Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 486, 2019 г.

Я. И. Белопольская

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И УРАВНЕНИЯ МАГНИТО-ГИДРОДИНАМИКИ

§1. Введение

Уравнения магнито-гидродинамики – это сложные системы квазилинейных параболических уравнений. В этой работе мы рассмотрим один из простейших вариантов этих систем, а именно, систему уравнений МГД-Бюргерс [1] и построим диффузионные процессы, ассоциированные со слабым (и/ или ослабленным) решением задачи Коши для этой системы. Системы такого типа иногда называют сингулярными системами, поскольку в приложениях они зачастую описывают поведение плотностей некоторых вероятностных мер, однако, в силу нелинейности, не допускают непосредственной интерпретации в терминах соответствующих мер. В связи с этим наряду с системами этого типа мы рассмотрим их регуляризованые версии. Как следствие, мы получим вероятностную интерпретацию рассматриваемых систем как систем нелинейных прямых уравнений Колмогорова для соответствующих диффузионных процессов.

Начало развитию теории диффузионных процессов, имеющих нелинейные прямые уравнения Колмогорова, было положено в работах М. Каца [2, 3] и Г. Маккина [4, 5]. В дальнейшем эта теория получила активное развитие в связи с важными приложениями в самых разных областях. Обширную библиографию можно найти в монографиях [6,7]. Уравнения типа Маккина–Власова можно рассматривать как регулярные уравнения относительно мер, поскольку их коэффициенты представляют собой функционалы относительно решений этих уравнений. В приложениях важную роль играют также сингулярные уравнения, т.е. нелинейные уравнения относительно плотностей соответствующих мер [9, 10]. Марковские процессы, обладающие нелинейными прямыми уравнениями Колмогорова, называют нелинейными марковскими процессами [11].

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, трехмерная система МГД-Бюргерс, обобщенные решения задачи Коши.

Работа поддержана грантом РНФ 17-11-01136.

Вообще говоря, вероятностный подход к решению задачи Коши для нелинейных параболических уравнений позволяет редуцировать задачу Коши таких уравнений к некоторым интегральным соотношениям, часто называемым вероятностными представлениями решения задачи Коши, и использовать стохастические уравнения для процессов, ассоциированных с исходной задачей для получения нужных априорных оценок. При этом решения интегральных уравнений могут быть как элементами соответствующих функциональных пространств, так и элементами пространств ограниченных борелевских мер.

Целью этой работы является построение вероятностного представления обобщенного решения задачи Коши для трехмерной системы МГД-Бюргерс, возникающей в магнито-гидродинамике при описании движения заряженной жидкости в магнитном поле, а именно системы вида

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = \frac{\sigma^2}{2}\Delta v + (\nabla \times B) \times B, \quad v(0, y) = v_0(y), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\mu^2}{2}\Delta B + \nabla \times (v \times B), \quad B(0, y) = B_0(y). \tag{1.2}$$

Здесь $v(t) \in R^3$ – скорость движения заряженной жидкости в магнитном поле, $B(t) \in R^3$ – напряженность магнитного поля, $\times$ – векторное произведение в пространстве R^3, σ – коэффициент вязкости жидкости, μ^{-1} – проводимость жидкости.

Как и в одномерном случае [12], мы будем интерпретировать систему (1.1), (1.2) как систему нелинейных прямых уравнений Колмогорова и построим замкнутую стохастическую систему, состоящую из стохастических уравнений, описывающих соответствующие диффузионные процессы, и замыкающего интегрального соотношения, позволяющего получить вероятностное представление решения задачи (1.1), (1.2). При этом нас будут интересовать слабые и ослабленные решения задачи (1.1), (1.2).

В дальнейшем нам удобно рассматривать v и B как компоненты одного вектора $u = (v, B) \in R^6$ и ввести обозначения $u_1 = v_1, u_2 = v_2, u_3 = v_3, u_4 = B_1, u_5 = B_2, u_6 = B_3$, $h = (\phi, \psi) \in R^6, h_1 = \phi_1, h_2 = \phi_2, h_3 = \phi_3, h_4 = \psi_1, h_5 = \psi_2, h_6 = \psi_3$. В этих обозначениях задача Коши (1.1), (1.2) имеет вид

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{1}{2} Tr \nabla^2 [\sigma_m^2 u_m] + c_m^u(t, y) u_m, \quad u_m(0, y) = u_{0m}(y). \tag{1.3}$$

Здесь

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_2 = \sigma, \quad \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = \mu, \tag{1.4}$$

$$\begin{cases} c_1^u = \frac{1}{u_1}[u_4\nabla_3 u_6 - u_6\nabla_1 u_6 - u_5\nabla_1 u_5 + u_5\nabla_2 u_4 - \beta_1], \\ c_2^u = \frac{1}{u_2}[u_4\nabla_1 u_5 - u_4\nabla_2 u_4 + u_6\nabla_3 u_5 - u_6\nabla_2 u_6 - \beta_2] \\ c_3^u = \frac{1}{u_3}[u_5\nabla_2 u_6 - u_5\nabla_3 u_5 - u_4\nabla_3 u_4 + u_4\nabla_1 u_6 - \beta_3], \\ \beta_i = \sum_{k=1}^3 u_k\nabla_k u_i, \;\; i = 1,2,3, \\ c_4^u = \frac{1}{u_4}[\nabla_2[u_1u_5 - u_2u_4] - \nabla_3[u_1u_6 - u_3u_4]], \\ c_5^u = \frac{1}{u_5}[\nabla_3[u_2u_6 - u_3u_5] - \nabla_1[u_1u_5 - u_2u_4]], \\ c_6^u = \frac{1}{u_6}[\nabla_1[u_1u_6 - u_3u_4] - \nabla_3[u_2u_6 - u_3u_5]]. \end{cases} \tag{1.5}$$

Для того, чтобы найти явный вид генераторов марковских процессов, ассоциированных с системой (1.3), воспользуемся следующим определением слабого решения задачи Коши (1.3).

Говорят, что вектор-функция $u = (v, B) \in R^6$ удовлетворяет в слабом смысле задаче (1.3), если для любой тестовой функции $h \in C_0^\infty([0,T) \times R^3), m = 1, \dots, 6$ справедливы интегральные тождества

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{R^3} u_m(\theta, y)\left[\frac{\partial h(\theta,y)}{\partial\theta} + \frac{\sigma_m^2}{2}\Delta h(\theta,y)\right] dyd\theta \\ + \int_0^T \int_{R^3} u_m(\theta,y)c_m(u,\nabla u)h(\theta,y)dyd\theta \\ + \int_{R^3} u_{0m}(y)h(0,y)dy = 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Анализ интегральных соотношений (1.6), позволяет вывести замкнутую систему уравнений для случайных процессов, ассоциированных с (1.1), (1.2), и, как следствие, получить вероятностное представление слабого решения исходной задачи Коши.

В параграфе 2 мы приведем вероятностную интерпретацию несколько более общей системы нелинейных параболических уравнений, и, предполагая ограниченность коэффициентов c_m^u, построим требуемую замкнутую стохастическую систему. Однако, непосредственно применить полученный результат к системе МГД-Бюргерс не удается, поскольку условие ограниченности c_m^u для этой системы не выполняется. Поэтому в параграфе 3 мы рассмотрим регуляризацию рассматриваемой системы с помощью альтернативной системы параболических уравнений, полученных из исходной с помощью процедуры регуляризации, и докажем существование и единственность ее решения. Наконец, в последнем параграфе мы покажем, что решение регуляризованной задачи сходится к решению исходной задачи Коши на любом компактном множестве. В заключение мы применим полученные результаты к системе МГД-Бюргерс.

§2. Вероятностная интерпретация квазилинейной системы параболических уравнений

Пусть $\mathcal{B}(R^d)$ обозначает борелевскую σ- алгебру d-мерного евклидова пространства R^d, $a \cdot b = \sum_{k=1}^d a_k b_k$ – скалярное произведение в R^d , а $|x|$ – норма вектора $x \in R^d$.

Мы будем предполагать, что заданы функции $a_m : R^d \to R^d$, $A_m : R^d \to R^d \otimes R^d$, $m = 1, \dots, d_1$ и $c_m : [0,T] \times R^d \times C([0,T]; R^{d_1}) \to R$, $u_{0m} : R^d \to R$, $m = 1, \dots, d_1$, и рассмотрим задачу Коши для системы квазилинейных параболических уравнений

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{1}{2}\nabla^2 : [B_m(y)u_m] - \nabla \cdot [a_m(y)u_m] + c_m^u(t,y)u_m, \tag{2.1}$$

$$u_m(0,y) = u_{0m}(y).$$

Здесь $B_m(y) = A_m(y)A_m^*(y)$, $c_m^u(t,y) = c_m(u(t,y), \nabla u(t,y))$ и $G : F = \sum_{i,j=1}^d G_{ij}F_{ji}$ для двух $d \times d$-матриц G и F.

Мы сведем решение задачи Коши (2.1) к решению замкнутой системы стохастических соотношений и сформулируем условия существования и единственности ее решения. Как следствие, мы построим вероятностное представление слабого решения задачи (2.1) и докажем единственность такого решения.

Для того, чтобы определить понятие слабого решения задачи Коши для системы (2.1), нам понадобится ряд функциональных пространств:

$C_b(R^d)$, $(B(R^d))$ – пространство непрерывных (измеримых) ограниченных вещественных функций, заданных на R^d, с нормой $\|h\|_\infty = \sup_{x\in R^d} |h(x)|$;

$C^k(R^d; R^{d_1})$ - пространство k раз дифференцируемых функций на R^d со значениями в R^{d_1}, $C^k(R^d; R^1) \equiv C^k(R^d)$;

$C^{m,k}([0,T] \times R^d; R^{d_1})$ $(C_b^{m,k}([0,T] \times R^d)$ – пространство (ограниченных) дифференцируемых функций со значениями в R^{d_1}, имеющих m (ограниченных) производных по $t \in [0,T]$ и k (ограниченных) производных по $x \in R^d$;

$C_0^\infty(R^d)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями.

Для $p \in [1,\infty]$ обозначим $L^p(X)$ пространство измеримых вещественных функций на X с нормой

$$\|f\|_p = \Big(\int\limits_X |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

и $L^p_{\mathrm{loc}}(X)$ – пространство локально интегрируемых вещественных функций на X.

$W^{k,p}(R^d)$ – соболевское пространство функций, заданных на R^d, обобщенные производные которых до порядка k принадлежат $L^p(R^d)$ с нормой $\|v\|_{W^{k,p}}$.

$\mathcal{M}(R^d)$ – пространство финитных борелевских мер на R^d с нормой полной вариации

$$\|\mu\|_{TV} = \sup_{\substack{h\in C_b(R^d),\\ \|h\|_\infty<1}} \Big|\int\limits_{R^d} h(y)\mu(dy)\Big|.$$

Ниже мы будем рассматривать два типа решений задачи Коши (2.1), а именно, слабое решение и ослабленное решение, представляющие собой функции из некоторых функциональных пространств, а также мерозначные решения регуляризованой или линеаризованой задачи Коши, связанной с (2.1).

Пусть $\mathcal{L}_m$ обозначает линейный оператор вида

$$[\mathcal{L}_m h](y) = \frac{1}{2} B_m(y) : \nabla^2 h - a_m(y) \cdot \nabla h$$

с областью определения $C^2(R^d)$ и $\mathcal{L}_m^*$ – двойственный оператор,

$$[\mathcal{L}_m^* \mu_m](dy) = \frac{1}{2}\nabla^2 : [B_m(y)\mu_m(dy)] - \nabla \cdot [a_m(y)\mu_m(dy)],$$

определяемый соотношением

$$\int\limits_{R^d} \mu(dy)\mathcal{L}_m h(y) = \int\limits_{R^d} \mathcal{L}_m^* \mu(dy)h(y), \quad \mu \in \mathcal{M}(R^d),$$

которое справедливо для всех $h \in C_0^\infty(R^d)$.

Функция $u\colon [0,T] \times R^d \to R^{d_1}$, $u = (u_1, \dots, u_{d_1})$, $u_m(t) \in W^{1,1}_{loc}(R^d)$, $m = 1, \dots, d_1$, $t \in [0,T]$, является слабым решением задачи Коши (2.1), если для любой $h \in C_0^\infty(R^d)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}\int\limits_{R^d} u_m(t,y)h(y)dy = \int\limits_{R^d} u_{0m}(y)h(y)dy + \int\limits_0^t \int\limits_{R^d} u_m(\theta,z)\mathcal{L}_m h(z)dzd\theta \\ + \int\limits_0^t \int\limits_{R^d} u_m(\theta,z)c_m^u(\theta,z)h(z)dzd\theta.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Борелевская функция $u : [0,T] \times R^d \to R^{d_1}$, принадлежащая при каждом $t \in [0,T]$ пространству $W^{1,1}_{loc}(R^d, R^{d_1})$, является ослабленным решением задачи Коши (2.1), если для любой $h \in C_0^\infty(R^d)$ и любого $m = 1, \dots, d_1$ справедливо следующее равенство

$$\begin{aligned}\int\limits_{R^d} h(y)u_m(t,y)dy = \int\limits_{R^d} h(y)\Big(\int\limits_{R^d} p_m(0,x,t,y)u_{0m}(x)dx\Big) \\ + \int\limits_{[0,T]\times R^d} \Big(\int\limits_{R^d} h(y)p_m(\theta,z,t,y)dy\Big)c_m^u(\theta,z)u_m(\theta,z)dzd\theta.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь $p_m(\theta,z,t,y)$ – фундаментальное решение линейной задачи Коши

$$\frac{\partial p_m}{\partial t} = \mathcal{L}_m^* p_m, \quad p_m(0,x,0,y) = \delta(x-y), \tag{2.4}$$

т.е. такое отображение $p_m : [0,T] \times R^d \times [0,T] \times R^d \to R_+$, что:

1) $\int\limits_{R^d} p_m(\theta,z,t,y)dy = 1$ для всех $0 \leqslant \theta \leqslant t \leqslant T$, $z \in R^d$;

2) для любой вероятностной меры $u_{0m}(dy) = u_{0m}(y)dy$ функция $u_m(t,y) = \int\limits_{R^d} p_m(\theta,z,t,y)u_{0m}(dz)$ удовлетворяет в слабом смысле задаче Коши

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{1}{2}\nabla^2 : [B_m(y)u_m] - \nabla \cdot [a_m(y)u_m], \quad u_m(0,y) = u_{0m}(y), \tag{2.5}$$

т.е. для всех $h \in C_0^\infty(R^d)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{R^d} u_m(t,y)h(y)dy - \int\limits_{R^d} u_{0m}(y)h(y)dy = \int\limits_0^t \int\limits_{R^d} u_m(\theta,z)\mathcal{L}_m h(z)dzd\theta.$$

Построим стохастическую задачу, ассоциированную с (2.1). Пусть $(\Omega,\mathcal{F},P)$ – заданное вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}_t$, $w_m(t) \in R^d$ – заданные на этом пространстве независимые винеровские процессы, согласованные с потоком $\mathcal{F}_t$, ξ_{0m} – независимые случайные величины, не зависящие от $w(t) = (w_1(t),\ldots,w_{d_1}(t))$, с распределениями $P\{\xi_{0m} \in dy\} = \mu_{0m}(dy) = u_{0m}(y)dy$.

Рассмотрим систему стохастических уравнений

$$\xi_m(t) = \xi_{0m} + \int\limits_0^t a_m(\xi_m(\theta))d\theta + \int\limits_0^t A_m(\xi_m(\theta))dw_m(\theta), \qquad (2.6)$$

$m = 1,\ldots,d_1$,

$$\eta_m(t) = 1 + \int\limits_0^t c_m(u(\theta,\xi_m(\theta)),\nabla u(\theta,\xi_m(\theta)))\eta_m(\theta)d\theta. \qquad (2.7)$$

Мы будем говорить, что выполнено условие **C 2.1**, если функции $a_m(x)$ и $A_m(x), m = 1,\ldots,d_1$, и $c_m^u(x)$ таковы, что в соответствующих нормах:

• существуют такие положительные константы L_a, L_A, L_c, K_a, K_A, K_c, что справедливы оценки

$$\begin{aligned}
&|a_m(x) - a_m(y)| \leqslant L|x-y|, \quad |A_m(x) - A_m(y)| \leqslant L|x-y|,\\
&|c_m(u,z) - c_m(v,g)| \leqslant L_c[|u-v| + |z-g|],\\
&|a_m(x)|^2 \leqslant K_a[1+|x|^2], \quad |A_m(x)|^2 \leqslant K_A[1+|x|^2],\\
&|c_m(u,z)| \leqslant K_c; \quad x,y \in R^d,\ u,v \in R^{d_1},\ g,z \in R^{d\times d_1};
\end{aligned}$$

• u_{0m} – борелевская вероятностная мера на R^d допускающая ограниченную плотность, принадлежащую пространству $W^{1,1}(R^d)$, $m = 1,2,\ldots,d_1$.

Мы будем говорить, что выполнено условие **C 2.2**, если выполнено условие **C 2.1**, матрицы A_m невырождены и функции $a_m^i, A_m^{ij} \in C^3(R^d), i,j = 1,\ldots,d$.

Ниже символами C, K, L мы будем обозначать константы, которые могут быть разными в различных оценках.

Приведем вспомогательное утверждение [16, теорема 4.5 главы 6].

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия* **C 2.2.** *Тогда :*

1) *существует единственное решение* $\xi_m(t)$ *СДУ*

$$d\xi_m(\theta) = a_m(\theta, \xi_m(\theta))d\theta + A_m(\theta, \xi_m(\theta))dw_m(\theta), \quad \xi_m(s) = x, \tag{2.8}$$

обладающее марковским свойством и переходные вероятности $P_m(0, x, t, A) = P\{\xi_m(t) \in A\}$ *процессов* $\xi_m(t)$ *имеют плотности* $p_m(0, x, t, y)$ *относительно меры Лебега при любом* $m = 1, \ldots, d_1$*;*

2) *существуют константы* $C, C_1 > 0$ *такие, что для* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ *и мультииндексов* $|k| = k_1 + k_2 \leqslant 2$ *справедливы оценки*

$$\|\nabla^{k_1}_{x_j} \nabla^{k_2}_{y_i} p_m(s, x, t, y)| \leqslant \frac{C}{(t-s)^{-\frac{d+|k|}{2}}} \exp\left[-C_1 \frac{\|y-x\|^2}{(t-s)}\right]. \tag{2.9}$$

Если $c_m(u, v) \equiv 0$ и соотношение

$$\int\limits_{R^d} h(y)\mu_m(t, dy) = E\left[h(\xi_m(t))\right] = \int\limits_{R^d}\int\limits_{R^d} h(y)P_m(0, x, t, dy)\mu_{0m}(dx), \tag{2.10}$$

выполняется для любой функции $h \in C_b(R^d)$, то, очевидно, при каждом $t \in [0, T]$ соотношение (2.10) определяет линейный функционал на пространстве $C_b(R^d)$ и, в силу теоремы Рисса, задает меру $\mu_m(t) \in \mathcal{M}(R^d)$.

Если же $c^u_m \neq 0$, то, при условии, что $c^u_m(t, y)$ – ограниченные функции, $\int\limits_{R^d}\int\limits_{R^d} h(y)P_m(0, x, t, dy)\mu_{0m}(dx)$ задает линейный функционал на пространстве $C_b(R^d)$ и, как и выше, можно воспользоваться теоремой Рисса, чтобы при каждом $t \in [0, T]$ задать меру $\mu_m(t, dy)$ с помощью соотношения

$$\int\limits_{R^d} h(y)\mu_m(t, dy) = \mathbf{E}\left[h(\xi_m(t))\eta_m(t)\right]. \tag{2.11}$$

Если мера $\mu_m(t, dy)$ обладает плотностью $u_m(t, y)$ относительно меры Лебега, $\mu_m(t, dy) = u_m(t, y)dy$, то при выполнении условия **C 2.1** из системы (2.6), (2.7), (2.11) вытекает замкнутая система соотношений.

состоящая из соотношений (2.6), (2.7) и интегрального уравнения

$$\begin{aligned} u_m(t,y) = &\int\limits_{R^d} \mu_{0m}(dx) p_m(0,x,t,y) \\ &+ \int\limits_0^t \int\limits_{R^d} c_m^u(\theta,z) p_m(\theta,z,t,y) u_m(\theta,z) dz d\theta, \end{aligned} \tag{2.12}$$

где $p_m(0,x,t,y), m = 1,\ldots,d_1$ – плотности переходных вероятностей $P_m(0,x,t,dy)$ процессов $\xi_m(t)$,, удовлетворяющих (2.6). При этом существование плотности $p_m(0,x,t,y)$ гарантируется леммой 2.1.

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия* **С 2.1***, и процессы* $\xi_m(t), \eta_m(t)$ *удовлетворяют* $(2.6), (2.7)$. *Тогда соотношения* (2.11) *и* (2.12) *эквивалентны.*

Доказательство. Покажем, что, если справедливо (2.11), то справедливо и (2.12). Используя соотношение (2.7), получим

$$\begin{aligned} \int\limits_{R^d} h(y)\mu_m(t,dy) &= \mathbf{E}[h(\xi_m(t))\eta_m(t)] \\ &= E[h(\xi_m(t))] + \mathbf{E}\left[\int\limits_0^t h(\xi_m(t)) c_m^u(\theta,\xi_m(\theta))\eta_m^u(\theta) d\theta\right]. \end{aligned} \tag{2.13}$$

При этом для любой функции $h \in C_0^\infty(R^d)$

$$\mathbf{E}[h(\xi_m(t))] = \int\limits_{R^d} \mu_{0m}(dx) \int\limits_{R^d} h(y) P_m(0,x,t,dy), \tag{2.14}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\int\limits_{R^d} h(y) c_m^u(\theta,\xi_m(\theta)\eta_m^u(\theta)\right] &= \mathbf{E}\left[c_m^u(\theta,\xi_m(\theta))\eta_m^u(\theta)\mathbf{E}[h(\xi_m(t))|\xi_m(\theta)]\right] \\ = \mathbf{E}&\left[c_m^u(\theta,\xi_m(\theta))\eta_m^u(\theta)\int\limits_{R^d} h(y)P_m(\theta,\xi_m(\theta),t,dy)\right] \\ = \int\limits_{R^d}&\left(c_m^u(\theta,z)\int\limits_{R^d} h(y)P_m(\theta,z,t,dy)\right)\mu_m(\theta,dz). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Последнее равенство вытекает из теоремы Рисса, если в качестве пробной функции рассмотреть функцию

$$c_m^u(\theta, z)\int_{R^d} h_m(y)P_m(\theta, z, t, dy).$$

Подставляя (2.14) и (2.15) в правую часть (2.13), получим, что для любой функции $h_m \in C_0^\infty(R^d)$ справедливо равенство

$$\int_{R^d} h(y)\mu_m(t, dy) = \int_{R^d} \mu_{0m}(dx)\int_{R^d} h(y)P_m(0, x, t, dy)$$
$$+\int_0^t\int_{R^d}\left(c_m^u(\theta, z)\int_{R^d} h(y)P_m(\theta, z, t, dy)\right)\mu_m(\theta, dz)d\theta, \qquad (2.16)$$

откуда, очевидно, вытекает (2.12). Для того, чтобы доказать, что из (2.12) следует (2.11), умножим левую и правую часть (2.12) на тестовую функцию $h(y)$ и проинтегрируем по R^d. Применяя далее соотношения (2.16) – (2.13), придем к требуемому утверждению. □

Пусть далее $c_m^v(t, x) = c_m(v, \nabla v)$ – ограниченная функция и $v_m(t) \in W^{1,1}(R^d) \cap C^1(R^d)$ – заданная функция.

Борелевскую меру μ_m назовем ослабленным мерозначным решением линейной задачи

$$\frac{\partial \mu_m}{\partial t} = \frac{1}{2}\nabla^2 : [B_m(y)\mu_m] - \nabla\cdot[a_m(y)\mu_m] + c_m(v, \nabla v)\mu_m,$$
$$\mu_m(0, dy) = \mu_{0m}(dy), \qquad (2.17)$$

если для всех $h \in C_0^\infty(R^d)$, $t \in [0, T], m = 1, \ldots, d_1$ справедливы соотношения

$$\int_{R^d} h(y)\mu_m(t, dy) = \int_{R^d} h(y)\int_{R^d}\mu_{0m}(dx)P_m(0, x, t, dy)$$
$$+\int_0^t\left(\int_{R^d} h(y)P_m(\theta, z, t, dy)\right)\int_{R^d} c_m^v(\theta, z)\mu_m(\theta, dz)d\theta, \qquad (2.18)$$

где $P_m(0, x, t, dy)$ – переходная вероятность процесса $\xi_m(t)$, удовлетворяющего (2.6).

Лемма 2.3. *Пусть выполнено условие* **C 2.1**, $v_m \in C([0,T], W^{1,1}(R^d))$ *– заданная функция и* $\xi_m(t)$ *удовлетворяет* (2.6). *Тогда соотношение*

$$\int\limits_{R^d} h(y)\mu_m(t,dy) = E\left[h(\xi_m(t))\exp\left\{\int\limits_0^t c^v(\theta,\xi_m(\theta))d\theta\right\}\right] \tag{2.19}$$

определяет единственное ослабленное мерозначное решение μ_m *задачи*

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mu}{\partial t} &= \frac{1}{2}\nabla^2 : [B_m(y)\mu_m] - \nabla\cdot[a_m(y)\mu_m] + c_m(v,\nabla v)\mu_m,\\ \mu_m(0,dy) &= \mu_{0m}(dy).\end{aligned} \tag{2.20}$$

Доказательство. Пусть мера $\mu_m(t,dy)$ задана соотношением (2.19). Тогда

$$\int\limits_{R^d} h(y)\mu_m(t,dy) = E\left[h(\xi_m(t))\exp\left\{\int\limits_0^t c^v(\theta,\xi_m(\theta))d\theta\right\}\right] \tag{2.21}$$

$$=\mathbf{E}[h(\xi_m(t))] + \mathbf{E}\left[\int\limits_0^t h(\xi_m(t))c_m^v(\theta,\xi_m(\theta))\exp\left\{\int\limits_0^\theta c^v(\theta,\xi_m(\theta))d\theta\right\}d\theta\right].$$

Используя рассуждения, аналогичные тем, что были использованы при доказательстве леммы 2.2, получим

$$\begin{aligned}\int\limits_{R^d} h(y)\mu_m(t,dy) &= \int\limits_{R^d}\mu_{0m}(dx)\int\limits_{R^d} h(y)P_m(0,x,t,dy)\\ &+ \int\limits_0^t\int\limits_{R^d}\left(c_m^v(\theta,z)\int\limits_{R^d} h(y)P_m(\theta,z,t,dy)\right)\mu_m(\theta,dz)d\theta.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Отсюда вытекает, что $\mu_m(t,dy)$ является ослабленным мерозначным решением задачи Коши (2.20).

Остается доказать единственность ослабленного мерозначного решения μ_m задачи (2.20). Пусть $\mu_m(t), \nu_m(t) \in \mathcal{M}(R^d)$ – два ослабленных решения задачи (2.22) и $\kappa_m(t) = \mu_m(t) - \nu_m(t)$. Принимая во внимание, что $\mu_m(t)$, $\nu_m(t)$ – конечные меры, пространство $C_0^\infty(R^d)$ в определении ослабленного мерозначного решения можно заменить пространством $C_b(R^d)$.

Оценим $\|\kappa_m(t)\|_{TV}$. Поскольку, по предположению, c_m ограничены, то из (2.11) вытекает оценка $\|\kappa_m\|_{TV} < \infty$. При этом в силу (2.16) для любой функции $h \in C_b(R^d)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{R^d} h(y)\kappa_m(t,dy) = \int\limits_{R^d} c_m^v(\theta,z)\int\limits_{R^d} h(y)P_m(\theta,z,t,dy)\kappa_m(\theta,dz). \qquad (2.23)$$

Вычисляя супремум по h таким, что $\|h\|_\infty \leqslant 1$, в обеих частях соотношения (2.23), получим

$$\|\kappa_m(t)\|_{TV} \leqslant sup_{(\theta,z)\in[0,T]\times R^d}|c_m^v(\theta,z)|\int\limits_0^t \|\kappa_m(\theta)\|_{TV}d\theta, \qquad (2.24)$$

откуда, в силу леммы Гронуолла, следует, что $\|\kappa_m\|_{TV} = 0$. □

Суммируя полученные результаты, мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.4. *Пусть выполнены условия* **C 2.1**. *Функции* $u_m \in C([0,T], W^{1,1}(R^d)), m = 1,\dots,d_1$, *задают ослабленное решение задачи* (2.1) *тогда и только тогда, когда для всех* $h \in C_b(R^d)$, *справедливы равенства*

$$\int\limits_{R^d} h(y)u_m(t,y)dy = \mathbf{E}[h(\xi_m(t))exp\left\{\int\limits_0^t c_m^u(\theta,\xi_m(\theta))d\theta\right\}, \qquad (2.25)$$

где случайный процесс $\xi_m(t)$ *удовлетворяет стохастическому уравнению* (2.6), $t \in [0,T]$, $m = 1,\dots,d_1$.

Существование и единственность решения стохастической системы вида (2.1) при выполнении условий **C 2.1** были доказаны в нашей предыдущей работе [12]. Однако коэффициенты системы МГД-Бюргерс (1.3) не удовлетворяют **C 2.1**, поскольку не предполагается ограниченность $c_m^u(t,y)$. Поэтому в следующем параграфе мы регуляризуем систему (1.3), для того, чтобы добиться ограниченности коэффициента c_m^u, а затем обсудим переход к пределу по параметру регуляризации.

§3. Мерозначные решения систем параболических уравнений

Откажемся от предположения об ограниченности функции $c_m(u,\nabla u)$. Для того, чтобы воспользоваться результатами предыдущего параграфа, построим регуляризацию системы (2.1).

Пусть $\rho : R^d \to R$ – функция, обладающая следующими свойствами:

1) $\rho \in C_0^\infty(R^d)$, $\rho(x) = 0$ при $\|x\| \geqslant 1$, $\rho(x) > 0$ при $\|x\| < 1$ и $\int\limits_{R^d} \rho(y)dy = 1$.

Обозначим $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ для всех $\epsilon > 0$. При этом $\rho_\epsilon(x) \geqslant 0$ для всех $x \in R^d$, $\rho_\epsilon \in C^\infty(R^d)$, $\operatorname{supp}\rho_\epsilon = B_\epsilon(0)$, где $B_\epsilon(0) = \{x \in R^d : \|x\| \leqslant \epsilon\}$ и $\int\limits_{R^d} \rho_\epsilon(y)dy = 1$.

Пусть

$$u_\epsilon(t,x) = [\rho_\epsilon * u](t,x) = \int\limits_{R^d} \rho_\epsilon(x-y)u(t,y)dy.$$

Тогда $u_\epsilon(t,x)$ – это взвешенная сглаженная функция по шару $B_\epsilon(x)$ радиуса ϵ с центром в точке $x \in R^d$.

Обозначим χ_K индикатор множества K и $L^1_{loc}(R^d)$ пространство функций f таких, что $\chi_K f \in L^1$ для любого компакта K в R^d. При этом справедливы следующие утверждения:

1. Если $f \in L^1_{loc}(R^d)$ и $h \in C(R^d)$ то $f * h$ непрерывна.

2. Если $u \in L^1_{loc}(R^d)$ и $\rho \in C_0^\infty(R^d)$ то для всех $i = 1, \ldots, d$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho * u)(x) = u * \frac{\partial \rho}{\partial x_i}.$$

3. Если $u \in L^1_{loc}(R^d)$ и ρ_ϵ удовлетворяет свойствам описанным выше, то функция $u_\epsilon = \rho_\epsilon * u$ обладает свойствами

$$\operatorname{supp} u_\epsilon \subset \operatorname{supp} u + B_\epsilon(0) = \{x + y : x \in \operatorname{supp} u, y \in B_\epsilon(0)\}.$$

4. Если $u : R^d \to R$ непрерывна, то $u_\epsilon = \rho_\epsilon * u$ сходится при $\epsilon \to 0$ к u равномерно на компактных множествах в R^d.

Пусть $\mu_0(dy) = P\{\xi_0 \in dy\} \geqslant \alpha > 0$ – заданная вероятностная мера, имеющая ограниченную плотность $u_0(y)$ и $\int\limits_{R^d} \|y\|^2 \mu_0(dy) < \infty$;

Рассмотрим задачу Коши для регуляризованной системы

$$\frac{\partial \mu_{\epsilon,m}}{\partial t} = \frac{1}{2}\nabla^2 : [B_m(y)\mu_{\epsilon,m}] - \nabla \cdot [a_m(y)\mu_{\epsilon,m}] + c_m^{\rho_\epsilon * \mu}(t,y)\mu_{\epsilon,m}$$
$$\mu_{\epsilon,m}(0,dy) = \mu_{0m}(dy), \tag{3.1}$$

где $c_m^{\rho_\epsilon * \mu}(t,y) = c_m([\rho_\epsilon * \mu](t,y), [\nabla\rho_\epsilon * \mu](t,y))$, и ассоциированую с ней систему стохастических уравнений

$$\xi_m(t) = \xi_{m0} + \int\limits_0^t a_m(\xi_m(\theta))d\theta + \int\limits_0^t A_m(\xi_m(\theta))dw_m(\theta), \qquad (3.2)$$

где $\xi_m(0) \in R^d$ – случайные величины с распределением $P(\xi_0 \in dy) = \mu_{0m}(dy)$, не зависящие от винеровских процессов $w_m(t) \in R^d$, $m = 1, \dots, d_1$,

$$\eta_{\epsilon,m}(t) = 1 + \int\limits_0^t c_m([\rho_\epsilon * \mu](\theta, \xi_m(\theta)), [\nabla\rho_\epsilon * \mu](\theta, \xi_m(\theta)))\eta_{\epsilon,m}(\theta)d\theta, \quad (3.3)$$

$$\int\limits_{R^d} h(y)\mu_{\epsilon,m}(t, dy) = \mathbf{E}\left[h(\xi_m(t))\eta_{\epsilon,m}(t)\right] \qquad (3.4)$$

$\forall h \in C_b(R^d), t \in [0, T]$.

Мы будем говорить, что уравнение (3.2) имеет сильное решение, если для любого вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, Q_m)$ с заданным потоком $\mathcal{F}_t$, винеровским процессом $w_m(t)$, согласованными с $\mathcal{F}_t$ и не зависящими от $w_m(t)$ случайными величинами ξ_{0m} с заданными распределениями μ_{0m} существует $\mathcal{F}_t$-согласованный процесс $\xi_m(t) \in R^d$, $\eta_m(t) \in R$, удовлетворяющий (3.2) с вероятностью 1.

Аналогично тому как это было сделано в параграфе 2, можно доказать справедливость следующего утверждения.

Лемма 3.1. *Пусть $\xi_m(t)$ – сильное решение СДУ* (3.2) *с начальным распределением $\mu_{0m}(dy)$, $\eta_m(t)$ удовлетворяет СДУ* (3.3) *и $u_m(t) \in W^{1,1}(R^d) \cap C^1(R^d)$. Меры $\mu_{\epsilon,m}(t)$ являются ослабленными мерозначными решениями задачи* (3.1) *тогда и только тогда, когда для всех $h \in C_0^\infty(R^d)$ справедливо равенство* (3.4).

Мы будем говорить, что выполнено условие **C 3.1**, если коэффициенты $A_m(x), a_m(x)$ удовлетворяют условиям **C 2.1**, $u_{0m}(dy)$ – борелевская вероятностная мера на R^d с плотностью $u_{0m}(y)$, а функции $c_m : R^{d_1} \times R^d \otimes R^{d_1} \to R$ подчиняются оценкам

$$|c_m(u, v)| \leqslant K[1 + \|u\|^2 + \|v\|^2],$$
$$|c_m(u, v) - c(u_1, v_1)| \leqslant L_{u,v}[\|u - u_1\| + \|v - v_1\|].$$

При этом функция $c_m(u, v)$ равностепенно непрерывна на любом компакте, т.е. для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ так, что $|c_m(u, v) -$

$c_m(u_1,v_1)| \leqslant \epsilon$, если $\|u-u_1\|+\|v-v_1\| \leqslant \delta$ для всех $(u,v),(u_1,v_1)\in K$ и любого компакта $K\subset R^{d_1}\times R^d\otimes R^{d_1}$.

Докажем существование и единственность решения задачи (3.1).

Семейство борелевских мер $\mu_{\epsilon,m}(t)$ назовем ослабленным мерозначным решение задачи (3.1), если для всех $h\in C_0^\infty(R^d)$, $t\in[0,T]$, $m=1,\dots,d_1$ справедливы соотношения

$$\int\limits_{R^d} h(y)\mu_{\epsilon,m}(t,dy)=\int\limits_{R^d} h(y)\int\limits_{R^d}\mu_{0m}(dx)P_m(0,x,t,dy) \tag{3.5}$$
$$+\int\limits_0^t\Bigl(\int\limits_{R^d} h(y)P_m(\theta,z,t,dy)\Bigr)\int\limits_{R^d} c_m([\rho_\epsilon*\mu](\theta,z),[\nabla\rho_\epsilon*\mu](\theta,z))$$
$$\times\,\mu_m(\theta,dz)d\theta.$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* **C 3.1**. *Меры* $\mu_{\epsilon,m}\in L^1([0,T],$ $\mathcal{M}(R^d))$ *определяют ослабленное мерозначное решение* $\mu_\epsilon=(\mu_{\epsilon,1},\dots,$ $\mu_{\epsilon,d_1})$ *задачи* (3.1) *тогда и только тогда, когда для всех* $h\in C_b^\infty(R^d)$ *справедливы равенства*

$$\int\limits_{R^d} h(y)\mu_{\epsilon,m}(t,dy)=\mathbf{E}[h(\xi_m(t))\eta_{\epsilon,m}(t)],\ m=1,\dots,d_1, \tag{3.6}$$

где $\xi_m(t)$ *является единственным сильным решением* (3.2) *и* $\eta_{\epsilon,m}(t)$ *удовлетворяет* (3.3).

Доказательство в точности повторяет рассуждения, использованные при доказательстве леммы 2.2.

Докажем, наконец, существование и единственность ослабленного мерозначного решения задачи (3.1).

Ниже мы будем обозначать символами C,K,L константы, которые могут быть разными в различных оценках.

Пусть $\mathcal{M}^{d_1}(R^d)=\oplus_{k=1}^{d_1}\mathcal{M}_k(R^d))$ обозначает прямую сумму d_1 экземпляров пространств $\mathcal{M}_k(R^d)=\mathcal{M}(R^d)$ и снабдим это пространство нормой $\|\mu\|_{TV}=\sum_{m=1}^{d_1}\|\mu_m\|_{TV}$.

Обозначим $N([\theta,\theta+\tau],\mathcal{M}(R^d))$ $(\mathcal{N}([\theta,\theta+\tau],\mathcal{M}^{d_1}(R^d)))$ пространство ограниченных мерозначных отображений, заданных на $[\theta,\theta+\tau]$ и принимающих значения в пространстве $\mathcal{M}^{d_1}(R^d)$ (в пространстве $\mathcal{M}^{d_1}(R^d)$), снабженом нормой полной вариации $\|\cdot\|_{TV}$.

Пусть $B^{d_1}(0,K)$ $(B(0,r))$ – центрированный замкнутый шар радиуса K (радиуса r) в пространстве $\mathcal{M}^{d_1}(R^d)$ (в пространстве $\mathcal{M}(R^d)$) и пусть $\mathcal{N}([\theta,\theta+\tau],B^{d_1}(0,K))\subset\mathcal{N}([\theta,\theta+\tau],\mathcal{M}^{d_1}(R^d))$ обозначает замкнутое подмножество отображений, из $[\theta,\theta+\tau]$ в $B^{d_1}(0,K)$.

Рассмотрим отображения

$$U_m(t):\kappa_m\in\mathcal{M}(R^d)\mapsto U_m(t)\kappa_m\in N([s,s+\tau],\mathcal{M}(R^d)),$$

заданые соотношениями

$$[U_m(t)\kappa_m](t,dy)=\int\limits_{R^d}P_m(0,x,t,dy)\kappa_m(dx),\quad t\in[s,s+\tau],\tag{3.7}$$

и отображение $\Gamma_\epsilon:\mu\mapsto\Gamma_\epsilon\mu$, $\mu\in\mathcal{N}([s,s+\tau],\mathcal{M}^{d_1}(R^d))$, $t\in[s,s+\tau]$, заданное соотношениями

$$\begin{aligned}[\Gamma_\epsilon\mu]_m(t,dy)=\int\limits_0^t\int\limits_{R^d}&P_m(s,z,t,dy)c_m([\rho_\epsilon*\tilde\mu](\theta,z),[\nabla\rho_\epsilon*\tilde\mu](s,z))\\&\times[\mu+U\kappa]_m(s,dz)ds,\end{aligned}\tag{3.8}$$

где $m=1,\dots,d_1$, $\tilde\mu=\mu+U\kappa$ и $[\rho_\epsilon*\tilde\mu](\theta,z)=([\rho_\epsilon*\tilde\mu]_1(\theta,z),\dots,[\rho_\epsilon*\tilde\mu]_{d_1}(\theta,z))$.

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия* **C 3.1** *и для заданных $r>0$, $\epsilon>0$ справедливы оценки $\|\mu_{0m}\|_{TV}\leqslant r$ и $\max_{\nu\in B(0,r)}|c_m(\nu_\epsilon,\nabla\nu_\epsilon)|\leqslant K_c^\epsilon$. Тогда существует $K>0$ и такое $\tau>0$ зависящее только от констант C,C_1 в (2.11) и K_c^ϵ,K, что для всех $t\in[s,s+\tau]$ отображение Γ_ϵ является сжимающим отображением в $\mathcal{N}([s,s+\tau],B^{d_1}(0,K))$.*

Доказательство. Пусть $\tau=\frac{1}{2K_c^\epsilon}$. Для любого $\nu\in\mathcal{N}([s,s+\tau],B^{d_1}(0,K))$, где $K\leqslant d_1r$, справедлива оценка

$$\|[\Gamma_\epsilon\nu]_m(t)\|_{TV}\leqslant K_c^\epsilon\int\limits_s^t\|\nu_m(\theta)\|_{TV}d\theta+K_c^\epsilon r\tau\leqslant r,\tag{3.9}$$

следовательно, $\|[\Gamma_\epsilon\nu](t)\|_{TV}\leqslant K=d_1r$.

Для любого $\beta\geqslant0$ введем в пространстве $\mathcal{N}([\theta,\theta+\tau],\mathcal{M}^{d_1}(R^d))$ эквивалентную норму

$$\|\nu\|_{TV,\beta}=\sup_{t\in([s,s+\tau]}e^{-\beta t}\|\nu\|_{TV}.\tag{3.10}$$

Пусть $t \in [s, s+\tau]$, $\nu, \nu^1 \in \mathcal{N}([s, s+\tau], B^{d_1}(0, K))$. Поскольку $c_m^{\mu_\epsilon}$ ограничены и липшицевы на $B^{d_1}(0, K)$ в силу условий **C 3.1**, то справедливы оценки

$$\|[\Gamma_\epsilon \nu]_m] - [\Gamma_\epsilon \nu^1]_m\|_{TV} \leqslant K_c^\epsilon \int\limits_s^t \|\nu(\theta, \cdot) - \nu^1(\theta, \cdot)\|_{TV} d\theta$$

$$+ L_c(\|\rho_\epsilon\|_\infty + \|\nabla\rho_\epsilon\|_\infty) \int\limits_s^t \|\nu(\theta, \cdot)\|_{TV} \|\nu(\theta, \cdot) - \nu^1(\theta, \cdot)\|_{TV} d\theta$$

$$+ L_c(\|\rho_\epsilon\|_\infty + \|\nabla\rho_\epsilon\|_\infty) \int\limits_s^t \|[U_\epsilon \nu](\theta)\|_{TV} \|\nu(\theta, \cdot) - |\nu^1(\theta, \cdot)\|_{TV} d\theta$$

$$\leqslant C_{\epsilon,T} \|\nu - \nu^1\|_{TV,\beta} \int\limits_s^t e^{\beta\theta} d\theta = C_{\epsilon,T} \|\nu - \nu^1\|_{TV,\beta} \frac{e^{\beta t} - 1}{\beta}, \tag{3.11}$$

где $C_{\epsilon,T} = 2L_c r(\|\rho_\epsilon\|_\infty + \|\nabla\rho_\epsilon\|_\infty) + K_c^\epsilon$.

Таким образом,

$$\|[\Gamma_\epsilon \nu]_m] - [\Gamma_\epsilon \nu^1]_m\|_{TV,\beta} = \sup_{t \in [s, s+\tau]} e^{-\beta t} \|[\Gamma_\epsilon \nu(t, \cdot)]] - [\Gamma_\epsilon \nu^1(t, \cdot)]\|_{TV}$$

$$\leqslant C_{\epsilon,T} \|\nu - \nu^1\|_{TV,\beta} \sup_{t \geqslant 0} \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta}. \tag{3.12}$$

Отсюда вытекает, что

$$\|\Gamma_\epsilon \nu - \Gamma_\epsilon \nu^1\|_{TV,\beta} \leqslant \sum_m \|[\Gamma_\epsilon \nu]_m] - [\Gamma_\epsilon \nu^1]_m\|_{TV,\beta}$$

$$\leqslant d_1 C_{\epsilon,T} \|\nu - \nu^1\|_{TV,\beta} \sup_{t \geqslant 0} \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta}.$$

Следовательно, выбрав $\beta > d_1 C_{\epsilon,T}$, мы получим, что Γ_ϵ является сжимающим отображением в $N([\theta, \theta+\tau], B^{d_1}(0, r))$, где $B^{d_1}(0, r)$ – шар в пространстве $\mathcal{M}^{d_1}(R^d)$.

Поскольку $\mathcal{M}^{d_1}(R^d)$ – банахово пространство и $B^{d_1}(0, r)$ – его замкнутое подмножество, то из теоремы о сжимающих отображениях вытекает утверждение леммы. □

Для того, чтобы построить решение задачи (3.1) на всем интервале $[0,T]$ рассмотрим разбиение $0=t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = T$ интервала $[0,T]$ на отрезки длины $\tau = \frac{T}{n}$.

Лемма 3.3. *Пусть выполнены условия* **3.1** *и зафиксировано число* τ *такое, что* $n\tau = T$. *Мерозначное отображение* $\mu : [0,T] \times \mathcal{M}(R^d)$ *удовлетворяет соотношениям* $\mu_m(0,dy) = u_{0m}(dy)$,

$$\mu_{\epsilon,m}(t,dy) = \int\limits_{R^d} P_m(k\tau, z, t, dy)\mu_{\epsilon,m}(k\tau, dz) + \int\limits_{k\tau}^{t}\int\limits_{R^d} P_m(s,z,t,dy)c_m^{\mu_\epsilon}(s,z)\mu_{\epsilon,m}(s,dz)ds \tag{3.13}$$

для всех $t \in [k\tau, (k+1)\tau]$ *и* $k = 1, \ldots, n-1$ *тогда и только тогда, когда* μ_m^ϵ *является ослабленным мерозначным решением задачи* (3.1).

Доказательство. Пусть $\mu_{\epsilon,m}(t,dy)$ удовлетворяет (3.13) для всех $t \in [k\tau,(k+1)\tau]$ и $k = 1,\ldots,n-1$. Покажем, что при этом для любого $t \in [0,T]$ справедливы равенства

$$\mu_m^\epsilon(t,dy) = \int\limits_{R^d} P_m(0,x,t,dy)\mu_0(dx) + \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{R^d} P_m(s,z,t,dy))c_m^{\mu_\epsilon}(s,z)\mu_m^\epsilon(s,dz)ds. \tag{3.14}$$

Для этого воспользуемся индукцией по $k = 1,\ldots,n$. Предположим, что соотношение (3.14) выполняется при $k = n-1$, и покажем, что оно верно и при $k = n$. При $t = (n-1)\tau$ соотношение (3.14) имеет вид

$$\mu_{\epsilon,m}((n-1)\tau,dy) = \int\limits_{R^d} P_m(0,x,(n-1)\tau,dy)\mu_0(dx) + \int\limits_{0}^{(n-1)\tau}\int\limits_{R^d} P_m(s,z,(n-1)\tau,dy)c_m)c_m^{\mu_\epsilon}(s,z)\mu_{\epsilon,m}(s,dz)ds. \tag{3.15}$$

Из леммы 3.3 вытекает, что

$$\mu_{\epsilon,m}(t,dy) = \int\limits_{R^d} P_m((n-1)\tau,\kappa,t,dy)\mu_{\epsilon,m}((n-1)\tau,d\kappa)$$
$$+ \int\limits_{(n-1)\tau}^{t} \int\limits_{R^d} P_m(s,z,t,dy)c_m^{\mu_\epsilon}(s,z)\mu_{\epsilon,m}(s,dz)ds, \tag{3.16}$$

при $t \in [(n-1)\tau, n\tau]$. Подставляя (3.15) в (3.16), получим

$$\mu_{\epsilon,m}(t,dy) = \int\limits_{R^d}\int\limits_{R^d} P_m(0,x,(n-1)\tau,dz)P_m((n-1)\tau,z,t,dy)\mu_{0m}(dx)$$
$$+ \int\limits_{0}^{(n-1)\tau} \Big(\int\limits_{R^d} P_m(s,z,(n-1)\tau,dy)P_m((n-1)\tau,z,t,dy)\Big) \tag{3.17}$$
$$\times c_m^{\mu_\epsilon}(s,\kappa)\mu_{\epsilon,m}(s,d\kappa)ds + \int\limits_{(n-1)\tau}^{t} \int\limits_{R^d} P_m(s,z,t,dy)c_m^{\mu_\epsilon}(s,z)\mu_{\epsilon,m}(s,dz)ds,$$

где $t \in [(n-1)\tau, n\tau]$, откуда в силу уравнения Чепмена-Колмогорова вытекает

$$\mu_{\epsilon,m}(t,dy) = \int\limits_{R^d} P_m(0,x,t,dy)\mu_0(dy)$$
$$\times \int\limits_{0}^{t} \int\limits_{R^d} P_m(s,z,t,dy)c_m^{\mu_\epsilon}(s,z)\mu_{\epsilon,m}(s,dz)ds. \tag{3.18}$$

Обратное утверждение доказывается аналогично с использованием уравнения Чепмена–Колмогорова. □

Таким образом, мы доказали существование ослабленного мерозначного решения системы (3.1) на интервале $[0,T]$. Покажем, что ослабленное мерозначное решение системы (3.1) единственно.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* **C 3.1**. *Зафиксируем* $\epsilon > 0$ *и пусть* $\mu_m^\epsilon : [0,\tau] \to \mathcal{M}(R^d)$ *обозначает отображение, заданное соотношением* (3.14). *Тогда* μ_m^ϵ *является единственным ослабленным мерозначным решением задачи* (3.1).

Доказательство. Тот факт, что (3.14) определяет ослабленное мерозначное решение задачи (3.1) был доказано выше. Для того, чтобы показать, что ослабленное мерозначное решение $\mu_m^\epsilon(t)$ единственно, предположим противоположное, т.е. пусть существует два ослабленных мерозначных решения $\mu_m^\epsilon(t)$ и $\nu_m^\epsilon(t)$. Тогда, повторяя проведенные выше оценки и применяя их к оценке разности $\|\mu_m^\epsilon - \nu_m^\epsilon\|_{TV,\beta}$, получим

$$\|\mu_m^\epsilon - \nu_m^\epsilon\|_{TV,\beta} \leqslant \frac{C}{\beta}\|\mu_m^\epsilon - \nu_m^\epsilon\|_{TV,\beta}, \tag{3.19}$$

где константа C зависит от констант в условии **C 3.1**. Выбирая достаточно большое число β так, чтобы $\frac{C}{\beta} < 1$ мы получим равенство $\|\mu_m^\epsilon - \nu_m^\epsilon\|_{TV,\beta} = 0$. □

§4. Сходимость

В этом параграфе мы исследуем предельное поведение плотностей $u_{m,\epsilon}$ семейства мер μ_m^ϵ при $\epsilon \to 0$.

Для этого нам понадобится ряд вспомогательных результатов.

Лемма 4.1. *Предположим, что выполнено условие* **C 3.1** *и* $u_m(t,y)$ *– плотность меры* $\mu(t,dy)$ *, определяемой соотношением*

$$\int\limits_{R^d} h(y)\mu_m(t,dy) = \mathbf{E}[h(\xi_m(t))\eta_m(t)] = \int\limits_{R^d} h(y)u_m(t,y)dy, \tag{4.1}$$

которое справедливо для любой функции $h \in C_0^\infty(R^d)$ *и процессов* $\xi_m(t)$ *и* $\eta_m(t)$*, удовлетворяющих соответственно* (2.6) *и* (2.7)*. Тогда для всех* $t \in [0,T]$ *справедливо* dy *- п.в. равенство*

$$u_m(t,y) = \int\limits_{R^d} p_m(0,x,t,y)u_{0m}(x)dx \tag{4.2}$$

$$+ \int\limits_0^t \mathbf{E}[p_m(s,\xi_m(s),t,y)c_m(u(s,\xi_m(s)),\nabla u(s,\xi_m(s)))\eta_m(s)]ds.$$

Для заданного $\epsilon > 0$ *пусть функция* $u_{\epsilon,m}(t)$ *удовлетворяет соотношению* $u_{\epsilon,m}(t) = \rho_\epsilon * \mu_m^\epsilon(t)$ *где* $\mu_m^\epsilon(t)$ *– единственное решение* (3.1).

Тогда для почти всех $y \in R^d$ *и всех* $t \in [0, T]$ *справедливо равенство*

$$u_{\epsilon,m}(t,y) = \rho_\epsilon * [Uu_0]_m(t,y) + \int\limits_0^t \mathbf{E}[[\rho_\epsilon * p(\theta, \xi_m(\theta), t, \cdot\,)](y) c_m^u(\theta, \xi_m(\theta))\eta_m(\theta)]d\theta, \tag{4.3}$$

где

$$[Uu_0]_m(t,y) = \int\limits_{R^d} p_m(0,x,t,y)u_0(x)dx \quad \text{и} \quad [Uu_0]_m(0,y) = u_{0m}(y).$$

Доказательство. Соотношения (4.2) и (4.3) доказываются аналогично. Покажем, что справедливо соотношение (4.3). Процесс $\eta_m(t)$ в (4.1), удовлетворяющий СДУ (2.7), можно представить в виде

$$\eta_m(t) = \exp\left\{\int\limits_0^t c_m^{u_\epsilon}(\theta, \xi_m(\theta))d\theta\right\}.$$

Из соотношений (4.1) для $u_{\epsilon,m}(t) = \rho_\epsilon * \mu_m^\epsilon(t)$ следует, что

$$u_{\epsilon,m}(t,y) = \mathbf{E}[\rho_\epsilon(y - \xi_m(t)) \exp\left\{\int\limits_0^t c_m^{u_\epsilon}(\theta, \xi_m(\theta))d\theta\right\}$$

$$= \mathbf{E}[\rho_\epsilon(y - \xi_m(t))] + \int\limits_0^t \mathbf{E}\Bigg[\rho_\epsilon(y - \xi_m(t)) c_m^{u_\epsilon}(\tau, \xi_m(\tau)) \times \exp\left\{\int\limits_0^\tau c_m^{u_\epsilon}(\theta, \xi_m(\theta))d\theta\right\}\Bigg]d\tau$$

$$= \int\limits_{R^d} \rho_\epsilon(y - z) \int\limits_{R^d} p_m(0,x,t,z)u_{0m}(x)dxdz + \int\limits_0^t \mathbf{E}\Bigg[\mathbf{E}[\rho_\epsilon(y - \xi_m(t))|\xi_m(\theta)] \times \exp\left\{\int\limits_0^\theta c_m(u_\epsilon(\tau, \xi_m(\tau)), \nabla u_\epsilon(\tau, \xi_m(\tau)))d\tau\right\}\Bigg]d\theta \tag{4.4}$$

$$= \rho_\epsilon * [Uu_0]_m(t,y) + \int_0^t \mathbf{E}\Bigg[\Bigg(\int_{R^d} \rho_\epsilon(y-z) p_m(\theta, \xi_m(\theta), t, y)dy\Bigg)$$

$$\times c_m^{u_\epsilon}(\theta, \xi_m(\theta)) \exp\left\{\int_0^\theta c_m^{u_\epsilon}(\tau, \xi_m(\tau))d\tau\right\}\Bigg]d\theta = \rho_\epsilon * [Uu_0]_m(t,y)$$

$$+ \int_0^t \mathbf{E}\big[[\rho_\epsilon * p_m(\theta, \xi_m(\theta), t, \cdot\,)](y) c_m^{u_\epsilon}(\theta, \xi_m(\theta))\eta_m(\theta)\big]d\theta. \qquad \square$$

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* **C 3.1** *и* u_m^ϵ *– плотность единственного ослабленного мерозначного решения* $\mu_m^\epsilon(t)$ *задачи* (3.1),

$$u_{\epsilon,m}(t,y)dy = \mu_m^\epsilon(t,dy). \tag{4.5}$$

Тогда в норме пространства $W^{1,1}(R^d)$ *функции* $u_{\epsilon,m}(t,\cdot\,)$ *сходятся к функциям* $u_m(t,\cdot\,)$, *представляющим собой единственное ослабленное решение задачи* (2.1), *т.е.*

$$\|u_{\epsilon,m}(t,\cdot\,) - u(t,\cdot\,)\|_1 + \|\nabla u_{\epsilon,m}(t,\cdot\,) - \nabla u_m(t,\cdot\,)\|_1 \to 0, \tag{4.6}$$

при $\epsilon \to 0$.

Доказательство. Сходимость $u_{\epsilon,m}(0,y)$ и $\nabla u_{\epsilon,m}(0,y)$ при $\epsilon \to 0$ в норме пространства $L^1(R^d)$ имеет место по предположению. Зафиксируем $t \in [0,T]$. Как следует из леммы 4.1, для почти всех $x \in R^d$ и $m = 1,\dots,d_1$, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} u_{\epsilon,m}(t,y) - u_m(t,y) &= \rho_\epsilon * [Uu_0]_m(t,y) - [Uu_0]_m(t,y) \\ &+ \int_0^t \mathbf{E}\left[\{[\rho_\epsilon * p_m(\theta\xi_m(\theta), t, \cdot\,)](y) - p_m(\theta, \xi_m(\theta), t, y)\}\right. \\ &\left.\times\, c_m^{u_\epsilon}(\theta, \xi_m(\theta))\eta_m(\theta)\right]d\theta \\ &+ \int_0^t \mathbf{E}\Bigg[p_m(\theta, \xi_m(\theta), t, y)\Bigg(c_m^{u_\epsilon}(\theta, \xi_m(\theta)) \exp\left\{\int_0^\theta c_m^{u_\epsilon}(\tau, \xi_m(\tau))d\tau\right\} \\ &- c_m^u(\theta, \xi_m(\theta)) \exp\left\{\int_0^\theta c_m^u(\tau, \xi_m(\tau))d\tau\right\}\Bigg)\Bigg]d\theta. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Отсюда вытекает, что

$$\|u_{\epsilon,m}(t,y)-u_m(t,y)\|_1 \leqslant C\|[\rho_\epsilon * Uu_0]_m(t)-[Uu_0]_m(t)\|_1 \tag{4.8}$$
$$+C\int\limits_0^t \mathbf{E}\left[\|\rho_\epsilon * p_m(\theta,\xi_m(\theta),t,\,\cdot\,)-p_m(\theta,\xi_m(\theta),t,\,\cdot\,)\|_1 d\theta\right]$$
$$+C\int\limits_0^t \mathbf{E}\left[|u_{\epsilon,m}(\theta,\xi_m(\theta)))-u((\theta,\xi_m(\theta))|+|\nabla u_{\epsilon,m}(\theta,\xi_m(\theta)))\right.$$
$$\left.-\nabla u((\theta,\xi_m(\theta))|\right]d\theta+C\int\limits_0^t\int\limits_0^\theta \mathbf{E}\left[|u_{\epsilon,m}(\tau,\xi_m(\tau))-u_m(\tau,\xi_m(\tau))|\right.$$
$$\left.+|\nabla u_{\epsilon,m}(\tau,\xi_m(\tau))-\nabla u_m(\tau,\xi_m(\tau))|\right]d\tau d\theta.$$

Поскольку

$$p_m(t,y)=\int\limits_{R^d} p_m(0,x,t,y)u_{0m}(x)dx \tag{4.9}$$

- это плотность распределения процесса $\xi_m(t)$, то, в силу оценок леммы 2.1, для $\theta\in[0,T]$ мы получим неравенства

$$\mathbf{E}[|u_{\epsilon,m}(\theta,\xi_m(\theta))-u_m(\theta,\xi_m(\theta))|] \tag{4.10}$$
$$=\int\limits_{R^d}|u_{\epsilon,m}(\theta,z)-u_m(\theta,z)|p_m(\theta,z)dz$$
$$\leqslant C\|u_{0m}\|_\infty\int\limits_{R^d}|u_\epsilon(\theta,z)-u(\theta,z)|dz=C\|u_{\epsilon,m}(\theta,\,\cdot\,)-u_m(\theta,\,\cdot\,)\|_1,$$

и

$$\mathbf{E}[|\nabla u_{\epsilon,m}(\theta,\xi_m(\theta))-\nabla u_m(\theta,\xi_m(\theta))|] \tag{4.11}$$
$$=\int\limits_{R^d}|\nabla u_{\epsilon,m}(\theta,z)-\nabla u_m(\theta,z)|p_m(\theta,z)dz$$
$$\leqslant C\|u_{0m}\|_\infty\int\limits_{R^d}|\nabla u_{\epsilon,m}(\theta,z)-\nabla u_m(\theta,z)|dz$$
$$=C\|\nabla u_{\epsilon,m}(\theta,\,\cdot\,)-\nabla u_m(\theta,\,\cdot\,)\|_1.$$

Подставляя (4.10) и (4.11) в правую часть (4.8), получим

$$\|u_{\epsilon,m}(t,y)-u_m(t,y)\|_1 \leqslant C[\|\rho_\epsilon * [Uu_0]_m(t)-[Uu_0]_m(t)\|_1]. \tag{4.12}$$

Оценим далее $\|\nabla u_{\epsilon,m}(t,\,\cdot\,)-\nabla u_m(t,\,\cdot\,)\|_1$. Используя соотношения

$$\nabla u_m(t,y)=\nabla[Uu_0]_m(y) \tag{4.13}$$
$$+\int_0^t \mathbf{E}[\nabla p_m(\theta,\xi_m(\theta),t,y)c_m^u(\theta,\xi_m(\theta))e^{\int_0^t c_m^{u_\epsilon}(\tau,\xi_m(\tau))d\tau}d\theta$$

и

$$\nabla u_{\epsilon,m}(t,y)=\nabla[\rho_\epsilon * [Uu_0]_m](y) \tag{4.14}$$
$$+\int_0^t \mathbf{E}[\rho_\epsilon * \nabla p_m(\theta,\xi_m(\theta),t,y)c_m^{u_\epsilon}(\theta,\xi_m(\theta))e^{\int_0^t c_m^{u_\epsilon}(\tau,\xi_m(\tau))d\tau}]d\theta$$

и применяя аргументы аналогичные тем, что были использованы при оценке разности u_m и $u_{\epsilon,m}$, мы получим

$$\mathbf{E}[|\nabla u_\epsilon(\theta,\xi_m(\theta))-\nabla u_m(\theta,\xi_m(\theta))|_1] \tag{4.15}$$
$$\leqslant C\,\{\nabla[\rho_\epsilon * [Uu_0]_m](\,\cdot\,)-\nabla[\rho * [Uu_0]_m](\,\cdot\,)\|_1$$
$$+C\int_{R^d} \mathbf{E}[\|\rho_\epsilon * \nabla p_m(\theta,\xi_m(\theta),t,\,\cdot\,)-\nabla p_m(\theta,\xi_m(\theta),t,\,\cdot\,)\|_1]d\theta$$
$$+\int_0^t [\|u_{\epsilon,m}(\theta,\,\cdot\,)-u_m(\theta,\,\cdot\,)\|_1+\|\nabla u_{\epsilon,m}(\theta,\,\cdot\,)-\nabla u_m(\theta,\,\cdot\,)\|_1]d\theta.$$

Суммируя (4.15) и (4.12), получим

$$\|u_{\epsilon,m}(\theta,\,\cdot\,)-u_m(\theta,\,\cdot\,)\|_1+\|\nabla u_{\epsilon,m}(\theta,\,\cdot\,)-\nabla u_m(\theta,\,\cdot\,)\|_1 \tag{4.16}$$
$$\leqslant \|\rho_\epsilon * [Uu_0]_m(t)-[Uu_0]_m(t)\|_1+[\rho_\epsilon * \nabla[Uu_0]_m](\,\cdot\,)-[\rho * \nabla[Uu_0]_m](\,\cdot\,)\|_1$$
$$+\int_0^t \mathbf{E}[\|\rho_\epsilon * p_m(\theta,\xi_m(\theta),t,\,\cdot\,)-p_m(\theta,\xi_m(\theta),t,\,\cdot\,)\|_1]d\theta$$
$$+\int_0^t E[\|\rho_\epsilon * \nabla p_m(\theta,\xi_m(\theta),t,\,\cdot\,)-\nabla p_m(\theta,\xi_m(\theta),t,\,\cdot\,)\|_1]d\theta$$

$$+\int_0^t [\|u_{\epsilon,m}(\theta,\,\cdot\,) - u_m(\theta,\,\cdot\,)\|_1 + \|\nabla u_{\epsilon,m}(\theta,\,\cdot\,) - \nabla u_m(\theta,\,\cdot\,)\|_1]d\theta.$$

Применяя лемму Гронуолла к функции

$$\alpha(\theta) = \|u_{\epsilon,m}(\theta,\,\cdot\,) - u_m(\theta,\,\cdot\,)\|_1 + \|\nabla u_{\epsilon,m}(\theta,\,\cdot\,) - \nabla u_m(\theta,\,\cdot\,)\|_1,$$

получим оценку

$$\begin{aligned}
&\|u_{\epsilon,m}(\theta,\,\cdot\,) - u_m(\theta,\,\cdot\,)\|_1 + \|\nabla u_{\epsilon,m}(\theta,\,\cdot\,) - \nabla u_m(\theta,\,\cdot\,)\|_1 \\
&\quad \leqslant Ce^{CT}\,\{\|\rho_\epsilon * [Uu_0]_m(t) - [Uu_0]_m(t)\|_1 \\
&\quad +\|[\rho_\epsilon * \nabla[Uu_0]_m](\,\cdot\,) - [\rho * \nabla[Uu_0]_m](\,\cdot\,)\|_1\} \\
&\quad + Ce^{CT}\int_0^t \mathbf{E}[\|\rho_\epsilon * p_m(\theta,\xi_m(\theta),t,\,\cdot\,) - p_m(\theta,\xi_m(\theta),t,\,\cdot\,)\|_1]d\theta \\
&\quad + Ce^{CT}\int_0^t \mathbf{E}\|\rho_\epsilon * \nabla p_m(\theta,\xi_m(\theta),t,\,\cdot\,) - \nabla p_m(\theta,\xi_m(\theta),t,\,\cdot\,)\|_1 d\theta.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Поскольку функции $p_m(s,x,t,y), [Uu_{0m}](y), \nabla[Uu_{0m}](y)$ принадлежат пространству $L^1(R^d)$, то сходимость соответствующих сглаженных функций гарантируется общими результатами [17], т. е.

$$\begin{aligned}
&\|[\rho_\epsilon * Uu_{0m}](t,\,\cdot\,) - [Uu_{0m}](t,\,\cdot\,)\|_1 \to 0, \\
&\|[\rho_\epsilon * \nabla Uu_{0m}](t,\,\cdot\,) - \nabla[Uu_{0m}](t,\,\cdot\,)\|_1 \to 0
\end{aligned}$$

и

$$\|\rho_\epsilon * \nabla p_m(\theta,\xi_m(\theta),t,\,\cdot\,) - \nabla p_m(\theta,\xi_m(\theta),t,\,\cdot\,)\|_1 \to 0 \quad \text{п.н.}$$

Как следует из оценок леммы 2.1, для $0 \leqslant \theta \leqslant t \leqslant T$ выполняются оценки

$$\begin{aligned}
&\|\rho_\epsilon * p_m(\theta,\xi_m(\theta),t,\,\cdot\,) - p_m(\theta,\xi_m(\theta),t,\,\cdot\,)\|_1 \\
&\quad + \|\rho_\epsilon * \nabla p_m(\theta,\xi_m(\theta),t,\,\cdot\,) - \nabla p_m(\theta,\xi_m(\theta),t,\,\cdot\,)\|_1 \\
&\quad \leqslant 2K_m\left(1 + \frac{1}{\sqrt{(t-\theta)}}\right) \quad \text{п.в.}
\end{aligned}$$

с константой K_m зависящей от констант C, C_1 в оценке (2.9). В силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости мы можем утверждать, что третье и четвертое слагаемые в правой части (4.17) сходятся к нулю, что и завершает доказательство. □

В заключение вернемся к системе МГД-Бюргерс (1.1), (1.2), описанной в п. 1 и заметим, что условия **C 3.1** были сформулированы так, чтобы коэффициенты $c_m(u, \nabla u)$ вида (1.5) удовлетворяли этим условиям.

Слабым (обобщенным) решением задачи Коши (1.1), (1.2) назовем такую пару функций $v(t), B(t) \in R^3, t \in [0,T]$ из соболевского пространства $W^{1,1}(R^3; R^3)$, что для всех тестовых функций $\phi_i(t), \psi_i(t) \in C_0^\infty(R^3), i = 1,2,3$, справедливы интегральные тождества

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{R^3} v_i(t,y)\phi_i(y)dy \tag{4.18}$$

$$-\int\limits_{R^3} v_i(t,y)\left[\frac{\sigma^2}{2}\Delta\phi_i + \gamma_i(B,\nabla B)\phi_i(y)\right]dy = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{R^3} B_i(t,y)\psi(y)dy \tag{4.19}$$

$$-\int\limits_{R^d} B_i(t,y)\Big[\frac{\mu^2}{2}\Delta\psi_i + \lambda_i(v,B,\nabla v,\nabla B)\psi_i(y)\Big]dy = 0,$$

где $\gamma = (\nabla \times B) \times B - v \cdot \nabla v$ и $\lambda = \nabla \times (v \times B)$.

Стохастичееская система, ассоциированная с (4.18), (4.19), имеет вид

$$\xi_m(t) = \xi_{0m} + \sigma_m w(t), \tag{4.20}$$

$$\eta_m(t) = 1 + \int\limits_0^t c_m(u(\theta,\xi_m(\theta)), \nabla u(\theta,\xi_m(\theta)))\eta_m(\theta)d\theta, \tag{4.21}$$

$$u_m(t,y) = \int\limits_{R^d} p_m(0,x,t,y)u_{0m}(x)dx \tag{4.22}$$

$$+\int\limits_0^t\left[\int\limits_{R^d} p_m(s,z,t,y)c_m(u(s,z),\nabla u(s,z))u_m(s,z)dz\right]ds,$$

где c_m^u заданы соотношениями (1.5), $\sigma_m = \sigma$, $m = 1,2,3$, $\sigma_m = \mu$, $m = 4,5,6$.

Из полученных выше результатов вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Пусть* $u_{0m} \geqslant \lambda > 0, \nabla u_{0m} \in L^1(R^d)$. *Тогда существует единственное ослабленное решение* $u_m(t) \in W^{1,1}(R^d)$, *задачи Коши* (1.3) *для системы МГД-Бюргерс. При этом функции* $u_m(t) = v_m(t)$, $m = 1,2,3$, *удовлетворяют* (1.1), *а функции* $u_m(t) = B_m(t)$, $m = 4,5,6$, *удовлетворяют* (1.2). *Стохастическая система ассоциированная с* (1.3) *задается соотношениями* (4.20) − (4.22). *Справедливо вероятностное представление решения* (1.3) *вида*

$$\int\limits_{R^d} h(y)u_m(t,y)dy = \mathbf{E}[\eta_m(t)h(\xi_m(t))],$$

где процессы $\xi_m(t)$ *и* $\eta_m(t)$ *заданы соотношениями* (4.20), (4.21) *и*

$$u_{0m}(y) = v_{0,m}(y), \quad m = 1,2,3, \quad u_{0,m}(y) = B_{0m}(y), \quad m = 4,5,6.$$

Доказательство. Утверждения теоремы немедленно вытекают из теорем 3.5 и 4.2. □

Список литературы

1. P. Olesen, *Integrable version of Burgers equation in magnetohydrodynamics.* — Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys. **68**(1 Pt 2):016307 (2003).
2. M. Kac, *Foundations of kinetic theory.* In Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability 1954, vol. III, 171–197. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1956.
3. M. Kac, *Probability and Related Topics in the Physical Sciences*, Interscience Publishers, New York, 1958.
4. H. P. McKean, *A class of Markov processes associated with non-linear parabolic equations.* — Proceedings of the National Academy of Sciences **56**, No. 6 (1966), 1907–1911.
5. H. P. McKean, Jr., *Propagation of chaos for a class of nonlinear parabolic equations.* — Lect. series in Diff. Eq., Catholic Univ. **7** (1967), 41–57.
6. В. И. Богачев, Н. В. Крылов, М. Рекнер, С. В. Шапошников,*Уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова*, М.- Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2013.
7. R. Carmona, F. Delarue, *Probabilistic Theory of Mean Field Games with Applications*, Springer, 2018.
8. V. Kolokoltsov, *Nonlinear Markov Processes and Kinetic Equations*, Cambridge Univ. Press, 2010.
9. A. Le Cavil, N. Oudjane, F. Russo, *Forward Feynman-Kac type representation for semilinear nonconservative partial differential equations*, Preprint hal-01353757, version 3, 2017.
10. A. Le Cavil, N. Oudjane, F. Russo, *Probabilistic representation of a class of non-conservative nonlinear partial differential equations.* — ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. **13**, No. 2 (2016), 1189–1233.

11. V. N. Kolokoltsov, *Nonlinear Markov processes and kinetic equations*, Cambridge Tracks in Mathematics 182, Cambridge Univ. Press, 2010.
12. Я. И. Белопольская, А. О. Степанова, *Стохастическая интерпретация системы МГД-Бюргерс.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 7–29.
13. Ya. Belopolskaya, *Stochastic models for forward systems of nonlinear parabolic equations.* — Stat. Pap. SI **59**, No. 4 (2018), 1505–1519.
14. Ya. Belopolskaya, *Stochastic interpretation of quasilinear parabolic systems with cross-diffusion.* — Theory of Probability and its Applications **61**, No. 2 (2017), 208–234.
15. V. I. Bogachev, M. Röckner, S. V. Shaposhnikov, *?????.* — J. Math. Sci. **176**, No. 6 (2011), 759–773 .
16. A. Friedman, *Stochastic differential equations and applications*, vol. 1. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London. Probability and Mathematical Statistics, vol. 28, 1975.
17. М. А. Шубин, *Лекции об уравнениях математической физики*, МЦНМО, 2003.

Belopolskaya Ya. I. Markov processes and magneto-hydrodynamic systems.

We derive a stochastic interpretation of a generalised solution of the Cauchy problem for a 3-dimensional magneto-hydrodynamic system, called MHD-Burgerssystem. We construct a mollified MHD-Burgers system and prove the the existence and uniqueness of a measure-valued solution of the Cauchy problem for this system. Finally, we justify a limiting procedure with respect to a mollification parameter and thus prove existence and uniqueness of the Cauchy problem solution for the original MHD-Burgers system. We construct as well a probabilistic representation of this solution.

С.-Петербургский Государственный
Архитектурно-Строительный Университет,
С.-Петербургское Отделение
Математического Института
им. В. А.Стеклова РАН,
С.-Петербург Россия

E-mail: yana@yb1569.spb.edu

Поступило 1 ноября 2019 г.