Ю. Палий

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ КЛАССА СОПРЯЖЕННОСТИ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ ЛИ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Действие группы Ли G на себе сопряжением

$$\text{Conj} : G \times G \rightarrow G, \quad \text{conj}_g(h) = ghg^{-1}, \quad (1.1)$$

где h – это некоторый фиксированный элемент группы, а g пробегает всю группу, задает на G структуру сингулярного риманова слоения $\mathcal{F}$ [1]. Листами слоения являются орбиты $\mathcal{O}_{\text{Conj}}$, т.е. классы сопряженности $\mathcal{C}_h$ элементов группы. Глобальные и локальные свойства слоения важны как для самой теории групп Ли, так и для построения динамических моделей в теоретической и математической физике. Симплектическая структура на классах сопряженности и ее обобщение – дираковская структура [2], используются, например, в струнных моделях типа Весса–Зумино–Новикова–Виттена [3]. Недавно были построены координаты Дарбу на коприсоединенных орбитах группы $GL(n, \mathbb{C})$ [4].

По теореме о максимальных торах линейных алгебраических групп [5] каждый полупростой элемент $h \in G$ сопряжен некоторому элементу тора T , т.е. T пересекает каждый класс сопряженности $\mathcal{C}_h$. Более того, T пересекает $\mathcal{C}_h$ трансверсально и перпендикулярно относительно би-инвариантной метрики на G . Число пересечений орбиты $\mathcal{O}_h \equiv \mathcal{C}_h$ с T равно характеристике Эйлера $\chi(\mathcal{O}_h)$ орбиты как подмногообразия и мощности обобщенной группы Вейля сечения W [6]. Пространство классов сопряженности G/conj изоморфно фактору T/W :

Ключевые слова: группа Ли, класс сопряженности, алгебра Ли, коприсоединенная орбита, слоение, производная Ли, инварианты.

¹В работе мы будем рассматривать только регулярные орбиты, отвечающие полупростым элементам группы.

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{\mathcal{C}} & G \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T/W & \xrightarrow{\cong} & G/\text{conj},
 \end{array}$$

где вертикальные стрелки означают проекции на фактор-пространства по действующей группе. Следы степеней элемента группы

$$t_k = \text{Tr}(g^k), \quad g \in G, \quad k = 1, \dots, \text{rank } G \quad (1.2)$$

образуют базис кольца инвариантов присоединенного действия Conj и параметризуют фактор-пространство G/conj .

Для тривиализации слоения $\mathcal{F}$ необходимо введение параметров ϕ_i , $i = 1, \dots, \dim G - \text{rank } G$, параметризующих класс сопряженности $\mathcal{E}$. Этой задаче и посвящена данная работа. Ключевым моментом для нахождения параметров ϕ_i на $\mathcal{E}$ служит то, что они должны быть инвариантны при сдвигах вдоль векторных полей χ_k , дуальных 1-формам – дифференциалам следов t_k , так как χ_k образуют базис пространства, нормального к $\mathcal{E} \equiv \mathcal{O}_{\text{Conj}}$ относительно би-инвариантной римановой метрики на G . Инвариантность ϕ_i означает равенство нулю производных Ли параметров вдоль векторных полей χ_k [7]:

$$\mathcal{L}_{\chi_k} \phi_i = 0 \quad (1.3)$$

Таким образом, мы получаем систему уравнений в частных производных для определения параметров ϕ_i . Групповой анализ системы уравнений показывает, что сопряженное действие Conj является симметрией системы, поскольку векторные поля, касательные к орбите, коммутируют с нормальными полями χ_k . Это дает возможность переформулировать задачу параметризации класса сопряженности $\mathcal{E}$ в терминах следовых переменных t_k (1.2) и некоторого выбранного набора инвариантов J_i , $i = 1, \dots, \dim G - \text{rank } G$ присоединенного действия. Такой подход более продуктивен [8], поскольку уменьшает число независимых переменных в уравнении Ли (1.3). Тем не менее, знание группы симметрии системы не дает какого-либо алгоритма для интегрирования [9]. Решение системы представляет крайне сложную задачу ввиду большого числа переменных и сложных выражений для коэффициентов уравнений (однородные многочлены по групповым параметрам, причем степени многочленов растут с увеличением размерности группы.)

В данной работе используется то, что дифференциалом сопряженного действия на группе G является присоединенное действие на алгебре $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$ или же коприсоединенное действие на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$. Как показано автором [10], нахождение параметров на коприсоединенной орбите $\mathcal{O}^*$ сводится к решению системы линейных уравнений. Оказалось, что эти параметры могут быть выбраны в виде рациональных функций от однородных многочленов на $\mathfrak{g}^*$, которые можно искать как линейные комбинации с неизвестными коэффициентами мономов одного и того же веса. Система линейных уравнений для коэффициентов следует опять же из условия инвариантности параметров относительно преобразований, генерируемых векторными полями, нормальными к орбите $\mathcal{O}^*$.

Работа построена следующим образом. В пункте 2 определены векторы, образующих базис нормального пространства к классу сопряженности и коприсоединенной орбите для группы $SL(n)$. Приведен метод решения системы (1.3) для параметров на классе сопряженности и аналогичной системы для параметров коприсоединенной орбите. В пунктах 3 и 4 нахождение параметров иллюстрируется на примерах групп $SL(3)$, $SL(4)$ соответственно. В заключении представлены результаты и вопросы для дальнейшей работы. В приложение А вынесены громоздкие выражения для векторов, возникающих при рассмотрении группы $SL(4)$.

§2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ

Для того, чтобы представить систему уравнений (1.3) для параметров в явном виде необходимо ввести координаты на группе (алгебре), определить дифференциально-геометрические структуры (метрика, дифференциальные формы, векторные поля) и ввести базисы для касательного и нормального пространств для орбиты сопряженного действия (коприсоединенной орбиты).

Для матричной группы Ли естественными координатами являются элементы матрицы, задающей произвольный групповой элемент [11]

$$U = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}, \quad \det g = 1 \quad (2.1)$$

При помощи формы Картана $U^{-1}dU$ (dU означает дифференциал матрицы) определим квадрат дифференциала длины

$$ds^2 = \text{Trace}(U^{-1}dU U^{-1}dU) = \sum_{i,k}^n \sum_{j,l}^n g_{ik,jl} dx^{ik} dx^{jl},$$

где коэффициенты би-инвариантной метрики выражаются через алгебраические дополнения матричных элементов²:

$$g_{ik,jl} = C_{il}C_{jk}, \quad g^{ik,jl} = x_{il}x_{jk}.$$

Переменные t_k (1.2) записываются через суммы главных миноров матрицы U :

$$t_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} U \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ i_1 & \dots & i_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Матрица полупростого элемента U группы не имеет кратных собственных значений и орбита сопряженного действия $\mathcal{O}_U \equiv \mathfrak{C}_U$ является регулярной, т.е. подгруппа стабильности орбиты (тор T) имеет минимальную размерность. Касательное пространство $\mathcal{T}_U G$ в любой точке $U \in \mathcal{O}_U$ представляет прямую сумму касательного пространства к орбите $\mathcal{T}(\mathfrak{C}_g)$ и касательного пространства к тору $\mathcal{T}(T)$:

$$\mathcal{T}_g G = \mathcal{T}(\mathfrak{C}_g) \oplus \mathcal{T}T \quad \text{или} \quad \mathcal{T}T = \mathcal{T}_g G / \mathcal{T}(\mathfrak{C}_g). \quad (2.2)$$

При этом $\mathcal{T}(T)$ ортогонально $\mathcal{T}(\mathfrak{C}_g)$ относительно би-инвариантной метрики:

$$\mathcal{T}T = (\mathcal{T}(\mathfrak{C}_g))^\perp.$$

Векторные поля, касательные к орбите $\mathcal{O}_g$ есть разности право- и левоинвариантных векторных полей на группе

$$\zeta_i = \xi_i^r - \xi_i^l, \quad i = 1, \dots, \dim G, \quad (2.3)$$

$$U\tau_i = \xi_i^l U, \quad \tau_i U = \xi_i^r U \quad \tau_i - \text{генераторы алгебры.}$$

Число линейно независимых полей ζ_i равно размерности регулярной орбиты:

$$\dim G - \text{rank } G = \dim \mathcal{O}_{reg}. \quad (2.4)$$

²Индексы матричных элементов будем писать внизу, несмотря на несоответствие общепринятым обозначениям некоторых последующих выражений тензорного анализа.

Набор полей $\{\zeta_i\}_{i=1}^{\dim G}$ замкнут относительно скобки Ли, он определяет инволютивное распределение на группе [6]. По теореме Фробениуса ему соответствует интегрируемое подмногообразие – орбита $\mathcal{O}_g$.

Касательное пространство $\mathcal{T}\mathcal{T}$ натянуто на вектора χ_k , полученные из 1-форм dt_k с помощью би-инвариантной метрики на группе:

$$(\chi_k)^{ik} = g^{ik,jl} \left(\frac{\partial t_k}{\partial x^{jl}} \right) \quad (2.5)$$

Поля χ_k обладают следующими свойствами:

(1) инволютивность,

$$[\chi_i, \chi_j] = \sum_k h_{ij}^k(t) \chi_k, \quad h_{ij}^k(t) - \text{многочлены по } t_k.$$

(2) коммутативность с вертикальными векторными полями ζ_i

$$[\chi_k, \zeta_i] \equiv \mathcal{L}_{\chi_k} \zeta_i = 0 \quad (2.6)$$

Первое свойство означает, что система уравнений (1.3) для параметров $\phi(x)$ является полной, т.е. не содержит дополнительно уравнений, определяемых коммутаторами. Поэтому число функционально независимых решений ϕ системы (1.3) равно размерности регулярной орбиты (2.4). Из второго свойства следует, что сопряженное действие $Conj$, генерируемое полями ζ_i , является симметрией системы .

Таким образом система (1.3) в выбранных обозначениях имеет вид

$$\mathcal{L}_{\chi_k} \phi_i = (\chi_k)^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^{ij}} \phi_i(x) = 0 \quad (2.7)$$

и обладает перечисленными выше свойствами.

Горизонтальные векторные поля χ_k для различных групп обладают сходной структурой, которая облегчает решение полученной системы³:

(1) $SL(2)$

$$\chi_1 = t_1 \chi_{dil} - \det U \chi_{tr} \quad (2.8)$$

³Хотя выражение для $\det U$ равно 1 для группы $SL(n)$, оно сохранено для однородности коэффициентов векторных полей.

(2) $SL(3)$

$$\chi_1 = t_1 \chi_{dil} - t_2 \chi_{tr} + \chi_{CF} \quad (2.9)$$

$$\chi_2 = t_2 \chi_{dil} - \det U \chi_{tr} \quad (2.10)$$

(3) $SL(4)$

$$\chi_1 = t_1 \chi_{dil} - t_2 \chi_{tr} + \chi_{M_2} \quad (2.11)$$

$$\chi_2 = t_2 \chi_{dil} - t_3 \chi_{tr} + \chi_{CF} \quad (2.12)$$

$$\chi_3 = t_3 \chi_{dil} - \det U \chi_{tr} \quad (2.13)$$

Векторные поля, соответствующие преобразованиям дилатации (χ_{dil}) и трансляции (χ_{tr})

$$\chi_{dil} = \sum_{i,j=1}^n x^{ij} \frac{\partial}{\partial x^{ij}}, \quad \chi_{tr} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^{ii}}$$

имеют известные инварианты [8]. Для χ_{dil} это любые рациональные функции, в которых степени числителя и знаменателя равны, а для χ_{tr} это любые полиномиальные функции недиагональных элементов и разностей диагональных элементов матрицы U (2.1). Значит, для группы $SL(2)$ в качестве параметров ϕ_i можно выбрать функции:

$$\frac{x_{12}}{x_{11} - x_{22}}, \quad \frac{x_{21}}{x_{11} - x_{22}}.$$

Вектор χ_{CF} имеет алгебраические дополнения матричных элементов x_{ij} в качестве компонент для каждой группы $SL(n)$:

$$\chi_{CF} = \sum_{i,j=1}^n C_{ij} \frac{\partial}{\partial x^{ji}}.$$

Вектор χ_{M_2} строится из миноров второго порядка матрицы U (2.1). Для остальных групп $SL(n)$ будут добавляться вектора χ_k в соответствии с ростом ранга группы. Их структуру можно предсказать исходя из рассмотренных примеров.

Систему дифференциальных уравнений в частных производных (2.7) можно свести к системе линейных уравнений, если решение искать в

виде линейной комбинации мономов фиксированной степени с неизвестными коэффициентами, как показано в работе автора [10]. Решение лучше начать с нахождения инвариантов векторного поля χ_{M_2} входящего в χ_1 для каждой группы $SL(n)$ ⁴. Он имеет компоненты, являющиеся однородными многочленами степени два, самой низкой по сравнению с остальными векторами. Инварианты следующего вектора (например, χ_{CF} в векторе χ_2 (2.12)) следует искать в виде многочлена от найденных инвариантов для векторного поля χ_{M_2} . Изложим суть предлагаемого метода на примере группы $SL(3)$ (для которой вектор χ_{M_2} есть χ_{CF}).

Решим уравнение

$$(\mathcal{L}_{\chi_{CF}} + t_1)\psi = 0 \quad (2.14)$$

для функции ψ как линейной комбинации

$$\psi = \sum_i \lambda_i \mathcal{M}_i \quad (2.15)$$

мономов $\mathcal{M}_i$ 3-й степени от переменных $x_{ii} - x_{jj}$ и x_{ij} 3-й степени с неизвестными коэффициентами λ_i . Две функции, удовлетворяющие (2.14) определяют одно из решений системы (2.7) для группы $SL(3)$, поскольку $\mathcal{L}_{\chi_{CF}}(\psi_i/\psi_j) = 0$. Оператор $(\mathcal{L}_{\chi_{CF}} + t_1)$, действуя на каждый моном $\mathcal{M}_i$,

$$(\mathcal{L}_{\chi_{CF}} + t_1)\mathcal{M}_i = \sum_j c_{ij}\mu_j.$$

порождает однородный многочлен 4-й степени, представляющий линейную комбинацию мономов μ_j с целыми коэффициентами c_{ij} . Таким образом уравнение (2.14),

$$(\mathcal{L}_{\chi_{CF}} + t_1)\psi = \sum_j \left(\sum_i \lambda_i c_{ij} \right) \mu_j = 0.$$

приводит к линейной системе уравнений для коэффициентов λ_i :

$$\sum_i \lambda_i c_{ij} = 0. \quad (2.16)$$

⁴Из примеров, приведенных далее, будет ясно, как изменяется структура χ_{M_2} с ростом n .

Аналогично можно подойти к нахождению параметров на коприсоединенной орбите в дуальном пространстве $\mathfrak{sl}^*(n)$. При этом полученная линейная система оказывается существенно меньшей. Элемент алгебры $\mathfrak{sl}(n)$ в базисе Картана-Вейля записывается в виде

$$\mathcal{X} = \frac{1}{n} \sum_i h_i H_i + \sum_i (x_i X_i + y_i Y_i), \quad (2.17)$$

где первая сумма берется по всем положительным корням алгебры [12]. Базис кольца инвариантов коприсоединенного действия образуют следы степеней X :

$$t_k = n^{k-1} \text{Trace}(\mathcal{X}^k), \quad 2 \leq k \leq n, \quad (2.18)$$

Касательное пространство $\mathcal{T}\mathfrak{sl}^*(n, \mathbb{R})$ раскладывается в прямую сумму касательного пространства к коприсоединенной орбите и касательного пространства к корневому пространству

$$\mathcal{T}\mathfrak{sl}^*(n, \mathbb{R}) = \mathcal{T}\mathcal{O}^* \oplus \mathcal{T}\mathfrak{A}$$

причем $\mathcal{T}\mathfrak{A} \perp \mathcal{T}\mathcal{O}^*$ относительно формы Киллинга κ

$$\kappa_{ij} = 2n \text{trace}(X_i X_j). \quad (2.19)$$

Базис пространства $\mathcal{T}\mathcal{O}^*$ образован векторами

$$\tau_i = c_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i, j, k = 1, \dots, \dim G,$$

где c_{ij}^k – структурные константы алгебры $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, а x_k – координаты на пространстве $\mathfrak{sl}^*(n, \mathbb{R})$ [13]. Базис пространства $\mathcal{T}\mathfrak{A}$ образован векторами

$$(v_k)_i = (\kappa^{-1})_{ij} \left(\frac{\partial t_k}{\partial x_j} \right), \quad i, j = 1, \dots, \dim \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}), \quad (2.20)$$

которые строятся по аналогии с векторами χ_k . Система уравнений, задающая параметры на коприсоединенной орбите аналогична системе (1.3) на группе:

$$\mathcal{L}_{v_k} \psi = 0, \quad (2.21)$$

Для алгебры $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ вектор v_2 оказывается генератором дилатации

$$v_2 = \sum_i h_i \frac{\partial}{\partial h_i} + \sum_i \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right),$$

где первая сумма берется по всем положительным простым корням алгебры, и первое уравнение, которое приходится решать, порождается вектором v_3 :

$$\mathcal{L}_{v_3}\psi = 0. \quad (2.22)$$

В отличие от своего аналога (2.14) на группе, уравнение (2.22) является однородным. Мономы $\mathcal{M}_i$ в линейной комбинации (2.15) должны быть одного веса. Это существенно уменьшает размер возникающей линейной системы (2.16). Если приписать веса переменным x_{ij} элемента группы U , исходя из отображения алгебры в группу, то можно сократить и размер самой системы (2.16) на группе.

§3. ГРУППА $SL(3)$

Базис Картана-Вейля для алгебры $\mathfrak{sl}^*(3)$ включает следующие генераторы:

$$X_1 = E_{12} \quad X_2 = E_{23} \quad X_3 = E_{13}$$

$$Y_1 = E_{21} \quad Y_2 = E_{32} \quad Y_3 = E_{31}$$

$$H_1 = E_{11} - E_{22} \quad H_2 = E_{22} - E_{33}$$

где $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ — это матрицы, у которых единственный ненулевой элемент стоит на пересечении i -й строки и j -го столбца и равен единице. Произвольный элемент алгебры (2.17) имеет вид

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2h_1 + h_2) & x_1 & x_3 \\ y_1 & \frac{1}{3}(-h_1 + h_2) & \\ y_3 & y_2 & -\frac{1}{3}(h_1 + 2h_2) \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Переменные имеют следующие веса

x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	y_3	y_2	y_1
$(2, -1)$	$(-1, 2)$	$(1, 1)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(-1, -1)$	$(1, -2)$	$(-2, 1)$

Форма Киллинга (2.19) задается матрицей

$$\kappa = 6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

где строки и столбцы соответствуют следующему порядку генераторов:

$$X_1, X_2, X_3, H_1, H_2, Y_3, Y_2, Y_1. \quad (3.3)$$

Следовые переменные (2.18) $t_2 = 3 \text{Trace}(\mathcal{X}^2)$, $t_3 = 9 \text{Trace}(\mathcal{X}^3)$:

$$\begin{aligned} t_2 &= h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2 + 3(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3), \\ t_3 &= 2h_1^3 + 3h_1^2 h_2 - 3h_1 h_2^2 - 2h_2^3 + 27(x_1 x_2 y_3 + x_3 y_1 y_2) \\ &\quad + 9(x_1 y_1 (h_1 + 2h_2) - x_2 y_2 (2h_1 + h_2) + x_3 y_3 (h_1 - h_2)), \end{aligned}$$

порождают векторные поля (2.20)

$$\begin{aligned} v_2 &= x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + h_1 \frac{\partial}{\partial h_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial h_2} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial}{\partial y_3}, \\ v_3 &= \left((h_1 + 2h_2)x_1 + 3x_3 y_2 \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(-(2h_1 + h_2)x_2 + 3x_3 y_1 \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \\ &\quad + \left((h_1 - h_2)x_3 + 3x_1 x_2 \right) \frac{\partial}{\partial x_3} \\ &\quad + \left((h_1 + 2h_2)h_1 + 3(-x_2 y_2 + x_3 y_3) \right) \frac{\partial}{\partial h_1} \\ &\quad + \left(-(2h_1 + h_2)h_2 + 3(x_1 y_1 + x_3 y_3) \right) \frac{\partial}{\partial h_2} \\ &\quad + \left((h_1 - h_2)y_3 + 3y_1 y_2 \right) \frac{\partial}{\partial y_3} \\ &\quad + \left(-(2h_1 + h_2)y_2 + 3x_1 y_3 \right) \frac{\partial}{\partial y_2} + \left((h_1 + 2h_2)y_1 + 3x_2 y_3 \right) \frac{\partial}{\partial y_1}. \end{aligned}$$

В таблице 1 приведены инварианты, полученные решением уравнений (2.14) для группы и (2.22) для алгебры. Инварианты в алгебре переходят в инварианты на группе при замене переменных согласно отображению алгебры в группу (достаточно сравнить элемент алгебры (3.1) и группы (2.1)):

$$\begin{aligned} h_1 &\mapsto x_{11} - x_{22}, \quad h_2 \mapsto x_{22} - x_{33} \\ x_1 &\mapsto x_{12}, \quad x_2 \mapsto x_{23}, \quad x_3 \mapsto x_{13}, \\ y_1 &\mapsto x_{21}, \quad y_2 \mapsto x_{32}, \quad y_3 \mapsto x_{31} \end{aligned}$$

Инварианты, имеющие веса элементов алгебры, алгебраически независимы, и их отношения определяют 6 параметров на классе сопряженности (или коприсоединенной орбите).

§4. ГРУППА $SL(4)$

Группа $SL(4)$ имеет ранг 3, соответственно, система уравнений (1.3) включает три уравнения, определяемые векторами χ_k , $k = 1, 2, 3$ (2.11), (2.12), (2.13). В пространстве $\mathfrak{sl}^*(4)$ необходимо найти инварианты системы векторов v_k , $k = 2, 3, 4$ (2.20) (ниже приведен выбор следовых переменных t_k , удобных для алгебры $\mathfrak{sl}(4)$). Как было сказано в пункте 2, задачу нахождения инвариантов следует решать в два этапа. На первом этапе надо найти инварианты вектора v_3 в пространстве $\mathfrak{sl}^*(4)$ и вектора χ_{M_2} из формулы (2.11) на группе $SL(4)$, вид векторов приведен в приложении А. Для этого будем искать решения уравнения на группе

$$(\mathcal{L}_{\chi_{M_2}} + t_1)\varphi = 0 \quad (4.1)$$

и уравнения (2.22) на $\mathfrak{sl}^*(4)$.

На втором этапе надо, используя решения первого этапа, найти инварианты вектора v_4 в пространстве $\mathfrak{sl}^*(4)$ и вектора χ_{CF} из формулы (2.12) на группе $SL(4)$ (векторы имеют громоздкий вид и не приведены в статье).

Произвольный элемент (2.17) для алгебры $\mathfrak{sl}(4)$ в базисе Картана-Вейля [12] имеет вид

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} d_1 & x_1 & x_4 & x_6 \\ y_1 & d_2 & x_2 & x_5 \\ y_4 & y_2 & d_3 & x_3 \\ y_6 & y_5 & y_3 & d_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{4}(3h_1 + 2h_2 + h_3), \\ d_2 &= \frac{1}{4}(-h_1 + 2h_2 + h_3), \\ d_3 &= \frac{1}{4}(-h_1 - 2h_2 + h_3), \\ d_4 &= -\frac{1}{4}(h_1 + 2h_2 + 3h_3). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Таблица 1. $SL(3)$: Линейно независимые инварианты.

	Weight	Generator	Algebra	Group
1	(-3,0)		$h_2 y_1 y_3 + x_2 y_3^2 - y_1^2 y_2$	$x_{31} C_{12} - x_{21} C_{13}$
2	(-3,3)		$-(h_1 + h_2) x_2 y_1 - x_2^2 y_3 + x_3 y_1^2$	$x_{21} C_{32} - x_{23} C_{12}$
3	(-2,1)	Y_1	$h_1 x_2 y_3 + y_1 (x_2 y_2 - x_3 y_3)$	$x_{23} C_{13} - x_{31} C_{32}$
4	(-1,-1)	Y_3	$(h_1 + h_2) y_1 y_2 + y_3 (-x_1 y_1 + x_2 y_2)$	$x_{32} C_{12} - x_{21} C_{23}$
5	(-1,2)	X_2	$-h_2 x_3 y_1 + x_2 (x_1 y_1 - x_3 y_3)$	$x_{21} C_{31} - x_{13} C_{12}$
6	(0,-3)		$-h_1 y_2 y_3 + x_1 y_3^2 - y_1 y_2^2$	$x_{31} C_{23} - x_{32} C_{13}$
7	(0,0)	H_1, H_2	$x_1 x_2 y_3 - x_3 y_1 y_2$	$x_{12} C_{12} - x_{21} C_{21}$
8	(0,3)		$-h_1 x_2 x_3 + y_1 x_3^2 - x_1 x_2^2$	$x_{13} C_{32} - x_{23} C_{31}$
9	(1,-2)	Y_2	$-h_2 x_1 y_3 + y_2 (x_1 y_1 - x_3 y_3)$	$x_{12} C_{13} - x_{31} C_{21}$
10	(1,1)	X_3	$(h_1 + h_2) x_1 x_2 + x_3 (-x_1 y_1 + x_2 y_2)$	$x_{23} C_{21} - x_{12} C_{32}$
11	(2,-1)	X_1	$h_1 x_3 y_2 + x_1 (x_2 y_2 - x_3 y_3)$	$x_{32} C_{31} - x_{13} C_{23}$
12	(3,-3)		$-(h_1 + h_2) x_1 y_2 + x_1^2 y_3 - x_3 y_2^2$	$x_{12} C_{23} - x_{32} C_{21}$
13	(3,0)		$h_2 x_1 x_3 + x_3^2 y_2 - x_1^2 x_2$	$x_{13} C_{21} - x_{12} C_{31}$

Следовые переменные t_k , по которым будем вычислять вектора v_k , выберем следующими:

$$\begin{aligned}
 t_2 &= 4 \operatorname{trace}(\mathcal{X}^2), \quad t_3 = \frac{8}{3} \operatorname{trace}(\mathcal{X}^3), \\
 t_4 &= 64 \left(\operatorname{trace}(\mathcal{X}^4) - (\operatorname{trace}(\mathcal{X}^2))^2 \right).
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Групповые инварианты являются линейными комбинациями миноров второго порядка матрицы группового элемента U (2.1) :

$$\binom{ij}{kl} \equiv x_{ik}x_{jl} - x_{il}x_{jk}$$

Инварианты в алгебре переходят в инварианты на группе при замене переменных согласно отображению алгебры в группу (как следует из сравнения элементов алгебры (4.2) и группы (2.1)):

$$\begin{aligned} h_1 &\mapsto x_{11} - x_{22}, \quad h_2 \mapsto x_{22} - x_{33}, \quad h_3 \mapsto x_{33} - x_{44}, \\ x_1 &\mapsto x_{12}, \quad x_2 \mapsto x_{23}, \quad x_3 \mapsto x_{34}, \quad x_4 \mapsto x_{13}, \quad x_5 \mapsto x_{24}, \quad x_6 \mapsto x_{14}, \\ y_1 &\mapsto x_{21}, \quad y_2 \mapsto x_{32}, \quad y_3 \mapsto x_{43}, \quad y_4 \mapsto x_{31}, \quad y_5 \mapsto x_{42}, \quad y_6 \mapsto x_{41}. \end{aligned}$$

Удобно ввести общее обозначение $\alpha_{(i,j,k)}$ для инвариантов, использующее вес (i, j, k) инварианта, равный сумме весов переменных в его мономах. Решения первого этапа приведены в таблице 2, за исключением трех инвариантов веса $(0, 0, 0)$, выписанных далее.

(1) пространство $\mathfrak{sl}^*(4)$

$$\begin{aligned} 1: \quad &\alpha_{0,0,0}^{(1)} = (h_1 + h_2 + h_3)h_2 - x_1y_1 - x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5, \\ 2: \quad &\alpha_{0,0,0}^{(2)} = -(h_1 + h_2 + h_3)h_2 - h_1h_3 + x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 - x_6y_6, \\ 3: \quad &\alpha_{0,0,0}^{(3)} = h_1h_3 + x_2y_2 - x_4y_4 - x_5y_5 + x_6y_6, \end{aligned}$$

(2) группа $SL(4)$

$$\begin{aligned} 1: \quad &\alpha_{0,0,0}^{(1)} = \binom{12}{12} - \binom{13}{13} - \binom{24}{24} + \binom{34}{34}, \\ 2: \quad &\alpha_{0,0,0}^{(2)} = -\binom{12}{12} + \binom{14}{14} + \binom{23}{23} - \binom{34}{34}, \\ 3: \quad &\alpha_{0,0,0}^{(3)} = \binom{13}{13} - \binom{14}{14} - \binom{23}{23} + \binom{24}{24}. \end{aligned}$$

Чтобы понять общую структуру системы инвариантов $\alpha_{(i,j,k)}$ рассмотрим матрицу размера 6×6 (таблица 3), элементами которой служат миноры второго порядка матрицы группового элемента. Строки и столбцы нумеруются парами чисел: (12) , (13) , (14) , (23) , (24) , (34) . Миноры, расположенные симметрично относительно главной диагонали, имеют переставленные верхние и нижние пары чисел. Все миноры веса $(0, 0, 0)$, из которых построены инварианты $\alpha_{0,0,0}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, находятся на главной диагонали матрицы. Все миноры на побочной диагонали являются инвариантами по отдельности. Остальные миноры

Таблица 2. $SL(4)$ инварианты I этапа

	Weight (i, j, k)	Generator	Invariants $\alpha_{i,j,k}$	
			Algebra, v_3	Group, χ_{M2}
1	(2,0,-2)		$x_1y_3 - x_4y_5$	$\binom{14}{23}$
2	(2,-1,0)	X_1	$h_3x_1 - x_4y_2 + x_6y_5$	$\binom{13}{23} - \binom{14}{24}$
3	(2,-2,2)		$x_1x_3 - x_6y_2$	$\binom{13}{24}$
4	(1,1,-1)	X_4	$-(h_2 + h_3)x_4 + x_1x_2 - x_6y_3$	$\binom{12}{23} + \binom{14}{34}$
5	(1,0,1)	X_6	$-h_2x_6 + x_1x_5 - x_3x_4$	$\binom{12}{24} - \binom{13}{34}$
6	(1,-1,-1)	Y_5	$(h_1 + h_2)y_5 - x_1y_6 + y_2y_3$	$\binom{14}{12} + \binom{34}{23}$
7	(1,-2,1)	Y_2	$(h_1 + h_2 + h_3)y_2 - x_1y_4 + x_3y_5$	$\binom{13}{12} - \binom{34}{24}$
8	(0,2,0)		$-x_2x_6 + x_4x_5$	$\binom{12}{34}$
9	(0,1,-2)	Y_3	$h_1y_3 + x_2y_5 - x_4y_6$	$\binom{14}{13} - \binom{24}{23}$
1	(-2,0,2)		$x_3y_1 - x_5y_4$	$\binom{23}{14}$
2	(-2,1,0)	Y_1	$h_3y_1 - x_2y_4 + x_5y_6$	$\binom{23}{13} - \binom{24}{14}$
3	(-2,2,-2)		$-x_2y_6 + y_1y_3$	$\binom{24}{13}$
4	(-1,-1,1)	Y_4	$-(h_2 + h_3)y_4 - x_3y_6 + y_1y_2$	$\binom{23}{12} + \binom{34}{14}$
5	(-1,0,-1)	Y_6	$-h_2y_6 + y_1y_5 - y_3y_4$	$\binom{24}{12} - \binom{34}{13}$
6	(-1,1,1)	X_5	$(h_1 + h_2)x_5 + x_2x_3 - x_6y_1$	$\binom{12}{14} + \binom{23}{34}$
7	(-1,2,-1)	X_2	$(h_1 + h_2 + h_3)x_2 - x_4y_1 + x_5y_3$	$\binom{12}{13} - \binom{24}{34}$
8	(0,-2,0)		$-y_2y_6 + y_4y_5$	$\binom{34}{12}$
9	(0,-1,2)	X_3	$h_1x_3 + x_5y_2 - x_6y_4$	$\binom{13}{14} - \binom{23}{24}$

Таблица 3. Инварианты $\alpha_{(i,j,k)}$

$\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$ (0, 0, 0) H	$\begin{pmatrix} 12 \\ 13 \end{pmatrix}$ (-1, 2, -1) X_2	$\begin{pmatrix} 12 \\ 14 \end{pmatrix}$ (-1, 1, 1) X_5	$\begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}$ (1, 1, -1) X_4	$\begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix}$ (1, 0, 1) X_6	$\begin{pmatrix} 12 \\ 34 \end{pmatrix}$ (0, 2, 0)
$\begin{pmatrix} 13 \\ 12 \end{pmatrix}$ (1, -2, 1) Y_2	$\begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix}$ (0, 0, 0) H	$\begin{pmatrix} 13 \\ 14 \end{pmatrix}$ (0, -1, 2) X_3	$\begin{pmatrix} 13 \\ 23 \end{pmatrix}$ (2, -1, 0) X_1	$\begin{pmatrix} 13 \\ 24 \end{pmatrix}$ (2, -2, 2)	$\begin{pmatrix} 13 \\ 34 \end{pmatrix}$ (1, 0, 1) X_6
$\begin{pmatrix} 14 \\ 12 \end{pmatrix}$ (1, -1, -1) Y_5	$\begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix}$ (0, 1, -2) Y_3	$\begin{pmatrix} 14 \\ 14 \end{pmatrix}$ (0, 0, 0) H	$\begin{pmatrix} 14 \\ 23 \end{pmatrix}$ (2, 0, -2)	$\begin{pmatrix} 14 \\ 24 \end{pmatrix}$ (2, -1, 0) X_1	$\begin{pmatrix} 14 \\ 34 \end{pmatrix}$ (1, 1, -1) X_4
$\begin{pmatrix} 23 \\ 12 \end{pmatrix}$ (-1, -1, 1) Y_4	$\begin{pmatrix} 23 \\ 13 \end{pmatrix}$ (-2, 1, 0) Y_1	$\begin{pmatrix} 23 \\ 14 \end{pmatrix}$ (-2, 0, 2)	$\begin{pmatrix} 23 \\ 23 \end{pmatrix}$ (0, 0, 0) H	$\begin{pmatrix} 23 \\ 24 \end{pmatrix}$ (0, -1, 2) X_3	$\begin{pmatrix} 23 \\ 34 \end{pmatrix}$ (-1, 1, 1) X_5
$\begin{pmatrix} 24 \\ 12 \end{pmatrix}$ (-1, 0, -1) Y_6	$\begin{pmatrix} 24 \\ 13 \end{pmatrix}$ (-2, 2, -2)	$\begin{pmatrix} 24 \\ 14 \end{pmatrix}$ (-2, 1, 0) Y_1	$\begin{pmatrix} 24 \\ 23 \end{pmatrix}$ (0, 1, -2) Y_3	$\begin{pmatrix} 24 \\ 24 \end{pmatrix}$ (0, 0, 0) H	$\begin{pmatrix} 24 \\ 34 \end{pmatrix}$ (-1, 2, -1) X_2
$\begin{pmatrix} 34 \\ 12 \end{pmatrix}$ (0, -2, 0) Y_6	$\begin{pmatrix} 34 \\ 13 \end{pmatrix}$ (-1, 0, -1) Y_6	$\begin{pmatrix} 34 \\ 14 \end{pmatrix}$ (-1, -1, 1) Y_4	$\begin{pmatrix} 34 \\ 23 \end{pmatrix}$ (1, -1, -1) Y_5	$\begin{pmatrix} 34 \\ 24 \end{pmatrix}$ (1, -2, 1) Y_2	$\begin{pmatrix} 34 \\ 34 \end{pmatrix}$ (0, 0, 0) H

имеют веса, соответствующие элементам алгебры X_i , $i = 1, \dots, 6$ (выше главной диагонали), симметрично им относительно главной диагонали расположены миноры с весами, соответствующими элементам Y_i , $i = 1, \dots, 6$. Пара миноров, расположенных симметрично относительно побочной диагонали, имеет один и тот же вес (i, j, k) и образует инвариант $\alpha_{(i,j,k)}$. Таким образом каждый инвариант $\alpha_{(i,j,k)}$ имеет свое отражение относительно главной диагонали - инвариант $\alpha_{(-i,-j,-k)}$.

В таблице 4 приведены полученные на II этапе инварианты ψ , которые имеют четыре (инварианты веса $(0, 0, 0)$) и пять слагаемых. Все инварианты являются однородными многочленами третьей степени по $\alpha_{(i,j,k)}$ и удовлетворяют следующим уравнениям

- (1) на группе: $(\mathcal{L}_{\chi_{CF}} + t_2) \psi = 0$,
- (2) на алгебре: $(\mathcal{L}_{v_2} - 6) \psi = 0$, $(\mathcal{L}_{v_4} + 56 t_2) \psi = 0$.

Видно, что на алгебре существует вектор

$$w_4 = \frac{1}{8}(3v_4 - 28t_2v_2),$$

для которого уравнение становится однородным:

$$\mathcal{L}_{w_4}\psi = 0.$$

Заметим, что каждый инвариант ψ ненулевого веса (i, j, k) имеет пару - инвариант веса $(-i, -j, -k)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тривиализация слоения $\mathcal{F}$ группы Ли G , задаваемого действием G на себе сопряжением, требует выбора параметров ϕ на классе сопряженности $\mathcal{E}$ как на подмногообразии в G . Система (1.3), определяющая параметры, задается условием равенства нулю производных Ли $\mathcal{L}_\chi\phi$ относительно сдвигов вдоль горизонтальных векторных полей χ , нормальных к касательному пространству $\mathcal{T}\mathcal{E}$ к классу сопряженности относительно би-инвариантной метрики на группе.

В статье определены системы векторов, образующих базис нормального пространства к классу сопряженности (уравнение (2.5)) и коприсоединенной орбите (уравнение (2.20)). Наборы векторов χ для различных групп $SL(n)$ строятся по общему принципу. Каждый вектор включает части, отвечающие преобразованиям дилатации и трансляции, для которых инварианты известны. Оставшиеся части определяют линейные системы уравнений типа (2.14) для многочленов ψ , являющихся линейными комбинациями мономов фиксированного веса с неизвестными коэффициентами. Искомые параметры ϕ строятся как рациональные функции найденных многочленов. Аналогичным образом решается задача параметризации коприсоединенных орбит в $\mathfrak{sl}^*(n)$ при использовании базиса Картана-Вейля для $\mathfrak{sl}(n)$. Присоединенное действие является дифференциалом сопряженного действия. Как следствие, параметры на классах сопряженности и коприсоединенных орбитах связаны преобразованием, задаваемым отображением алгебры $\mathfrak{sl}(n)$ в группу $SL(n)$. Каждый многочлен ψ можно характеризовать весом, представляющим сумму весов переменных в каком-либо мономе.

Задача определения параметров разбивается на этапы в соответствии с числом горизонтальных векторных полей χ (их число равно

Таблица 4. $SL(4)$ инварианты II этапа

	Weight	
1	(0,0,0)	$\alpha_{(2,0,-2)} (\alpha_{(-1,1,1)} \alpha_{(-1,-1,1)} + \alpha_{(0,-1,2)} \alpha_{(-2,1,0)})$ $-\alpha_{(-2,0,2)} (\alpha_{(1,-1,-1)} \alpha_{(1,1,-1)} + \alpha_{(0,1,-2)} \alpha_{(2,-1,0)})$
2	(0,0,0)	$\alpha_{(2,-2,2)} (\alpha_{(-1,2,-1)} \alpha_{(-1,0,-1)} - \alpha_{(0,1,-2)} \alpha_{(-2,1,0)})$ $+\alpha_{(-2,2,-2)} (-\alpha_{(1,-2,1)} \alpha_{(1,0,1)} + \alpha_{(0,-1,2)} \alpha_{(2,-1,0)})$
3	(-4,0,0)	$-4\alpha_{(-2,0,2)} \alpha_{(-2,2,-2)} \alpha_{(0,-2,0)} - \alpha_{(-2,1,0)} \alpha_{(-1,0,-1)} \alpha_{(-1,-1,1)}$ $-\alpha_{(-2,0,2)} \alpha_{(-1,0,-1)}^2 + \alpha_{(-2,2,-2)} \alpha_{(-1,-1,1)}^2 \alpha_{(0,-2,0)} \alpha_{(-2,1,0)}^2$
4	(-4,4,0)	$-4\alpha_{(2,-2,2)} \alpha_{(-2,0,2)} \alpha_{(0,-2,0)} + \alpha_{(-1,2,-1)} \alpha_{(-1,1,1)} \alpha_{(-2,1,0)}$ $-\alpha_{(0,2,0)} \alpha_{(-2,1,0)}^2 - \alpha_{(-2,0,2)} \alpha_{(-1,2,-1)}^2 + \alpha_{(-2,2,-2)} \alpha_{(-1,1,1)}^2$
5	(0,-4,4)	$4\alpha_{(2,-2,2)} \alpha_{(-2,0,2)} \alpha_{(0,-2,0)} - \alpha_{(1,-2,1)} \alpha_{(0,-1,2)} \alpha_{(-1,-1,1)}$ $-\alpha_{(2,-2,2)} \alpha_{(-1,-1,1)}^2 + \alpha_{(-2,0,2)} \alpha_{(1,-2,1)}^2 + \alpha_{(0,-2,0)} \alpha_{(0,-1,2)}^2$
6	(0,0,-4)	$4\alpha_{(2,0,-2)} \alpha_{(-2,2,-2)} \alpha_{(0,-2,0)} + \alpha_{(1,-1,-1)} \alpha_{(0,1,-2)} \alpha_{(-1,0,-1)}$ $+\alpha_{(2,0,-2)} \alpha_{(-1,0,-1)}^2 - \alpha_{(-2,2,-2)} \alpha_{(1,-1,-1)}^2 + \alpha_{(0,-2,0)} \alpha_{(0,1,-2)}^2$
7	(-2,2,2)	$2\alpha_{(0,2,0)} \alpha_{(-2,0,2)} \alpha_{(0,0,0)}^{(2)}$ $+\alpha_{(0,2,0)} (\alpha_{(-1,1,1)} \alpha_{(-1,-1,1)} + \alpha_{(0,-1,2)} \alpha_{(-2,1,0)})$ $+\alpha_{(-2,0,2)} (\alpha_{(-1,2,-1)} \alpha_{(1,0,1)} - \alpha_{(-1,1,1)} \alpha_{(1,1,-1)})$
8	(-2,4,-2)	$-2\alpha_{(0,2,0)} \alpha_{(-2,2,-2)} \alpha_{(0,0,0)}^{(1)}$ $+\alpha_{(0,2,0)} (\alpha_{(-1,2,-1)} \alpha_{(-1,0,-1)} - \alpha_{(0,1,-2)} \alpha_{(-2,1,0)})$ $+\alpha_{(-2,2,-2)} (\alpha_{(-1,2,-1)} \alpha_{(1,0,1)} - \alpha_{(-1,1,1)} \alpha_{(1,1,-1)})$
9	(-2,-2,2)	$2\alpha_{(-2,0,2)} \alpha_{(0,-2,0)} \alpha_{(0,0,0)}^{(2)}$ $+\alpha_{(-2,0,2)} (\alpha_{(1,-2,1)} \alpha_{(-1,0,-1)} - \alpha_{(1,-1,-1)} \alpha_{(-1,-1,1)})$ $+\alpha_{(0,-2,0)} (\alpha_{(-1,1,1)} \alpha_{(-1,-1,1)} + \alpha_{(0,-1,2)} \alpha_{(-2,1,0)})$
10	(-2,0,-2)	$-2\alpha_{(-2,2,-2)} \alpha_{(0,-2,0)} \alpha_{(0,0,0)}^{(1)}$ $+\alpha_{(-2,2,-2)} (\alpha_{(1,-2,1)} \alpha_{(-1,0,-1)} - \alpha_{(1,-1,-1)} \alpha_{(-1,-1,1)})$ $+\alpha_{(0,-2,0)} (\alpha_{(-1,2,-1)} \alpha_{(-1,0,-1)} - \alpha_{(0,1,-2)} \alpha_{(-2,1,0)})$

рангу группы). На каждом этапе решается система линейных уравнений для инвариантов одного из векторов, как многочленов от инвариантов, полученных на предыдущем этапе.

Несмотря на то, что в работе приведены примеры решения задачи параметризации для групп $SL(3)$, $SL(4)$ и их алгебр, все дифференциально-геометрические структуры определены для групп $SL(n)$ и алгебр $\mathfrak{sl}(n)$ с произвольным n . Однако с ростом n во первых, увеличивается размерность группы (алгебры), во-вторых растет ее ранг. Увеличение числа векторных полей χ и рост степеней их коэффициентов в совокупности с ростом числа переменных приводят к сильному увеличению объем вычислений.

Выделение набора алгебраически независимых инвариантов представляет большую вычислительную задачу ввиду большого числа переменных и степеней инвариантов.

Логично было бы переписывать уравнения для инвариантов данного этапа через инварианты предыдущего этапа. Это значительно бы сократило степени рассматриваемых мономов. Однако пока не удается реализовать такой подход.

Интересным представляется определить группу преобразований, для которой поля χ являются инфинитезимальными генераторами. Эта задача эквивалентна построению траекторий динамической системы для потоков, определяемых векторными полями χ .

Автор благодарен организаторам международной конференции *Полиномиальная компьютерная алгебра*, 15–20 апреля 2019, Международный Математический институт им. Эйлера, Санкт-Петербург, за возможность представить работу и гостеприимство в ходе конференции.

А. ВЕКТОРЫ v_3 И χ_{M_2} ДЛЯ ГРУППЫ $SL(4)$

$$\begin{aligned} v_3 = & \left((h_1 + 2h_2 + h_3)x_1 + 2(x_4y_2 + x_6y_5) \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \\ & + \left((-h_1 + h_3)x_2 + 2(x_4y_1 + x_5y_3) \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \\ & + \left(-(h_1 + 2h_2 + h_3)x_3 + 2(x_5y_2 + x_6y_4) \right) \frac{\partial}{\partial x_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left((h_1 + h_3)x_4 + 2(x_1x_2 + x_6y_3) \right) \frac{\partial}{\partial x_4} \\
 & + \left(-(h_1 + h_3)x_5 + 2(x_2x_3 + x_6y_1) \right) \frac{\partial}{\partial x_5} \\
 & + \left((h_1 - h_3)x_6 + 2(x_1x_5 + x_3x_4) \right) \frac{\partial}{\partial x_6} \\
 & + \left((h_1 + 2h_2 + h_3)h_1 + 2(-x_2y_2 + x_4y_4 - x_5y_5 + x_6y_6) \right) \frac{\partial}{\partial h_1} \\
 & + \left((-h_1 + h_3)h_2 + 2(x_1y_1 - x_3y_3 - x_4y_4 + x_5y_5) \right) \frac{\partial}{\partial h_2} \\
 & + \left(-(h_1 + 2h_2 + h_3)h_3 + 2(x_2y_2 + x_4y_4 - x_5y_5 - x_6y_6) \right) \frac{\partial}{\partial h_3} \\
 & + \left((h_1 - h_3)y_6 + 2(y_1y_5 + y_3y_4) \right) \frac{\partial}{\partial y_6} \\
 & + \left(-(h_1 + h_3)y_5 + 2(x_1y_6 + y_2y_3) \right) \frac{\partial}{\partial y_5} \\
 & + \left((h_1 + h_3)y_4 + 2(x_3y_6 + y_1y_2) \right) \frac{\partial}{\partial y_4} \\
 & + \left(-(h_1 + 2h_2 + h_3)y_3 + 2(x_2y_5 + x_4y_6) \right) \frac{\partial}{\partial y_3} \\
 & + \left((-h_1 + h_3)y_2 + 2(x_1y_4 + x_3y_5) \right) \frac{\partial}{\partial y_2} \\
 & + \left((h_1 + 2h_2 + h_3)y_1 + 2(x_2y_4 + x_5y_6) \right) \frac{\partial}{\partial y_1} \\
 \chi_{M_2} = & \left(\binom{23}{23} + \binom{24}{24} + \binom{34}{34} \right) \frac{\partial}{\partial x^{11}} - \left(\binom{13}{23} + \binom{14}{24} \right) \frac{\partial}{\partial x^{12}} \\
 & + \left(\binom{12}{23} - \binom{14}{34} \right) \frac{\partial}{\partial x^{13}} + \left(\binom{12}{24} + \binom{13}{34} \right) \frac{\partial}{\partial x^{14}} \\
 & - \left(\binom{23}{13} + \binom{24}{14} \right) \frac{\partial}{\partial x^{21}} + \left(\binom{13}{13} + \binom{14}{14} + \binom{34}{34} \right) \frac{\partial}{\partial x^{22}} \\
 & - \left(\binom{12}{13} + \binom{24}{34} \right) \frac{\partial}{\partial x^{23}} + \left(-\binom{12}{14} + \binom{23}{34} \right) \frac{\partial}{\partial x^{24}} \\
 & + \left(\binom{23}{12} - \binom{34}{14} \right) \frac{\partial}{\partial x^{31}} - \left(\binom{13}{12} + \binom{34}{24} \right) \frac{\partial}{\partial x^{32}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\binom{12}{12} + \binom{14}{14} + \binom{24}{24} \right) \frac{\partial}{\partial x^{33}} - \left(\binom{13}{14} + \binom{23}{24} \right) \frac{\partial}{\partial x^{34}} \\
& + \left(\binom{24}{12} + \binom{34}{13} \right) \frac{\partial}{\partial x^{41}} + \left(-\binom{14}{12} + \binom{34}{23} \right) \frac{\partial}{\partial x^{42}} \\
& - \left(\binom{14}{13} + \binom{24}{23} \right) \frac{\partial}{\partial x^{43}} + \left(\binom{12}{12} + \binom{13}{13} + \binom{23}{23} \right) \frac{\partial}{\partial x^{44}}
\end{aligned}$$

Вектор χ_{CF} для $SL(3)$ получается из χ_{M_2} отбрасыванием членов, содержащих четверку среди своих индексов. Решения уравнения (4.1), которые имеют веса элементов алгебры (отличные от $(0, 0, 0)$), включают те же миноры, что и коэффициенты вектора χ_{M_2} того же веса. Но при этом один из знаков в комбинации миноров различен для инварианта и коэффициента (смотри таблицу 2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. Molino, *Riemannian Foliations*, Birkäuser Boston, 1988.
2. T. J. Courant, *Dirac manifolds*. — Transactions AMS **319** (1990), 631–661.
3. A. Alekseev, T. Strobl, *Current algebras and differential geometry*. — ЖЭФ **03** (2005) 035.
4. M. V. Babich, *Birational Darboux Coordinates on (Co)Adjoint Orbits of $GL(N, \mathbb{C})$* . — Funktsional. Anal. Prilozhen. **50**, No. 1 (2016), 20–37.
5. T. A. Springer, *Linear algebraic Groups*, 2-nd ed., Birkhäser Boston, 1998.
6. Peter M. Michor, *Topics in differential geometry*, AMS 2008.
7. J. A. Schouten, *Ricci Calculus*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1954.
8. Н. Х. Ибрагимов, *Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Классические и новые методы. Нелинейные математические модели. Симметрия и принципы инвариантности*. Нижний Новгород, издательство Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2007.
9. Peter J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer, New York, 1998.
10. Ю. Палий, *Слоение пространства $sl^*(n, R)$ на коприсоединенные орбиты*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **468** (2018), 267–280.
11. A. Baker, *Matrix groups. Introduction to Lie theory*. Springer-Verlag London Limited, 2002.
12. J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer-Verlag, N.-Y., Inc., 1978.
13. A. A. Kirillov, *Lectures on the orbit method*. American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 2004.

Paliy Yu. Parametrization of the conjugacy class of the special linear group.

Local description of the foliation of the group $SL(n)$ into the conjugacy classes, and also the foliation $\mathfrak{sl}^*(n)$ into the coadjoint orbits, requires the introducing of parameters on the conjugacy class (the coadjoint orbit). Under the assumption that the parameters are rational functions of natural coordinates (the matrix elements) on $SL(n)$, the problem is reduced to solving a system of linear equations. Such a system arises from the requirement of parameter invariance with respect to shifts along vector fields normal to the conjugacy class. Likewise, the problem of parameterization of coadjoint orbits in $\mathfrak{sl}^*(n)$ can be treated with the use of the Cartan–Weyl basis for $\mathfrak{sl}(n)$. The adjoint action is the differential of the conjugacy action. As a consequence, the parameters on the conjugacy classes and coadjoint orbits are related by the transformation specified by the mapping of the algebra $\mathfrak{sl}(n)$ into the group $SL(n)$. The groups $SL(3)$, $SL(4)$ are considered as examples.

Отдел теоретической физики
Институт Прикладной Физики
Кишинев, Молдова;
Лаборатория информационных технологий
Объединенный Институт Ядерных Исследований,
Дубна, Россия
E-mail: palii@jinr.ru

Поступило 26 сентября 2019 г.