Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 485, 2019 г.

А. А. Салатич, С. Ю. Славянов, О. Л. Стесик

СИСТЕМЫ ОДУ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, ПОРОЖДАЮЩИЕ КОНФЛЮЭНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГОЙНА

Введение

В статьях С. Ю. Славянова и соавторов была разработана процедура, позволяющая генерировать нелинейные интегрируемые уравнения Пенлеве из линейных уравнений класса Гойна. Впервые это было сделано в статье [1], а далее было перенесено в книгу [2] на уровне эвристического наблюдения. Там из линейных уравнений класса Гойна были получены нелинейные интегрируемые уравнения Пенлеве. Понятие "антиквантование" и более обоснованные рассмотрения появились в работах [3–5].

Позже оказалось, что антиквантование тесно связано с условием изомонодромности для линейных систем дифференциальных уравнений первого порядка [6]. Вывод уравнения Пенлеве P^6 как условие изомонодромности линейной системы уравнений первого порядка можно найти в книге [7]. Там же дана история такого подхода. Трудность и неоднозначность этого вывода связана с "излишним" числом свободных коэффициентов системы. Кроме того в таком выводе затушёвывается решающая роль нулей внедиагональных элементов системы, которые в уравнениях второго порядка для компонент проявляются как ложные особые точкки.

Переход от линейной системы ОДУ с полиномиальными коэффициентами к уравнениям второго порядка (уравнению Шредингера) требует нетривиальных матричных вычислений, зачастую требующих применения современных систем.

Данная публикация продолжает исследования, проведенные для единожды конфлюэнтного и дважды конфлюэнтного уравнений Гойна [8, 9].

Ключевые слова: антиквантование, уравнения класса Гойна, конфлюэнтные уравнения класса Гойна, уравнения Пенлеве, условие изомонодромности, ложные особые точки.

Работа О. Л. Стесик была поддержана грантом ID-40847559.

Биконфлюэнтное уравнение Гойна

Биконфлюэнтное уравнение Гойна в канонической форме (т.е. с полиномиальным символом уравнения) имеет вид [2]:

$$(H(z,D)-h)w(z) := \big(z^2D^2+(-z^2-tz+c)D+(-az-h)\big)w(z)=0, \quad (1)$$

где параметр h является акцессорным параметром, а параметры a, c характеризуют локальную монодромию. Точка $z=0$ является регуляной особой точкой, а точка $z=\infty$ является иррегулярной особой точкой с s-рангом равным трем. Параллельно будет рассматриваться линейная система ОДУ первого порядка

$$\vec{Y}'(z) = A(z)\vec{Y}(z) = \frac{T(z)}{z}\vec{Y}(z), \quad (2)$$

где $\vec{Y}(z)$ – вектор с компонентами $y_1(z), y_2(z)$, а матрица $A(z)$ выбрана как

$$A = A^{(1)}/z + A^{(2)} + A^{(3)}z, \quad (3)$$

причем определители матриц $A^{(1)}$, $A^{(3)}$ считаются равными нулю

$$\det A^{(j)} = 0, j = 1, 3. \quad (4)$$

Уравнение второго порядка, выводимое для функции $y_1(z)$

$$R(z)y_1''(z) + P(z)y_1'(z) + Q(z)y_1(z) = 0$$

зависит от выбора наддиагонального матричного элемента A_{12} матрицы A. Представим его следующим образом

$$A_{12} = \kappa. \quad (5)$$

Разрешив систему (2) относительно $y_1(z)$, придем к уравнению второго порядка

$$zy_1''(z) + P(z)y_1'(z) + Q(z)y_1(z) = 0, \quad (6)$$

где

$$P(z) = -z\left(\ln\frac{T_{12}}{z}\right)' - \mathrm{tr}T$$

$$Q(z) = T_{12}\left(\frac{T_{11}}{T_{12}}\right)' + \frac{\det T}{z}.$$

Разрешив систему (2) относительно $y_2(z)$, придем к аналогичному уравнению второго порядка

$$zy_2''(z) + P(z)y_2'(z) + Q(z)y_2(z) = 0, \quad (7)$$

где

$$P(z) = -z\left(\ln\frac{T_{21}}{z}\right)' - \mathrm{tr}T$$
$$Q(z) = T_{21}\left(\frac{T_{11}}{T_{21}}\right)' + \frac{\det T}{z}.$$

Конкретизируем выбор матриц $A^{(1)}$, учитывая (4)

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Наддиагональный матричный элемент T_{12} принимает значение

$$T_{12} = a_{12}^{(1)} + a_{12}^{(2)}z + a_{12}^{(3)}z^2 = \kappa z. \tag{9}$$

При условии (9) уравнение (6) для $y_1(z)$ не содержит дополнительной ложной сингулярности.

Лемма 1. *При выполнении условий* (4) *и условия*

$$a_{22}^{(2)} = \kappa \tag{10}$$

определитель $\det T$ *представляется в виде произведения* z *на линейную функцию от* z.

Доказательство.

$$\det T = \sum_1^3 a_{11}^{(j)} z^{j-1} \sum_1^3 a_{22}^{(i)} z^{i-1} - \sum_1^3 a_{12}^{(j)} z^{j-1} \sum_1^3 a_{21}^{(i)} z^{i-1}$$
$$= \sum_1^3 (a_{11}^{(j)} a_{22}^{(j)} - a_{12}^{(j)} a_{21}^{(j)}) z^{2(j-1)}$$
$$+ \sum_1^3 (a_{11}^{(j)} \sum_{i\neq j} a_{22}^{(i)} z^{j+i-2} - \sum_1^3 a_{21}^{(j)} \sum_{i\neq j} a_{12}^{(i)} z^{j+i-2}.$$

Согласно (8) и условиям (4), (10) получим

$$\det T = z\left(a_{11}^{(2)}a_{22}^{(1)} - a_{21}^{(1)}a_{12}^{(2)} + z(a_{22}^{(2)}a_{11}^{(2)} - a_{21}^{(2)}a_{12}^{(2)} - a_{22}^{(1)}a_{11}^{(3)})\right), \tag{11}$$

что и доказывает лемму. □

Положим

$$P(z) = -z^2 - tz + c = -\mathrm{tr}T - z\left(\ln\frac{T_{12}}{z}\right)' = -z^2 - (a_{11}^{(2)} + a_{22}^{(2)})z - a_{22}^{(1)}, \tag{12}$$

откуда следует

$$a_{22}^{(1)} = -c \tag{13}$$

$$a_{11}^{(2)} + a_{22}^{(2)} = t. \tag{14}$$

Лемма 2. *Добавление произвольной величины к* $a_{11}^{(2)}$ *с одновременным вычитанием ее из* $a_{22}^{(2)}$ *не изменяет* $\mathrm{tr}T$.

Доказательство очевидно.

Перейдем к вычислению $Q(z)$, используя (10), (13), (14). Согласно (8) имеем

$$T_{12}\left(\frac{T_{11}}{T_{12}}\right)' = z$$

и далее

$$\begin{aligned} Q(z) &= -az - h = z + \det T \\ &= z\left(a_{11}^{(2)}a_{22}^{(1)} - \kappa a_{21}^{(1)} + z(\kappa a_{11}^{(2)} - \kappa a_{21}^{(2)} - c)\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Пусть

$$\kappa = t, \tag{16}$$

что приводит к

$$a_{11}^{(2)} = 0. \tag{17}$$

Воспользовавшись (17), (15), придем к явным представлениям оставшихся матричных элементов через параметры уравнения (1).

$$a_{21}^{(2)} = (a - c + 1)/t, \tag{18}$$

$$a_{21}^{(1)} = h/t. \tag{19}$$

Таким образом, матрицы, задающие систему (2) принимают в терминах уравнения (1) следующий окончательный вид

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h/t & -c \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ (a-c+1)/t & t \end{pmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Следует отметить, что поддиагональный элемент матрицы T является квадратным трехчленом, зависящим от акцессорного параметра h. Нули этого квадратного трехчлена порождают ложные особые точки в уравнении для $y_2(z)$.

Процедура антиквантования, т.е. замены квантовых операторов на классические динамические переменные, порождает из биконфлюэнтного уравнеия Гойна уравнение Пенлеве P^4. Известно также, что условие изомонодромности деформации для системы (2), (20) также сводится к уравнению Пенлеве P^4.

Триконфлюэнтное уравнение Гойна

Триконфлюэнтное уравнение Гойна в канонической форме (т.е. с полиномиальным символом уравнения) имеет вид [2]:

$$(H(z,D)-h)w(z) := \left(D^2+(-z^2-t)D+(-az-h)\right)w(z)=0. \quad (21)$$

Так же как и в случае биконфлюэнтного уравнения Гойна можно связать (21) с системой

$$\vec{Y}'(z) = A(z)\vec{Y}(z), \quad (22)$$

где матрица $A(z)$ выбрана как

$$A = A^{(1)} + A^{(2)}z + A^{(3)}z^2, \quad (23)$$

причем

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, \ A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & 0 \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} \end{pmatrix}, \ A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Равенство нулю наддиагонального матричного элемента $a_{12}^{(2)}$ обеспечивает отсутствие ложной особой точки в уравнении для $y_1(z)$. Здесь также, как и в (8) должно выполняться

$$\det A^{(j)} = 0, \quad j = 2,3. \quad (25)$$

Разрешив систему (22) относительно $y_1(z)$, придем к уравнению второго порядка

$$y_1''(z) + P(z)y_1'(z) + Q(z)y_1(z) = 0, \quad (26)$$

где

$$P(z) = -\ln A_{12}' - \mathrm{tr}A,$$

$$Q(z) = A_{12}\left(\frac{A_{11}}{A_{12}}\right)' + \det A.$$

Найдем связь параметров уравнения (21) с матричными элементами (22). Имеем

$$P(z) = -z^2 - t = -\mathrm{tr}A. \tag{27}$$

откуда следует

$$a_{11}^{(1)} + a_{22}^{(1)} = t, \tag{28}$$

$$a_{22}^{(2)} = -a_{11}^{(2)}. \tag{29}$$

Поскольку $Q(z)$ линейная функция от z, то с учетом (29) должно быть выполнено

$$a_{12}^{(2)} = a_{22}^{(2)} = a_{11}^{(2)} = 0. \tag{30}$$

Равенство (30) доказывает, что $\det A^{(2)} = 0$. Пусть

$$a_{22}^{(1)} = \kappa, a_{11}^{(1)} = 0. \tag{31}$$

Тогда имеем

$$Q(z) = -az - h = (A_{11})' + \det A = -\kappa a_{21}^{(1)} - \kappa a_{21}^{(2)} z. \tag{32}$$

Если $\kappa = 1$, то

$$a_{12}^{(1)} = h, \quad a_{21}^{(2)} = a. \tag{33}$$

Таким образом, матрицы, задающие систему (22) принимают в терминах уравнения (21) следующий окончательный вид

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ h & t \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Условие изомонодромности для ситемы (
reftsys), (34), равно как и процедура антиквантованиия для уравнения (21) приводят к уравнению Пенлеве P^2.

Нетрудно увидеть, что уравнение для компоненты содержит две две ложные особые точки, зависящие от акцессорного параметра h.

Сравнение с построением системы, изомонодромность которой порождает уравнение Пенлеве P^6 [6] с нашим случаем показывает ряд сходных утверждений и ряд отличий.

1) В [6] все три определителя матриц, задающих систему, были равны нулю. Здесь только два.
2) Во всех случаях акцессорный параметр уравнения был связан с поддиагональным матричным элементом одной из матриц.
3) Полученные нами системы параметризуются величиной κ.
4) Во всех случаях полный наддиагональный матричный элемент является мономом.

Обсуждение

Имеется следующие два варианта распределения двух ложных сингулярностей по уравнениям для компонент $y_n(z)$, $n = 1, 2$.

1. В одном уравнении нет ложных осоых точек, а в другом их две.

2. В одном уравнений есть одна ложная особая точке, а в другом их две.

В случае, Когда общее число ложных особых точек равно четырем по-видимому, невозможна деформация, сохраняющая монодромию.

Каждое из конфлюэнтных уравнений Гойна является генерирующим для соответствующего уравнения Пенлеве. В зависимости от отсутствия или наличия дополнителной ложной особой точки вывод уравнения Пенлеве по методу антиквантования будет отличаться. Подробное изложение этих отличий содержится в статье [12].

Здесь для системы был рассмотрен первый вариант отсутствия ложной особой точки. При этом на бесконечности возникают треугольные матрицы. Возможно исследование второго варианта. Именно второй вариант является базовым в книге А .А. Болибруха, и там матрица на бесконечности диагональная [7].

С другой стороны, каждое из конфлюэнтных уравнений может быть ассоциироано с линейной системой, относительно которой можно ставить вопрос об условии изомонодромности ее деформаций. Это условие также приводит к уравнениям Пенлеве. Заметим, что при выводе уравнений Пенлеве из условия изомонодромности для линейных систем ранее не отмечался тот факт, что исходную систему можно выбирать в разном виде.

При вычислениях наиболее трудоемкая часть – это нахождение определителя матрицы или его аналога для уравнения. В статьях [10, 11] описан пакет для системы компьютерной алгебры Maple, который позволяет эффективно генерировать уравнения Пенлеве из уравнений Гойна.

Очевидно, что все многообразие формул, как приведенных здесь, так и полученных ранее, естественно оформить в виде специальной программы, написанной в рамках систем компьютерной алгебры, таких как Maple или Mathematica.

В данном исследовании подчеркивается роль ложных особых точек, но в специальных случаях, Более общий подход к ложным особым точкам представлен, например, в статье [13].

Список литературы

1. S. Slavyanov, *Painleve equations as classical analogues of Heun equations.* — J. Phys. A,: Math. Gen. **29** (1996), 7329–7335.
2. С. Ю. Славянов , В. Лай *Специальные функции.* СПб, Невский диалект, 2002.
3. С. Ю. Славянов, Ф. Р. Вукайлович, *Изомонодромные деформации и "антиквантование"для простейших ОДУ.* — ТМФ, **150** (2007), 143–151.
4. С. Ю. Славянов, *Антиквантование и соответствующие симметрии.* — ТМФ **185** (2007), 186–191.
5. С. Ю. Славянов, О.Л . Стесик, *Антиквантование деформированных уравнений класса Гойна.* — ТМФ, **186** (2016), 118–125.
6. M. Babich and S. Slavyanov, *Antiquantization, isomonodromy, and integrability.* — J. Math. Phys. **59** 091201-10.
7. А. А. Болибрух *Обратные проблемы монодромии в в аналитической теории дифференциальных уравнений*, Москва - МЦНМО, 2009.
8. С. Ю. Славянов, А. А. Салатич, *Конфлюэнтное уравнение Гойна и конфлюэнтное гипергеометрическое уравнение.* — Зап. научн. семин. ПОМИ 2017.
9. A. A. Salatich, S. Yu. Slavyanov, *Antiquantization of the Double Confluent Heun Equation. The Teukolsky Equation.* — Nelin. Dinam. **15** (2019), 79–85.
10. S. Yu. Slavyanov, O. L. Stesik, *Antiquantization of deformed Heun class equations as a tool for symbolic generation of Painleve equations.* — ACM Communications in Computer Algebra, 2017.
11. С. Ю. Славянов, О. Л. Стесик, *Символьная генерация уравнений Пенлеве.* — Зап. научн. семин. ПОМИ 2016.
12. S. Slavyanov, O. Stesik, *Antiquantization as a specific way from the Statistical physics to the Regular Physics.* — Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, **521** (2019), 512–518. `https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.01.061`
13. S. Chen, M. Kauers, Z. Li, Y. Zhang, *Apparent singularities of D-finite systems.* J. Symb. Comput., 2019.

Salatich A. A., Slavyanov S. Yu., Stesik O. L. Systems of first order ODE generating confluent Heun equations.

Relation between linear second order equations being confluent Heun equations: biconfluent and triconfluent – and first order linear systems of equations which generate Painlevë equations is studied. The generation process is interpreted in physical terms as antiquantization.Technically the study includes manipulations with polynomials. The complexity of computations sometimes demands the use of Algebraic Computing Systems.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: `salatichaa@mail.ru`,
`stes@mms.nw.ru`

Поступило 3 октября 2019 г.