параметру u с весом $\lambda\,e^{-\lambda u}$ можно заменить на подынтегральное выражение с $\widetilde{\tau}$ вместо u, где $\widetilde{\tau}$ – экспоненциально распределенная с параметром λ случайная величина, не зависящая от других процессов и величин. Тем самым, для $L_j(x)$ получим следующее выражение:

$$L_j(x)=\mathbf{E}_x\biggl\{\exp\biggl(-\int_0^{\varkappa_1}(\lambda+f(j,B_j(s)))\,ds\biggr)\biggr\}\mathbf{E}_r\biggl\{\varPhi\bigl(-j(-1)^{\widetilde{S}(\widetilde{\tau})},\widetilde{B}_{-j}(\widetilde{\tau})\bigr)$$
$$\times\exp\biggl(-\int_0^{\widetilde{\tau}}f\Bigl(-j(-1)^{\widetilde{S}(s)},\widetilde{B}_{-j}(s)\Bigr)ds\biggr)\biggr\}=D_j(x)Q_{-j}(r),$$

где

$$D_j(x):=\mathbf{E}_x\biggl\{\exp\biggl(-\int_0^{\varkappa_1}(\lambda+f(j,B_j(s)))\,ds\biggr)\biggr\}. \tag{2.10}$$

Здесь мы воспользовались тем, что процессы $\widetilde{S}(s)$ и $\widetilde{B}_{-j}(s)$, $s\geqslant 0$, не зависят от σ-алгебры событий, порожденных исходным броуновским движением W_j до момента $\varkappa_1$.

В силу (2.5) имеем

$$Q_j(x)=V_j(x)+D_j(x)Q_{-j}(r).$$

Применяя это соотношение с заменой j на $-j$ получаем

$$Q_j(r)=V_j(r)+V_{-j}(r)D_j(r)+D_j(r)D_{-j}(r)Q_j(r)$$

или

$$Q_j(r)=\frac{V_j(r)+V_{-j}(r)D_j(r)}{1-D_j(r)D_{-j}(r)}.$$

В результате имеем

$$Q_j(x) = V_j(x) + D_j(x)\frac{V_{-j}(r) + V_j(r)D_{-j}(r)}{1 - D_j(r)D_{-j}(r)}. \qquad (2.11)$$

Согласно теореме 7.3 из [3, гл. III] при $a = -\infty$, $b = \infty$

$$D_j(x) = e^{-q\sigma_j^2\omega_j/2}\big(\psi_j(x)\mathbb{1}_{(-\infty,r)}(x) + \varphi_j(x)\mathbb{1}_{[r,\infty)}(x)\big).$$

Отсюда следует, что $D_j(r) = e^{-q\sigma_j^2\omega_j/2}$. Подставив эти соотношения и выражение (2.9) в (2.11) получим

$$\begin{aligned}Q_j(x) = U_j(x) - e^{-q\sigma_j^2\omega_j/2}\Big(\psi_j(x)\mathbb{1}_{(-\infty,r)}(x) + \varphi_j(x)\mathbb{1}_{[r,\infty)}(x)\Big)\\ \times\Bigg(U_j(r) - \frac{1 - e^{-q\sigma_{-j}^2\omega_{-j}/2}}{1 - e^{-q(\sigma_j^2\omega_j + \sigma_{-j}^2\omega_{-j})/2}}U_{-j}(r) - e^{-q\sigma_{-j}^2\omega_{-j}/2}\\ \times\frac{1 - e^{-q\sigma_j^2\omega_j/2}}{1 - e^{-q(\sigma_j^2\omega_j + \sigma_{-j}^2\omega_{-j})/2}}U_j(r)\Bigg).\end{aligned}$$

Отсюда очевидно следует (2.1). Теорема доказана. □

Пример 2.1. Вычислим совместную характеристическую функцию процесса $(-1)^{S(t)}$ и броуновского движения с переключающейся дисперсией.

Вычислим

$$Q_1(x) = \mathbf{E}_x \exp\Big(i\alpha(-1)^{S(\tau)} + i\beta B_1(\tau)\Big).$$

Здесь $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$ и $x \in \mathbf{R}$ обозначает начальное состояние процесса B_1.

Для вычисления $Q_1(x)$ применим теорему 2.1 при $\varPhi(j,x) = e^{i\alpha j + i\beta x}$, $f(x) \equiv 0$. В данном случае ограниченное решение уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma_j^2 U_j''(x) - \lambda U_j(x) = -\lambda e^{i\alpha j}e^{i\beta x}$$

имеет вид

$$U_j(x) = \frac{2\lambda e^{i\alpha j}e^{i\beta x}}{2\lambda + \sigma_j^2\beta^2}.$$

В этом случае

$$\psi_j(x) = e^{(x-r)\sqrt{2\lambda}/\sigma_j}, \quad \varphi_j(x) = e^{(r-x)\sqrt{2\lambda}/\sigma_j}, \quad \omega_j = 2\sqrt{2\lambda}/\sigma_j.$$

Согласно (2.1) имеем

$$Q_1(x) = \frac{2\lambda e^{i\alpha+i\beta x}}{2\lambda+\sigma_1^2\beta^2} - e^{-q\sigma_1\sqrt{2\lambda}} e^{-|x-r|\sqrt{2\lambda}/\sigma_1} \\ \times \frac{1-e^{-q\sigma_{-1}\sqrt{2\lambda}}}{1-e^{-q\sqrt{2\lambda}(\sigma_1+\sigma_{-1})}} \Big(\frac{2\lambda e^{i\alpha+i\beta r}}{2\lambda+\sigma_1^2\beta^2} - \frac{2\lambda e^{-i\alpha+i\beta r}}{2\lambda+\sigma_{-1}^2\beta^2}\Big), \tag{2.12}$$

Обращая при $\alpha = 0$ преобразование Фурье по параметру β, получаем

$$\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(B_1(\tau)<z) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\sigma_1} e^{-|z-x|\sqrt{2\lambda}/\sigma_1} - e^{-q\sigma_1\sqrt{2\lambda}} e^{-|x-r|\sqrt{2\lambda}/\sigma_1} \\ \times \frac{1-e^{-q\sigma_{-1}\sqrt{2\lambda}}}{1-e^{-q\sqrt{2\lambda}(\sigma_1+\sigma_{-1})}} \Big(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\sigma_1} e^{-|z-r|\sqrt{2\lambda}/\sigma_1} - \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\sigma_{-1}} e^{-|z-r|\sqrt{2\lambda}/\sigma_{-1}}\Big). \tag{2.13}$$

Так как обратное преобразование Лапласа по λ от $\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{-v\sqrt{2\lambda}}$, $v \geqslant 0$, имеет вид $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-v^2/2t}$, то поделив соотношение (2.13) на λ и разложив знаменатель в ряд по $e^{-q\sqrt{2\lambda}(\sigma_1+\sigma_{-1})}$ несложно получить выражение для $\dfrac{d}{dz}\mathbf{P}_x(B_1(t)<z)$ в виде ряда.

Список литературы

1. А. Н. Бородин, *Распределения функционалов от диффузий с переключениями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 52–81.
2. M. Kac, *On distribution of certain Wiener functionals.* — Trans. Amer. Math. Soc. **65**, No. 1 (1949), 1–13.
3. А. Н. Бородин, *Случайные процессы.* Санкт-Петербург, Лань, 2013.
4. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы.* Санкт-Петербург, Лань, 2016

Borodin A. N. Distributions of functionals of Brownian motion with non-standard switching.

The standard switching from one set of diffusion coefficients to another occurs at random times corresponding to the moments of jumps of Poisson process independent of the initial diffusion. The paper deals with the process of Brownian motion with variances taking one of two values by the

switching, depending on a trajectories of the process. The most attractive from a computational point of view is the moment inverse to local time.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
С.-Петербург 199034, Россия
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 17 октября 2019 г.