Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 485, 2019 г.

В. В. Корняк

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ НЕПРИВОДИМЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СПЛЕТЕНИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

§1. Введение

Описание физической системы в большинстве случаев предполагает наличие *геометрического* пространства X, в каждой точке которого определены данные из некоторого множества V, которое мы будем называть *локальным* множеством. Классические состояния физической системы образуют множество функций из X в V, обозначаемое символом V^X. Физическая теория описывает эволюцию во времени состояний из V^X. Обычно предполагается, что на множествах X и V действуют группы симметрий $G = G(X)$ и $F = F(V)$, соответственно. Мы будем называть группу G группой *пространственных* симметрий, а группу F – группой *локальных* симметрий[1]. Множества X, V и группу F можно рассматривать, соответственно, как базу, типичный слой и структурную группу расслоения. При этом множество V^X представляет собой множество сечений расслоения. Естественной группой симметрий, действующей на множестве сечений V^X и сохраняющей структуру расслоения, является комбинация локальной F и пространственной G групп, называемая *сплетением*.

Квантовые состояния физической системы описываются гильбертовым пространством, базисными элементами которого являются классические состояния. При этом действию группы симметрий на классические состояния соответствует унитарное представление этой группы (или некоторой ее надгруппы) в гильбертовом пространстве. Гильбертово пространство, базисными элементами которого являются функции на геометрическом пространстве, представляет собой тензорное

Ключевые слова: представления сплетений конечных групп, неприводимые разложения, многокомпонентные квантовые системы, вычислительная теория групп, централизаторная алгебра, неприводимые инвариантные проекторы, запутанные квантовые состояния.

[1]В физической литературе чаще используют термин *внутренние симметрии*.

произведение *локальных* гильбертовых пространств соответствующих точкам геометрического пространства. Небольшое обобщение позволяет описать аналогичным образом произвольные многокомпонентные (составные) квантовые системы, то есть, системы, образуемые из отдельных квантовых систем (необязательно изоморфных друг другу): гильбертово пространство составной системы представляет собой тензорное произведение гильбертовых пространств компонент.

Квантовые состояния составной системы, которые можно представить в виде взвешенной суммы тензорных произведений квантовых состояний компонент, называются *сепарабельными*. Состояния, не являющиеся сепарабельными, называются *запутанными*. Подавляющее большинство состояний типичной составной системы являются запутанными. Понятие запутанности лежит в основе квантовой информатики. Следствием запутанности являются такие экспериментально наблюдаемые явления, как нелокальные квантовые корреляции и квантовая телепортация.

В последнее время все большую популярность приобретает идея о том, что само физическое пространство не является фундаментальной сущностью, а возникает в результате некоторого статистического отбора внутри "гильбертова пространства Вселенной", как приближенная феноменологическая структура. Идея "эмерджентного пространства" привлекательна, в частности, тем, что она позволяет переформулировать трудную проблему согласования квантовой механики и теории гравитации: основные трудности возникают из-за того, что квантовые и пространственно-временные структуры рассматриваются как равно фундаментальные. Понизив "статус фундаментальности" пространственно-временных структур можно попытаться вывести их из квантовой теории. Типичные подходы к выделению геометрических структур внутри гильбертова пространства используют понятие запутанности (см., например, [1, 2]) и вкратце сводятся к следующему. Квантовое состояние в гильбертовом пространстве большой размерности приближенно разлагается в произведение большого числа факторов, которые интерпретируются как точки (или области) геометрического пространства. Расстояния между точками определяются некоторой *мерой запутанности*, т.е. вещественной функцией, обращающейся в нуль на сепарабельных состояниях, и положительной на запутанных. Типичным примером такой меры является *квантовая взаимная информация*.

Квантовое описание можно сделать конструктивным, если непрерывные группы унитарных эволюций заменить в квантовом формализме унитарными представлениями конечных групп. Известно, что любое линейное (всегда являющееся унитарным по простой общей причине) представление конечной группы является подпредставлением некоторого перестановочного представления. В частности, так называемое *регулярное представление*, то есть перестановочное представление действия группы на ее собственных элементах, содержит все возможные неприводимые представления данной группы. Таким образом, мы можем погрузить любую конструктивную квантовую модель в подходящее инвариантное подпространство некоторого перестановочного представления [3, 4]. Если мы можем разложить перестановочное представление группы на неприводимые компоненты, то мы можем построить любое представление этой группы. В данной статье мы описываем алгоритм разложения перестановочного представления сплетения конечных групп на неприводимые компоненты. В частности, алгоритм строит полный набор ортогональных проекторов в неприводимые инвариантные подпространства гильбертова пространства представления сплетения.

§2. Некоторые понятия и обозначения

- Все множества предполагаются конечными. Для множества X отношение $X \cong \overline{n}$ означает, что $|X| = n$, т.е., множество X “изоморфно” множеству $\overline{n} = \{1, \ldots, n\}$, где n – натуральное число.
- Для действия группы G на множестве A мы используем соглашение о записи справа. Таким образом, ag и aG означают, соответственно, действие элемента группы $g \in G$ на элемент множества $a \in A$ и орбиту a под действием G. Групповая единица группы G обозначается символом $\mathbf{1}_G$.
- Символами S_n и A_n обозначаются, соответственно, *симметрическая* и *знакопеременная* группы на множестве $\overline{n}$.
- Множество отображений из множества X в множество A обозначается символом A^X. Для случая $X \cong \overline{n}$ индивидуальное отображение представляется вектором вида $a = [a_1, \ldots, a_n] \in A^X$.
- *Централизаторной алгеброй* линейного представления группы называется алгебра матриц, коммутирующих со всеми матрицами представления.

Рангом представления называется размерность централизаторной алгебры.

- Для стандартных матриц размера $n \times n$ мы используем следующие обозначения: $\mathbb{1}_n$ – единичная матрица, $\mathbb{0}_n$ – нулевая матрица, $\mathbb{J}_n$ – матрица, все элементы которой равны единице.

§3. Сплетения

Пусть на множестве $X \cong \overline{N}$, которое мы будем называть *пространством*, действует группа *пространственных симметрий* $G \leqslant \mathsf{S}_N$, а на *локальном* множестве $V \cong \overline{M}$ действует группа *локальных* (или, как принято в физике, *внутренних*) симметрий $F \leqslant \mathsf{S}_M$. Множества X, V и группу F можно рассматривать, соответственно, как базу, типичный слой и структурную группу расслоения. Состояния системы в целом описываются функциями из X в V, то есть сечениями расслоения. Естественной группой симметрий, действующей на множестве сечений V^X с сохранением структуры расслоения, является комбинация локальной F и пространственной G групп, называемая сплетением [5, 6]. Сплетение, обозначаемое символом $F \wr G$, имеет структуру полупрямого произведения [7] множества функций F^X на точках пространства со значениями в локальной группе и пространственной группы:

$$\widetilde{W} = F \wr G \cong F^X \rtimes G\,. \tag{1}$$

Действие сплетения $\widetilde{W}$ на множестве сечений V^X описывается формулой

$$v(x)\,(f(x)\,,g) = v\big(xg^{-1}\big)\,f\big(xg^{-1}\big)\,, \tag{2}$$

где $v \in V^X$, $f \in F^X$, $g \in G$.

Приведем несколько примеров приложений сплетений в математике.

- Универсальная теорема вложения (теорема Калужнина–Краснера) утверждает, что любое расширение группы A с помощью группы B изоморфно некоторой подгруппе сплетения $A \wr B$, т.е., сплетение представляет собой универсальный объект, содержащий все расширения.
- Сплетения играют важную роль в описании всех максимальных подгрупп симметрической группы (теорема О'Нэна–Скотта) [8].

- Сплетение $\mathsf{S}_m \wr \mathsf{S}_n$ является группой автоморфизмов гиперкубического графа или схемы Хэмминга $H(n, m)$ в теории кодирования [9].

При изучении представлений групп и их приложений естественным начальным шагом является разложение представлений на неприводимые подпредставления. Ранее мы предложили алгоритм разложения представлений конечных групп [10, 11], основанный на построении полного множества взаимно ортогональных инвариантных проекторов. Это множество является частным случаем конструкции, которая в общей теории колец называется полным множеством примитивных ортогональных идемпотентов. Любое кольцо с единицей содержит такое множество (возможно, тривиальное, т.е., состоящее из одной единицы). Кольцо, содержащее нетривиальное полное множество примитивных ортогональных идемпотентов, может быть представлено в виде прямой суммы неразложимых колец. Это представление называется разложением Пирса [12,13]. В нашем случае неприводимые инвариантные проекторы являются примитивными идемпотентами централизаторной алгебры (рассматриваемой как кольцо) представления группы.

Подход, описанный в [10,11], вкратце сводится к следующему. Пусть у нас имеется группа G и ее представление $\mathcal{U}(G)$ в некотором пространстве. Вначале мы вычисляем базис централизаторной алгебры $A_1, ..., A_R$ (здесь R – ранг представления). Это несложная задача линейной алгебры, поскольку матрицы $A_1, \ldots, A_R$ являются решениями системы линейных уравнений $\mathcal{U}\left(g^{-1}\right) A\mathcal{U}(g) = A,\ g \in G$. Предположим, что централизаторное кольцо содержит L примитивных ортогональных идемпотентов $B_1, \ldots, B_L$. Условия ортогональности и идемпотентности можно записать в виде системы квадратных уравнений

$$B_k B_\ell = \delta_{k\ell} B_\ell. \tag{3}$$

Записав идемпотенты в общем виде в базисе централизаторной алгебры

$$B_\ell = \sum_{r=1}^{R} b_{r\ell} A_r \tag{4}$$

и подставив (4) в (3), мы получаем систему квадратных уравнений относительно неизвестных $b_{r\ell}$. Из общей теории представлений групп следует, что корни этой системы полиномиальных уравнений принадлежат к абелевым расширениям[2] и поэтому, в принципе, всегда могут быть вычислены алгоритмически. В нашем случае число переменных в полиномах равно рангу и наш опыт показывает, что современные системы компьютерной алгебры легко справляются лишь с задачами невысоких рангов, обычно $R \leqslant 17$ (в отдельных случаях удается решить задачи с рангами 18 и 19). Это связано с тем, что используемые нами алгоритмы работы с полиномами по своей природе являются трудными (имеют двойную экспоненциальную сложность по числу переменных).

Многие важные представления имеют невысокие ранги. Например, около 96% представлений простых групп (и “небольших” расширений простых групп, имеющих нетривиальный мультипликатор Шура и/или нетривиальную группу внешних автоморфизмов), содержащихся в известном Атласе представлений конечных групп [14], удовлетворяют условию $R \leqslant 17$. Компьютерная реализация алгоритма, описанного в [10, 11], расщепляет представления из [14], имеющие размерности в сотни тысяч, в наиболее трудном для вычислений случае полей характеристики нуль.

Сплетения, поскольку они содержат все возможные расширения, весьма “далеки” от простых групп и их представления имеют высокие ранги. Поэтому алгоритм [10, 11] непригоден для расщепления представлений сплетений. В данной статье предлагается подход, основанный на конструировании неприводимых проекторов для сплетений исходя из локальных проекторов. Компьютерная реализация этого подхода расщепляет представления сплетений размерностей в квадриллионы и рангов в сотни миллионов.

[2]Абелевым расширением называется расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с помощью корней полинома, имеющего абелеву группу Галуа. Согласно теореме Кронекера–Вебера любое абелево расширение является подполем некоторого циклотомического поля – расширения $\mathbb{Q}$ с помощью примитивного корня некоторой степени из единицы.

§4. Централизаторная алгебра перестановочного представления сплетения

Перестановочное представление $\widetilde{P} = \widetilde{P}\left(\widetilde{W}\right)$ сплетения $\widetilde{W}$ реализуется $(0,1)$-матрицами размера $M^N \times M^N$, имеющими вид

$$\widetilde{P}(\widetilde{w})_{u,v} = \delta_{u\widetilde{w},v}, \text{ где } \widetilde{w} \in \widetilde{W};\ u,v \in V^X;\ \delta \text{ – дельта Кронекера.}$$

Мы предполагаем, что пространством представления является M^N-мерное гильбертово пространство $\widetilde{\mathcal{H}}$ над некоторым абелевым расширением $\mathcal{F}$ поля $\mathbb{Q}$, являющимся расщепляющим полем[3] для локальной группы F. Пусть

$$\widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_{\widetilde{R}} \tag{5}$$

– базис централизаторной алгебры представления $\widetilde{P}$, где $\widetilde{R}$ означает ранг представления. Элементы множества (5) являются решениями системы уравнений, выражающими условия инвариантности

$$\widetilde{P}\left(\widetilde{w}^{-1}\right) \widetilde{A}\widetilde{P}(\widetilde{w}) = \widetilde{A},\ \widetilde{w} \in \widetilde{W}\,. \tag{6}$$

Более детальный анализ соотношения (6) показывает, что базисные элементы из множества (5) находятся во взаимно однозначном соответствии с орбитами действия группы $\widetilde{W}$ на декартовом квадрате $V^X \times V^X$. Такие орбиты называются *орбиталами*. Для удобства представим этот декартов квадрат в виде $(V \times V)^X$, то есть в виде массива

$$\left[(V \times V)_1, \ldots, (V \times V)_N\right]. \tag{7}$$

Для вычисления орбиталов рассмотрим структуру группы $\widetilde{W} = F \wr G$ более подробно. Ее подгруппа

$$\widetilde{F^X} = \left(F^X;\, \mathbf{1}_G\right) \cong F^X \tag{8}$$

называется базовой группой сплетения. Группа $\widetilde{F^X}$ является нормальным делителем (или инвариантной подгруппой) группы $\widetilde{W}$. Это означает, что $\widetilde{w}^{-1}\widetilde{F^X}\widetilde{w} = \widetilde{F^X}$ для любого $\widetilde{w} \in \widetilde{W}$ и обозначается символически отношением $\widetilde{F^X} \triangleleft \widetilde{W}$. Подгруппа

$$\widetilde{G} = \left(\mathbf{1}_F^X;\, G\right) \cong G \tag{9}$$

[3]Расщепляющим полем для конечной группы называется поле, над которым любое линейное представление этой группы может быть полностью разложено на неприводимые компоненты.

является дополнением к $\widetilde{F^X}$ в $\widetilde{W}$, т.е.

$$\widetilde{W} = \widetilde{F^X} \cdot \widetilde{G} \quad \text{и} \quad \widetilde{F^X} \cap \widetilde{G} = \mathbf{1}_{\widetilde{W}} \equiv \left(\mathbf{1}_F^X;\, \mathbf{1}_G\right).$$

Таким образом, мы можем построить орбиты множества $(V \times V)^X$, действуя сначала элементами базовой группы (8), а затем элементами дополнения (9). Поскольку F^X является прямым произведением N копий F, т.е. $F^X = F_1 \times \cdots \times F_N$, мы можем действовать группой F^X на массив (7) покомпонентно.

Действие локальной группы F разбивает множество $V \times V$ на R орбит $\Delta_1, \ldots, \Delta_R$, которые мы будем называть *локальными орбиталами.* Вычисление локальных орбиталов – простая задача, поскольку локальная группа “экспоненциально меньше” сплетения. Пусть $\overline{R}^X$ обозначает множество всех отображений из X в множество $\overline{R}$. Определим действие $g \in G$ на отображение $r \in \overline{R}^X$ следующим образом[4]:

$$rg = \left[r_{1g^{-1}}, \ldots, r_{Ng^{-1}}\right]. \tag{10}$$

Орбитал сплетения в терминах локальных орбиталов имеет вид

$$\widetilde{\Delta}_r = \bigsqcup_{q \in rG} \Delta_{q_1} \times \cdots \times \Delta_{q_N},$$

где rG обозначает орбиту отображения r относительно действия (10). Для перевода с языка множеств на язык матриц мы должны заменить локальные орбиталы базисными элементами локальной централизаторной алгебры, объединение – суммированием и декартовы произведения – тензорными. В результате мы получаем следующее выражение для базисного элемента централизаторной алгебры сплетения:

$$\widetilde{A}_r = \sum_{q \in rG} A_{q_1} \otimes \cdots \otimes A_{q_N}, \tag{11}$$

где $A_1, \ldots, A_R$ – базисные элементы локальной централизаторной алгебры. Легко проверить, что базисные элементы (11) образуют полную систему, т.е.

$$\sum_{i=1}^{\widetilde{R}} \widetilde{A}_{r^{(i)}} = \mathbb{J}_{M^N},$$

[4]Действие на индексы (аргументы функции r) обратными элементами группы требуется для выполнения тождества $(rg)\,h = r\,(gh)$.

где $r^{(i)}$ обозначает некоторую нумерацию орбит действия группы G на множестве $\overline{R}^X$.

§5. Полное множество неприводимых ортогональных проекторов

Полное множество инвариантных неприводимых ортогональных проекторов является подмножеством централизаторной алгебры, выделяемое условиями идемпотентности и взаимной ортогональности. Для построения этого подмножества мы использовали свойства тензорного (кронекерова) произведения. Наиболее важными для наших целей являются следующие тождества [15]:

$$
\begin{aligned}
&(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)\,, \\
&(A + B) \otimes\ (C + D) = A \otimes C + A \otimes D + B \otimes C + B \otimes D, \\
&(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha\,(A \otimes B)\,, \\
&(A \otimes B)\,(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)\,, \\
&(S \otimes T)^{-1} = S^{-1} \otimes T^{-1},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где A, B, C и D – матрицы, S и T – обратимые матрицы и α – скаляр.

Непосредственно из этих тождеств следует, что

1) если A и B инвариантны, то $A \otimes B$ также инвариантная матрица;
2) если A и B идемпотенты, то $A \otimes B$ – идемпотент;
3) если $A' = S^{-1}AS$ и $B' = T^{-1}BT$, то
$$A' \otimes B' = (S \otimes T)^{-1}\,(A \otimes B)\,(S \otimes T) \equiv (A \otimes B)'\,.$$
Это соотношение позволяет независимо выбирать наиболее удобные базисы в каждом множителе тензорного произведения.

Используя приведенные выше тождества, их следствия и некоторые дополнительные соображения технического характера, мы получаем результат, играющий центральную роль в обсуждаемом алгоритме.

Пусть $B_1, \ldots, B_L$ – полное множество неприводимых инвариантных ортогональных проекторов перестановочного представления локальной группы F. Действие $g \in G$ на отображение $\ell \in \overline{L}^X$ определяется как $\ell g = \left[\ell_{1g^{-1}}, \ldots, \ell_{Ng^{-1}}\right]$. Тогда мы имеем

Предложение. *Неприводимый инвариантный ортогональный проектор перестановочного представления сплетения имеет вид*

$$\widetilde{B}_k = \sum_{\ell \in kG} B_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes B_{\ell_N}\,, \tag{13}$$

где kG обозначает G-орбиту отображения k на множестве $\overline{L}^X$.

Легко проверить, что выполняется условие полноты $\sum\limits_{i=1}^{\widetilde{K}} \widetilde{B}_{k^{(i)}} = \mathbb{1}_{M^N}$.

Здесь $\widetilde{K}$ обозначает число неприводимых ортогональных проекторов, равное числу неприводимых подпредставлений перестановочного представления сплетения, а $k^{(i)}$ обозначает некоторую нумерацию орбит действия пространственной группы G на множестве отображений $\overline{L}^X$.

Для вычисления базисных элементов централизаторной алгебры (11) и неприводимых ортогональных проекторов (13) мы написали программу на языке Си. Входными данными для программы являются порождающие элементы пространственной и локальной групп, а также полное множество – полученное, например, с помощью программы, описанной в [10, 11] – неприводимых ортогональных проекторов, инвариантных относительно перестановочного представления локальной группы.

§6. Примеры вычислений

Для иллюстрации работы программы приведем примеры вычислений неприводимых инвариантных проекторов для сплетений, построенных из групп симметрий октаэдра, икосаэдра и додекаэдра. Полные группы симметрий этих платоновых тел имеют вид $G \times \mathsf{S}_2$, где множитель G называется группой *собственных* (или *сохраняющих ориентацию* или *вращательных* или *хиральных*) симметрий. Для октаэдра $G \cong \mathsf{S}_4$, а для икосаэдра и додекаэдра $G \cong \mathsf{A}_5$. Заметим, что полная группа симметрий октаэдра сама по себе имеет структуру сплетения: $\mathsf{S}_4 \times \mathsf{S}_2 \cong \mathsf{S}_2 \wr \mathsf{S}_3$, а группа A_5 выделяется тем, что она является наименьшей некоммутативной простой конечной группой. Далее мы будем рассматривать только собственные симметрии, которые будем называть просто “симметриями” для краткости.

Для начала опишем реализации симметрий указанных многогранников, как групп перестановок их вершин. Мы приведём также разложения перестановочных представлений этих симметрий на неприводимые компоненты, базисы централизаторных алгебр и полные множества неприводимых инвариантных проекторов. Неприводимые представления обозначаются их размерностями в жирном шрифте, а перестановочные – размерностями в жирном шрифте с подчеркиванием.

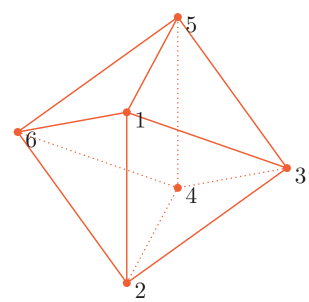

Рис. 1. Октаэдр.

6.1. Октаэдр.

- Для указанной на Рис. 1 нумерации вершин группу симметрий октаэдра $G_{\mathrm{oct}} \cong \mathsf{S}_4$ можно породить, например, следующими двумя перестановками

$$a = (1,3,5)\,(2,4,6) \quad \text{и} \quad b = (1,2,4,5)\,.$$

- Шестимерное перестановочное представление G_{oct}, которое мы обозначаем символом $\underline{\mathbf{6}}$, имеет ранг 3.
- Базис централизаторной алгебры представления $\underline{\mathbf{6}}$ имеет вид

$$A_1 = \mathbb{1}_6,\ A_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{0}_3 & \mathbb{1}_3 \\ \mathbb{1}_3 & \mathbb{0}_3 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} \mathbb{J}_3 - \mathbb{1}_3 & \mathbb{J}_3 - \mathbb{1}_3 \\ \mathbb{J}_3 - \mathbb{1}_3 & \mathbb{J}_3 - \mathbb{1}_3 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

- Разложение на неприводимые подпредставления имеет вид

$$\underline{\mathbf{6}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{2} \oplus \mathbf{3}.$$

- Полное множество неприводимых инвариантных ортогональных проекторов в базисе (14) имеет вид

$$\begin{aligned} B_{\mathbf{1}} &= \frac{1}{6}\left(A_1 + A_2 + A_3\right), \\ B_{\mathbf{2}} &= \frac{1}{3}\left(A_1 + A_2 - \frac{1}{2}A_3\right), \\ B_{\mathbf{3}} &= \frac{1}{2}\left(A_1 - A_2\right). \end{aligned} \tag{15}$$

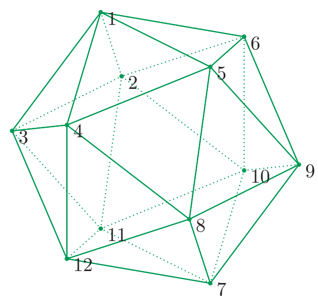

Рис. 2. Икосаэдр.

6.2. Икосаэдр.

- Перестановки

$a = (1,7)(2,8)(3,12)(4,11)(5,10)(6,9)$ и $b = (2,3,4,5,6)(8,9,10,11,12)$

порождают группу симметрий икосаэдра $G_{\mathrm{ico}} \cong \mathsf{A}_5$:

- Ранг перестановочного представления $\underline{\mathbf{12}}$ группы G_{ico} равен 4.
- Базис централизаторной алгебры состоит из четырех симметричных матриц размера 12×12:

$$A_1 = \mathbb{1}_{12},\ A_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{0}_6 & \mathbb{1}_6 \\ \mathbb{1}_6 & \mathbb{0}_6 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} Y & Z \\ Z & Y \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} Z & Y \\ Y & Z \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\text{где}\ \ Y = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&1 \\ 1&0&1&0&0&1 \\ 1&1&0&1&0&0 \\ 1&0&1&0&1&0 \\ 1&0&0&1&0&1 \\ 1&1&0&0&1&0 \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&0&1&1 \\ 0&1&0&0&0&1 \\ 0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0 \end{pmatrix}.$$

- Разложение на неприводимые компоненты имеет вид

$$\underline{\mathbf{12}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{3}' \oplus \mathbf{5}.$$

  Здесь $\mathbf{3}$ и $\mathbf{3}'$ обозначают два неэквивалентных неприводимых трёхмерных представления группы A_5.
- Полное множество неприводимых ортогональных проекторов:

$$B_{\mathbf{1}} = \frac{1}{12}\left(A_1 + A_2 + A_3 + A_4\right),$$
$$B_{\mathbf{3}} = \frac{1}{4}\left(A_1 - A_2 + \frac{\sqrt{5}}{5}A_3 - \frac{\sqrt{5}}{5}A_4\right),$$
$$B_{\mathbf{3}'} = \frac{1}{4}\left(A_1 - A_2 - \frac{\sqrt{5}}{5}A_3 + \frac{\sqrt{5}}{5}A_4\right),$$
$$B_{\mathbf{5}} = \frac{5}{12}\left(A_1 + A_2 - \frac{1}{5}A_3 - \frac{1}{5}A_4\right).$$

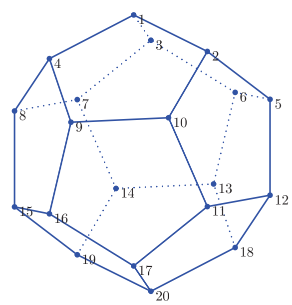

Рис. 3. Додекаэдр.

6.3. Додекаэдр.

- Группа симметрий додекаэдра $G_{\mathrm{dode}} \cong \mathsf{A}_5$ порождается перестановками:

$$a = (2,3,4)(5,7,9)(6,8,10)(11,13,15)(12,14,16)(17,18,19),$$
$$b = (1,2,5,6,3)(4,10,12,13,7)(8,9,11,18,14)(15,16,17,20,19).$$

- Ранг перестановочного представления $\underline{\mathbf{20}}$ группы G_{dode} равен 8.

- Базис централизаторной алгебры состоит из восьми матриц[5] размера 20×20:

$$\overbrace{A_1 = \mathbb{1}_{20}, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6}^{\text{симметричные матрицы}}, A_7, A_8 = A_7^{\mathrm{T}}.$$

- Разложение на неприводимые подпредставления:

$$\underline{\mathbf{20}} \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{3}' \oplus \underbrace{\mathbf{4} \oplus \mathbf{4}} \oplus \mathbf{5}.$$

Нижней фигурной скобкой мы обозначили тот факт, что перестановочное представление $\underline{\mathbf{20}}$ содержит четырёхмерное неприводимое подпредставление $\mathbf{4}$ с кратностью два.

- Полное множество неприводимых ортогональных проекторов:

$$B_{\mathbf{1}} = \frac{1}{20}\left(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8\right),$$

$$B_{\mathbf{3}} = \frac{3}{20}\left(A_1 - A_2 + \frac{\sqrt{5}}{3}A_3 - \frac{\sqrt{5}}{3}A_4 - \frac{A_5}{3} - \frac{A_6}{3} + \frac{A_7}{3} + \frac{A_8}{3}\right),$$

$$B_{\mathbf{3}'} = \frac{3}{20}\left(A_1 - A_2 - \frac{\sqrt{5}}{3}A_3 + \frac{\sqrt{5}}{3}A_4 - \frac{A_5}{3} - \frac{A_6}{3} + \frac{A_7}{3} + \frac{A_8}{3}\right),$$

$$B_{\mathbf{4}}^{(1)} = \frac{1}{5}\left(A_1 - \frac{A_3}{3} - \frac{A_4}{3} + \frac{2A_6}{3} - \frac{1 - \mathbf{i}\sqrt{11}}{6}A_7 - \frac{1 + \mathbf{i}\sqrt{11}}{6}A_8\right),$$

$$B_{\mathbf{4}}^{(2)} = \frac{1}{5}\left(A_1 - \frac{A_3}{3} - \frac{A_4}{3} + \frac{2A_6}{3} - \frac{1 + \mathbf{i}\sqrt{11}}{6}A_7 - \frac{1 - \mathbf{i}\sqrt{11}}{6}A_8\right),$$

$$B_{\mathbf{5}} = \frac{1}{4}\left(A_1 + A_2 + \frac{A_3}{3} + \frac{A_4}{3} - \frac{A_5}{3} - \frac{A_6}{3} - \frac{A_7}{3} - \frac{A_8}{3}\right).$$

Заметим, что примитивные идемпотенты, соответствующие четырехмерному неприводимому подпредставлению, из-за нетривиальной кратности, образуют бесконечное двухпараметрическое семейство. Выражения $B_{\mathbf{4}}^{(1)}$ и $B_{\mathbf{4}}^{(2)}$ представляют собой достаточно произвольно выбранную пару взаимно ортогональных представителей этого семейства.

[5]Эти матрицы слишком громоздки для печати, но их можно легко вычислить с помощью простой процедуры.

6.4. Компьютерные вычисления. В этом разделе представлены результаты применения программы, написанной на языке Си, полученные с помощью персонального компьютера с частотой процессора 3.30GHz и оперативной памятью 16GB. Мы рассмотрим три примера, в которых пространством X всегда будет икосаэдр с соответствующей пространственной группой, а локальными множествами V будут, в порядке возрастания трудности вычислений, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр[6] с соответствующими локальными группами симметрий. В случае октаэдра мы включили вывод базисных элементов централизаторной алгебры и подробные комментарии шагов программы. Результаты вычислений для икосаэдра и додекаэдра приведены в Приложениях A и B, соответственно. Для этих многогранников в качестве локального множества мы ограничились выводом проекторов (с неизбежными лакунами).

6.4.1. *Сплетение* $\mathsf{S}_4(octahedron) \wr \mathsf{A}_5(icosahedron)$.

1) Программа считывает порождающие элементы пространственной и локальной групп и печатает сопутствующую информацию:
   ‘`Name`’ – имя файла, содержащего порождающие перестановки,
   ‘`Number of points`’ – число точек множества X или V (размерность перестановочного представления) и т.д.

```
Space G(X) group:
  Name = "A5_on_icosahedron"
  Number of points = 12
  Comment="Action of A_5 on 12 vertices of icosahedron"
  Size = "60"
  Number of generators = 2
Local F(V) group:
  Name = "S4_on_octahedron"
  Number of points = 6
  Comment="Action of S_4 on 6 vertices of octahedron"
  Size = "24"
  Number of generators = 2
```

2) Программа из порождающих элементов пространственной и локальной групп строит порождающие элементы сплетения и

[6] Вершины этих многогранников соответствуют базисным элементам пространств перестановочных представлений локальных групп.

записывает их в отдельный файл. Этот шаг предназначен для исследования сплетений другими средствами и может быть пропущен, поскольку не требуется для дальнейших вычислений.

```
Whole F(V).wr.G(X) group:
  Name = "S4_on_octahedron_wr_A5_on_icosahedron"
  Number of points V^X = 2176782336
  Size = "24^12*60"
  Number of generators = 4
```

3) Программа печатает общий заголовок для вывода дальнейшей информации в формате LaTeX:
Wreath product $\mathsf{S}_4(\mathit{octahedron}) \wr \mathsf{A}_5(\mathit{icosahedron})$
Representation dimension: **2 176 782 336**
4) Программа вычисляет базисные элементы централизаторной алгебры перестановочного представления сплетения. Этот шаг не требуется для вычисления проекторов и может быть пропущен. Если он включен, то вычисляются следующие элементы:
   (а) Ранг представления (размерность централизаторной алгебры).
   (б) Множество длин подорбит. Для группы перестановок подорбитами называются орбиты стабилизатора одной точки переставляемого множества [8]. Подорбиты находятся во взаимно однозначном соответствии с орбиталами. Размеры орбиталов равны длинам подорбит, умноженным на размерность представления. Сумма длин подорбит равна размерности представления и мы используем этот факт для контроля возможных ошибок вычисления выводя значение переменной '`Checksum`'. Мы печатаем только различные длины подорбит, указывая кратности длин в виде верхнего индекса.
   (в) Базисные элементы централизаторной алгебры представления сплетения. Выражения для базисных элементов представляют собой тензорные полиномы от матриц (14). Мы выводим здесь только по три элемента из начала, середины и конца большого массива.

`Rank:` **122 776**
`Number of different suborbit lengths:` 46

`Wreath suborbit lengths:`

$1^{35}, 2^{249}, 3^{11}, 4^{258}, 5^{16}, 6^{403}, 8^{1442}, 16^{1890}, 24^{2418}, 32^{3943}, 48^{43}, 64^{5082},$
$80^{51}, 96^{6482}, 128^{6629}, 256^{8858}, 384^{10735}, 512^{7237}, 768^{67}, 1024^{9901}, 1280^{58},$
$1536^{\underline{\mathbf{12006}}}, 2048^{5611}, 4096^{8209}, 6144^{9603}, 8192^{3093}, 12288^{39}, 16384^{4795},$
$20480^{46}, 24576^{5558}, 32768^{1225}, 65536^{2171}, 98304^{2389}, 131072^{310}, 196608^{15},$
$262144^{674}, 327680^{14}, 393216^{743}, 524288^{77}, 1048576^{146}, 1572864^{177},$
$2097152^{18}, 4194304^{16}, 5242880^{2}, 6291456^{24},$
$\underline{\mathbf{16777216}}^{7}$

`Checksum =`2176782336`Maximum multiplicity =`12006

`Wreath invariant basis forms:`

$$
\begin{aligned}
\widetilde{A}_1 &= A_1^{\otimes 12}\\
\widetilde{A}_2 &= A_1^{\otimes 5} \otimes A_2 \otimes A_1^{\otimes 2} \otimes A_2 \otimes A_1^{\otimes 3}\\
\widetilde{A}_3 &= A_1^{\otimes 4} \otimes A_2^{\otimes 2} \otimes A_1^{\otimes 2} \otimes A_2^{\otimes 2} \otimes A_1^{\otimes 2}\\
&\vdots\\
\widetilde{A}_{61387} &= A_2^{\otimes 3} \otimes A_1 \otimes A_3 \otimes A_1^{\otimes 2} \otimes A_3^{\otimes 2} \otimes A_2^{\otimes 2} \otimes A_3\\
&\quad + A_2 \otimes A_1 \otimes A_2^{\otimes 2} \otimes A_1 \otimes A_3 \otimes A_1 \otimes A_2 \otimes A_3^{\otimes 3} \otimes A_2\\
&\quad + A_1 \otimes A_2^{\otimes 2} \otimes A_3^{\otimes 3} \otimes A_2 \otimes A_1 \otimes A_3 \otimes A_1 \otimes A_2^{\otimes 2}\\
&\quad + A_1 \otimes A_3^{\otimes 2} \otimes A_2^{\otimes 2} \otimes A_3 \otimes A_2^{\otimes 2} \otimes A_1 \otimes A_3 \otimes A_1 \otimes A_2\\
\widetilde{A}_{61388} &= A_2 \otimes A_1 \otimes A_2^{\otimes 2} \otimes A_1 \otimes A_3 \otimes A_1 \otimes A_2^{\otimes 2} \otimes A_3^{\otimes 3}\\
&\quad + A_2^{\otimes 2} \otimes A_3 \otimes A_1 \otimes A_2 \otimes A_1^{\otimes 2} \otimes A_3^{\otimes 2} \otimes A_2^{\otimes 2} \otimes A_3\\
&\quad + A_1 \otimes A_3^{\otimes 2} \otimes A_2^{\otimes 2} \otimes A_3 \otimes A_2^{\otimes 2} \otimes A_1 \otimes A_2 \otimes A_1 \otimes A_3\\
&\quad + A_1 \otimes A_2 \otimes A_3^{\otimes 3} \otimes A_2^{\otimes 2} \otimes A_1 \otimes A_3 \otimes A_1 \otimes A_2^{\otimes 2}\\
\widetilde{A}_{61389} &= A_2 \otimes A_1 \otimes A_2^{\otimes 2} \otimes A_1 \otimes A_3 \otimes A_2^{\otimes 3} \otimes A_3^{\otimes 3}\\
&\quad + A_2^{\otimes 2} \otimes A_3 \otimes A_2^{\otimes 2} \otimes A_1^{\otimes 2} \otimes A_3^{\otimes 2} \otimes A_2^{\otimes 2} \otimes A_3\\
&\quad + A_1 \otimes A_3^{\otimes 2} \otimes A_2^{\otimes 2} \otimes A_3 \otimes A_2^{\otimes 2} \otimes A_1 \otimes A_2^{\otimes 2} \otimes A_3\\
&\quad + A_2^{\otimes 2} \otimes A_3^{\otimes 3} \otimes A_2^{\otimes 2} \otimes A_1 \otimes A_3 \otimes A_1 \otimes A_2^{\otimes 2}\\
&\vdots\\
\widetilde{A}_{122774} &= A_3^{\otimes 2} \otimes A_2 \otimes A_3^{\otimes 9} + A_3^{\otimes 3} \otimes A_2 \otimes A_3^{\otimes 8} + A_3^{\otimes 10} \otimes A_2 \otimes A_3\\
&\quad + A_3^{\otimes 11} \otimes A_2
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_{122775} =& A_3^{\otimes 4}\otimes A_2\otimes A_3^{\otimes 7}+A_3^{\otimes 5}\otimes A_2\otimes A_3^{\otimes 6}+A_3^{\otimes 8}\otimes A_2\otimes A_3^{\otimes 3}\\ &+A_3^{\otimes 9}\otimes A_2\otimes A_3^{\otimes 2}\\ \widetilde{A}_{122776} =& A_2\otimes A_3^{\otimes 11}+A_3\otimes A_2\otimes A_3^{\otimes 10}+A_3^{\otimes 6}\otimes A_2\otimes A_3^{\otimes 5}+A_3^{\otimes 7}\otimes A_2\otimes A_3^{\otimes 4}\end{aligned}$$

5) Основная часть программы вычисляет полное множество неприводимых ортогональных проекторов (13). Приведенный ниже вывод содержит следующее.
   (а) Информация о том, содержит ли разложение на неприводимые подпредставления нетривиальные кратности.
   (б) Полное число примитивных ортогональных идемпотентов.
   (в) Число различных неприводимых размерностей.
   (г) Полный список неприводимых размерностей. Верхние индексы представляют числа проекторов соответствующей размерности. Сумма всех размерностей должна совпадать с размерностью представления сплетения, что проверяется прямым вычислением величины '`Checksum`'.
   (д) Несколько выражений для неприводимых проекторов представления сплетения. Эти выражения представляют собой тензорные полиномы от матриц локальных проекторов (15).

`Wreath product decomposition is multiplicity free`
`Number of irreducible components:` 122 776
`Number of different dimensions:` 134
`Irreducible dimensions:`

$1, 4^{6}, 6^{3}, 8^{6}, 9^{3}, 12^{15}, 16^{32}, 18^{7}, 20, 24^{70}, 32^{41}, 36^{86}, 45, 48^{191}, 54^{26}, 64^{84},$
$72^{298}, 80^{4}, 81^{7}, 96^{412}, 108^{223}, 128^{114}, 144^{913}, 162^{54}, 180^{8}, 192^{704},$
$216^{926}, 243^{4}, 256^{104}, 288^{1804}, 320^{7}, 324^{504}, 384^{772}, 405^{4}, 432^{2517}, 486^{99},$
$512^{76}, 576^{2508}, 648^{1909}, 720^{17}, 729^{9}, 768^{705}, 864^{4303}, 972^{818}, 1024^{51},$
$1152^{2562}, 1280^{3}, 1296^{4455}, 1458^{141}, 1536^{479}, 1620^{16}, 1728^{5322}, 1944^{2712},$
$2048^{20}, 2187^{4}, 2304^{1935}, 2592^{6708}, 2880^{14}, 2916^{961}, 3072^{223}, 3456^{4575},$
$3645^{7}, 3888^{5495}, 4096^{4}, 4374^{136}, 4608^{1004}, 5120, 5184^{6924}, 5832^{2754},$
$6144^{59}, 6480^{18}, 6561^{9}, 6912^{2719}, 7776^{\underline{\mathbf{6966}}}, 8192^{3}, 8748^{822}, 9216^{329},$
$10368^{4760}, 11520^{10}, 11664^{4695}, 12288^{19}, 13122^{98}, 13824^{1011},$

$14580^{13}, 15552^{5781}, 17496^{1999}, 18432^{83}, 19683^{3}, 20736^{2085}, 23328^{4826},$
$25920^{16}, 26244^{511}, 27648^{260}, 31104^{2964},$
$32805^{3}, 34992^{2775}, 36864^{5}, 39366^{55}, 41472^{534}, 46080, 46656^{3012}, 52488^{1023},$
$55296^{15}, 58320^{19}, 59049^{5}, 62208^{877}, 69984^{2173}, 78732^{242}, 82944^{48},$
$93312^{1038}, 103680^{4}, 104976^{1079}, 118098^{27}, 124416^{102}, 131220^{8},$
$139968^{905}, 157464^{355}, 186624^{130}, 209952^{568}, 233280^{7}, 236196^{84}, 279936^{148},$
$295245, 314928^{254}, 354294^{6}, 419904^{116}, 472392^{79}, 524880^{3}, 531441,$
$629856^{62}, 708588^{15}, 944784^{26}, 1180980,$
$\underline{\mathbf{1417176}}^{9}$

`Checksum=`2176782336 `Maximum number of equal dimensions` = 6966

`Wreath irreducible projectors:`

$$
\begin{aligned}
\widetilde{B}_1 &= B_1^{\otimes 12}\\
\widetilde{B}_2 &= B_1^{\otimes 3} \otimes B_2 \otimes B_1^{\otimes 6} \otimes B_2 \otimes B_1\\
\widetilde{B}_3 &= B_1^{\otimes 9} \otimes B_2 \otimes B_1^{\otimes 2} + B_1^{\otimes 4} \otimes B_2 \otimes B_1^{\otimes 7}\\
&\vdots\\
\widetilde{B}_{61387} &= B_2 \otimes B_3 \otimes B_1 \otimes B_2^{\otimes 2} \otimes B_1^{\otimes 3} \otimes B_3^{\otimes 2} \otimes B_2 \otimes B_3\\
&+ B_3 \otimes B_2 \otimes B_1 \otimes B_2 \otimes B_1 \otimes B_3 \otimes B_1 \otimes B_2 \otimes B_3 \otimes B_1 \otimes B_3 \otimes B_2\\
&+ B_1^{\otimes 2} \otimes B_3 \otimes B_2 \otimes B_3^{\otimes 2} \otimes B_2 \otimes B_3 \otimes B_1 \otimes B_2^{\otimes 2} \otimes B_1\\
&+ B_1 \otimes B_2^{\otimes 2} \otimes B_3 \otimes B_1 \otimes B_3^{\otimes 2} \otimes B_2 \otimes B_3 \otimes B_1 \otimes B_2 \otimes B_1\\
\widetilde{B}_{61388} &= B_2^{\otimes 2} \otimes B_3 \otimes B_1^{\otimes 2} \otimes B_3 \otimes B_1 \otimes B_2 \otimes B_3 \otimes B_2^{\otimes 2} \otimes B_3\\
&+ B_1 \otimes B_2 \otimes B_3 \otimes B_2^{\otimes 2} \otimes B_3 \otimes B_2^{\otimes 2} \otimes B_3 \otimes B_1^{\otimes 2} \otimes B_3\\
\widetilde{B}_{61389} &= B_1^{\otimes 2} \otimes B_2^{\otimes 3} \otimes B_1 \otimes B_2 \otimes B_3 \otimes B_2 \otimes B_1 \otimes B_3^{\otimes 2}\\
&+ B_2 \otimes B_1 \otimes B_2 \otimes B_3 \otimes B_2 \otimes B_1 \otimes B_3 \otimes B_2 \otimes B_1^{\otimes 2} \otimes B_2 \otimes B_3\\
&+ B_1 \otimes B_3 \otimes B_2 \otimes B_1^{\otimes 3} \otimes B_3 \otimes B_2^{\otimes 3} \otimes B_3 \otimes B_2\\
&+ B_3 \otimes B_2 \otimes B_3 \otimes B_2 \otimes B_1^{\otimes 2} \otimes B_2 \otimes B_1^{\otimes 2} \otimes B_2 \otimes B_3 \otimes B_2\\
&+ B_2 \otimes B_3^{\otimes 3} \otimes B_1 \otimes B_2 \otimes B_1^{\otimes 3} \otimes B_2^{\otimes 3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ B_3 \otimes B_2^{\otimes 2} \otimes B_3 \otimes B_2^{\otimes 2} \otimes B_1 \otimes B_3 \otimes B_1^{\otimes 3} \otimes B_2\\
&\vdots\\
\widetilde{B}_{122774} &= B_3^{\otimes 2} \otimes B_2 \otimes B_3^{\otimes 9} + B_3^{\otimes 3} \otimes B_2 \otimes B_3^{\otimes 8} + B_3^{\otimes 10} \otimes B_2 \otimes B_3\\
&+ B_3^{\otimes 11} \otimes B_2\\
\widetilde{B}_{122775} &= B_3^{\otimes 2} \otimes B_2 \otimes B_3 \otimes B_2 \otimes B_3^{\otimes 7} + B_3^{\otimes 2} \otimes B_2 \otimes B_3^{\otimes 2} \otimes B_2 \otimes B_3^{\otimes 6}\\
&+ B_3^{\otimes 3} \otimes B_2 \otimes B_3^{\otimes 4} \otimes B_2 \otimes B_3^{\otimes 3} + B_3^{\otimes 5} \otimes B_2 \otimes B_3^{\otimes 4} \otimes B_2 \otimes B_3\\
&+ B_3^{\otimes 8} \otimes B_2 \otimes B_3^{\otimes 2} \otimes B_2 + B_3^{\otimes 9} \otimes B_2 \otimes B_3 \otimes B_2\\
\widetilde{B}_{122776} &= B_3^{\otimes 3} \otimes B_2^{\otimes 2} \otimes B_3^{\otimes 7} + B_2 \otimes B_3^{\otimes 4} \otimes B_2 \otimes B_3^{\otimes 6}\\
&+ B_3 \otimes B_2 \otimes B_3^{\otimes 3} \otimes B_2 \otimes B_3^{\otimes 6} + B_3^{\otimes 6} \otimes B_2 \otimes B_3 \otimes B_2 \otimes B_3^{\otimes 3}\\
&+ B_3^{\otimes 7} \otimes B_2^{\otimes 2} \otimes B_3^{\otimes 3} + B_3^{\otimes 9} \otimes B_2^{\otimes 2} \otimes B_3
\end{aligned}
$$

```
 Time: 0.58 sec
Maximum number of tensor monomials: 531441
```

§7. Замечания о моделировании составных квантовых систем

Одной из основных наших целей была разработка средств изучения моделей составных квантовых систем. Операторы проектирования, получаемые нашей программой предполагается использовать для вычислений в таких моделях. Эти операторы представляют собой матрицы огромных размерностей (например, четыре квадриллиона в примере из Приложения B). Очевидно, явное вычисление таких матриц невозможно и не нужно. Представление проекторов для сплетений в виде тензорных полиномов позволяет свести вычисление квантовых корреляций к последовательности вычислений с маленькими матрицами локальных проекторов. Рассмотрим, например, основную процедуру в формализме квантовой механики – вычисление скалярного произведения. Пусть $|1\rangle, \ldots, |M\rangle$ – ортонормальный базис в локальном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда ортонормальный базис в гильбертовом пространстве сплетения $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^{\otimes N}$ образуют элементы вида

$$|m_1\rangle \otimes \cdots \otimes |m_N\rangle, \quad m = [m_1, \ldots, m_N] \in \overline{M}^N,$$

где $M = |V|, N = |X|$. Векторы общего вида в гильбертовом пространстве сплетения можно записать следующим образом:

$$\widetilde{\Phi} = \sum_{m\in V^X} \varphi_m |m_1\rangle \otimes \cdots \otimes |m_N\rangle \ \text{ и } \ \widetilde{\Psi} = \sum_{n\in V^X} \psi_n |n_1\rangle \otimes \cdots \otimes |n_N\rangle,$$

где φ_m и ψ_n – произвольные скаляры из базового поля $\mathcal{F}$[7]. Скалярное произведение этих векторов в инвариантном подпространстве, определяемом проектором (13) имеет вид

$$\left\langle \widetilde{\Phi} \middle| \widetilde{B}_k \middle| \widetilde{\Psi} \right\rangle = \sum_{m\in V^X} \sum_{n\in V^X} \sum_{\ell\in kG} \overline{\varphi}_m \psi_n A_{m,n,\ell},$$

где

$$A_{m,n,\ell} = \langle m_1| \otimes \cdots \otimes \langle m_N| B_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes B_{\ell_N} |n_1\rangle \otimes \cdots \otimes |n_N\rangle \tag{17}$$

$$= \langle m_1| B_{\ell_1} |n_1\rangle \cdots \langle m_N| B_{\ell_N} |n_N\rangle \ . \tag{18}$$

Последнее выражение (18), полученное применением тождества (12) к (17), представляет собой просто произведение N скаляров.

Анализ всевозможных сценариев вычислений, которые могут возникнуть в конструктивных моделях многокомпонентных квантовых систем, показывает, что вычисления могут включать длинные циклы суммирования вида $\sum_{m\in\overline{M}^{\overline{N}}}$, короткие циклы суммирования $\sum_{\ell\in kG}$, а также циклы умножения длины N. Величины, обрабатываемые внутри циклов, можно вычислить предварительно и собрать в таблицы небольших размеров. Этими величинами являются скаляры

$$\langle p |B_r| q\rangle \equiv (B_r)_{pq} \ \text{ и } \ \mathrm{tr}(B_r |p\rangle \langle q| B_r) \equiv \overline{\langle p |B_r| q\rangle} \equiv (B_r)_{qp},$$

считываемые непосредственно из явных выражений для матриц локальных проекторов, и $M\times M$ матрицы вида $B_r |p\rangle \langle q| B_s$, образующие таблицу размера L^2M^2, где $p, q \in \{1, \dots, M\}$ и $r, s \in \{1, \dots, L\}$.

A. Сплетение $\mathsf{A}_5(icosahedron) \wr \mathsf{A}_5(icosahedron)$

```
Local F(V) group:
  Name = "A5_on_icosahedron"
  Number of points = 12
  Comment = "Action of A_5 on 12 vertices of icosahedron"
  Number of generators = 2
```

[7] Можно ограничиться натуральными φ_m и ψ_n, если придерживаться идеологии подхода, предложенного в [3, 4].

```
Space G(X) group:
  Name = "A5_on_icosahedron"
  Number of points = 12
  Comment = "Action of A_5 on 12 vertices of icosahedron"
  Number of generators = 2
Whole group F(V).wr.G(X)
  Number of points V^X = 8916100448256
```

Wreath product $\mathsf{A}_5(\mathit{icosahedron}) \wr \mathsf{A}_5(\mathit{icosahedron})$
`Representation dimension:` **8 916 100 448 256**
`Rank:` **3 875 157**
`Wreath product decomposition is multiplicity free`
`Number of irreducible components:` 3 875 157
`Number of different dimensions:` 261
`Irreducible dimensions:`

$1, 6^{6}, 9^{6}, 10^{3}, 18^{28}, 25^{3}, 30^{29}, 36^{16}, 45^{2}, 50^{6}, 54^{176}, 60^{16}, 81^{29}, 90^{248}, 100^{4},$
$108^{81}, 125, 125, 150^{115}, 162^{715}, 180^{122}, 225^{30}, 243^{15}, 250^{21}, 270^{1361}, 300^{62},$
$324^{475}, 405^{16}, 450^{941}, 486^{2401}, 500^{10}, 540^{1005}, 625^{7}, 675^{14}, 729^{71}, 750^{293},$
$810^{5584}, 900^{743}, 972^{1791}, 1125^{16}, 1250^{31}, 1350^{5254}, 1458^{6178}, 1500^{246},$
$1620^{4615}, 1875^{4}, 2025^{111}, 2187^{42}, 2250^{2441}, 2430^{17059}, 2500^{25}, 2700^{4607},$
$2916^{4071}, 3125^{4}, 3645^{47}, 3750^{547}, 4050^{19890}, 4374^{11761}, 4500^{2254}, 4860^{12862},$
$5625^{54}, 6075^{63}, 6250^{50}, 6561^{128}, 6750^{12386}, 7290^{37925}, 7500^{546}, 8100^{16086},$
$8748^{7733}, 10125^{66}, 11250^{4247}, 12150^{52986}, 12500^{53}, 13122^{16751}, 13500^{10685},$
$14580^{27576}, 15625^{9}, 16875^{34}, 18225^{259}, 18750^{786}, 19683^{61}, 20250^{40875},$
$21870^{62340}, 22500^{3861}, 24300^{41325}, 26244^{10200}, 28125^{32}, 31250^{61}, 32805^{51},$
$33750^{18678}, 36450^{101494}, 37500^{742}, 39366^{17904}, 40500^{34194}, 43740^{41406},$
$46875^{4}, 50625^{187}, 54675^{118}, 56250^{5024}, 59049^{91}, 60750^{93760}, 62500^{50},$
$65610^{74687}, 67500^{16874}, 72900^{71901}, 78125^{7}, 78732^{9419}, 91125^{103}, 93750^{731},$
$101250^{53180}, 109350^{138609}, 112500^{4992}, 118098^{13935}, 121500^{71716},$
$131220^{42937}, 140625^{64}, 151875^{101}, 156250^{45}, 164025^{227}, 168750^{18946},$
$177147^{46}, 182250^{148591}, 187500^{814}, 196830^{64140}, 202500^{44570},$
$218700^{85846}, 236196^{5558}, 253125^{72}, 281250^{4058}, 295245^{55}, 303750^{100768},$
$312500^{57}, 328050^{132909}, 337500^{17918}, 354294^{7569}, 364500^{100099}, 390625^{9},$
$393660^{28803}, 421875^{30}, 455625^{223}, 468750^{487}, 492075^{117},$

$506250^{44563}, 531441^{35}, 546750^{\underline{\mathbf{162353}}}, 562500^{4467},$
$590490^{38051}, 607500^{75302}, 656100^{64773}, 703125^{26}, 708588^{2079}, 781250^{19}, 820125^{136},$
$843750^{12709}, 911250^{127883}, 937500^{642}, 984150^{87505}, 1012500^{37970}, 1062882^{2545},$
$1093500^{86513}, 1171875^{3}, 1180980^{11554}, 1265625^{103}, 1366875^{136}, 1406250^{2224},$
$1476225^{94}, 1518750^{67801}, 1562500^{37}, 1594323^{11}, 1640250^{120077}, 1687500^{12838},$
$1771470^{14025}, 1822500^{76014}, 1953125^{3}, 1968300^{28555}, 2125764^{258}, 2278125^{121},$
$2343750^{212}, 2531250^{24163}, 2657205^{16}, 2733750^{108068}, 2812500^{2782}, 2952450^{35413},$
$3037500^{46259}, 3188646^{403}, 3280500^{42505}, 3515625^{26}, 3542940^{1796}, 3796875^{71},$
$3906250^{9}, 4100625^{115}, 4218750^{5748}, 4428675^{43}, 4556250^{66794}, 4687500^{346},$
$4920750^{53856}, 5062500^{19542}, 5314410^{2418}, 5467500^{42675}, 5904900^{5082}, 6328125^{66},$
$7031250^{839}, 7381125^{51}, 7593750^{28831}, 7812500^{16}, 8201250^{54394}, 8437500^{5668},$
$8857350^{6482}, 9112500^{30331}, 9765625^{5}, 9841500^{8743}, 10546875^{18}, 11390625^{75},$
$11718750^{83}, 12301875^{67}, 12656250^{8656}, 13668750^{38539}, 14062500^{1040},$
$14762250^{10735}, 15187500^{15435}, 16402500^{9901}, 17578125^{16}, 19531250^{4}, 20503125^{58},$
$21093750^{1717}, 22781250^{19527}, 23437500^{102}, 24603750^{12006}, 25312500^{5605},$
$27337500^{8134}, 31640625^{31}, 34171875^{39}, 35156250^{245}, 37968750^{7111}, 39062500^{3},$
$41006250^{9603}, 42187500^{1419}, 45562500^{4795}, 48828125, 56953125^{46}, 58593750^{26},$
$63281250^{1800}, 68343750^{5558}, 70312500^{215}, 75937500^{2140}, 87890625^{10}, 94921875^{15},$
$105468750^{336}, 113906250^{2389}, 117187500^{20}, 126562500^{674}, 158203125^{14},$
$175781250^{42}, 189843750^{743}, 195312500^{3}, 210937500^{136}, 244140625, 316406250^{177},$
$351562500^{16}, 439453125^{2}, 527343750^{24}, \underline{\mathbf{585937500}}^{6}$

`Checksum =8916100448256Maximum number of equal dimensions =162353`

`Wreath irreducible projectors:`

$$\widetilde{B}_1 = B_{\mathbf{1}}^{\otimes 12}$$
$$\widetilde{B}_2 = B_{\mathbf{1}}^{\otimes 11} \otimes B_{\mathbf{3'}} + B_{\mathbf{1}}^{\otimes 2} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{1}}^{\otimes 9}$$
$$\widetilde{B}_3 = B_{\mathbf{1}}^{\otimes 9} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{1}}^{\otimes 2} + B_{\mathbf{1}}^{\otimes 4} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{1}}^{\otimes 7}$$
$$\vdots$$
$$\widetilde{B}_{1937578} = B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{3'}}^{\otimes 2} \otimes B_{\mathbf{3}}^{\otimes 2} \otimes B_{\mathbf{1}}^{\otimes 3} \otimes B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{5}}$$

$$
\begin{aligned}
&+ B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{1}} \otimes B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{1}} \otimes B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{1}} \otimes B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{3'}} \\
&+ B_{\mathbf{1}}^{\otimes 2} \otimes B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{5}}^{\otimes 2} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{1}} \otimes B_{\mathbf{3}}^{\otimes 2} \otimes B_{\mathbf{3'}} \\
&+ B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{1}} \otimes B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{1}} \otimes B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{1}} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{3}} \\
\widetilde{B}_{1937579} &= B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{1}} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{5}}^{\otimes 2} \otimes B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{1}} \otimes B_{\mathbf{3}}^{\otimes 2} \otimes B_{\mathbf{1}} \otimes B_{\mathbf{3'}} \\
&+ B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{1}} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{1}} \otimes B_{\mathbf{3}}^{\otimes 2} \otimes B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{5}}^{\otimes 2} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{1}} \\
&+ B_{\mathbf{3}}^{\otimes 2} \otimes B_{\mathbf{1}} \otimes B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{5}}^{\otimes 2} \otimes B_{\mathbf{1}} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{1}} \\
&+ B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{1}} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{1}} \otimes B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{3}}^{\otimes 3} \otimes B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{1}} \\
\widetilde{B}_{1937580} &= B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{3'}}^{\otimes 2} \otimes B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{5}}^{\otimes 2} \otimes B_{\mathbf{1}}^{\otimes 3} \otimes B_{\mathbf{3'}}^{\otimes 2} \otimes B_{\mathbf{5}} \\
&+ B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{1}} \otimes B_{\mathbf{3'}}^{\otimes 2} \otimes B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{1}} \otimes B_{\mathbf{3}}^{\otimes 2} \otimes B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{1}} \otimes B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{3'}} \\
&+ B_{\mathbf{3}}^{\otimes 2} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{1}} \otimes B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{1}}^{\otimes 2} \otimes B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{3'}}^{\otimes 2} \\
&+ B_{\mathbf{1}}^{\otimes 2} \otimes B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{3'}}^{\otimes 2} \otimes B_{\mathbf{1}} \otimes B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{5}}^{\otimes 2} \otimes B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{3'}} \\
&\vdots \\
\widetilde{B}_{3875155} &= B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{5}}^{\otimes 11} + B_{\mathbf{5}} \otimes B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{5}}^{\otimes 10} + B_{\mathbf{5}}^{\otimes 6} \otimes B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{5}}^{\otimes 5} + B_{\mathbf{5}}^{\otimes 7} \otimes B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{5}}^{\otimes 4} \\
\widetilde{B}_{3875156} &= B_{\mathbf{5}}^{\otimes 4} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{5}}^{\otimes 7} + B_{\mathbf{5}}^{\otimes 5} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{5}}^{\otimes 6} + B_{\mathbf{5}}^{\otimes 8} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{5}}^{\otimes 3} \\
&+ B_{\mathbf{5}}^{\otimes 9} \otimes B_{\mathbf{3'}} \otimes B_{\mathbf{5}}^{\otimes 2} \\
\widetilde{B}_{3875157} &= B_{\mathbf{5}}^{\otimes 4} \otimes B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{5}}^{\otimes 7} + B_{\mathbf{5}}^{\otimes 5} \otimes B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{5}}^{\otimes 6} + B_{\mathbf{5}}^{\otimes 8} \otimes B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{5}}^{\otimes 3} \\
&+ B_{\mathbf{5}}^{\otimes 9} \otimes B_{\mathbf{3}} \otimes B_{\mathbf{5}}^{\otimes 2}
\end{aligned}
$$

```
 Time: 7.35 sec
Maximum number of tensor monomials: 16777216
```

B. Сплетение $\mathsf{A}_5(\textit{dodecahedron}) \wr \mathsf{A}_5(\textit{icosahedron})$

```
Space G(X) group:
  Name = "A5_on_icosahedron"
  Number of points = 12
  Comment = "Action of A_5 on 12 vertices of icosahedron"
  Number of generators = 2
Local F(V) group:
  Name = "A5_on_dodecahedron"
  Number of points = 20
  Comment = "Action of A_5 on 20 vertices of dodecahedron"
  Number of generators = 2
```

```
Whole group F(V).wr.G(X)
  Number of points V^X = 4096000000000000
```

Wreath product $\mathsf{A}_5(\mathit{dodecahedron}) \wr \mathsf{A}_5(\mathit{icosahedron})$
`Representation dimension:` **4 096 000 000 000 000**
`Rank:` $>$ **502 985 717**
`Wreath product decomposition has non-trivial multiplicities`
`Number of irreducible components:` 502 985 717
`Number of different dimensions:` 1065

Wreath irreducible dimensions:

$1, 6^{6}, 8^{6}, 9^{6}, 10^{3}, 16^{6}, 18^{28}, 24^{58}, 25^{3}, 30^{29}, 32^{26}, 36^{16}, 40^{28}, 45^{2}, 48^{32}, 50^{6}, 54^{176}, 60^{16},$
$64^{16}, 72^{496}, 80^{18}, 81^{29}, 90^{248}, 96^{462}, 100^{4}, 108^{81}, 120^{464}, 125, 128^{154}, 144^{304}, 150^{115},$
$160^{224}, 162^{715}, 180^{122}, 192^{248}, 200^{110}, 216^{2722}, 225^{30}, 240^{248}, 243^{15}, 250^{21}, 256^{110},$
$270^{1361}, 288^{3785}, 300^{62}, 320^{122}, 324^{475}, 360^{3806}, 384^{2356}, 400^{92}, 405^{16}, 432^{2038}, 450^{941},$
$480^{3542}, 486^{2401}, 500^{10}, 512^{527}, 540^{1005}, 576^{3024}, 600^{1770}, 625^{7}, 640^{1077}, 648^{11168}, 675^{14},$
$720^{3108}, 729^{71}, 750^{293}, 768^{2033}, 800^{799}, 810^{5584}, 864^{20938}, 900^{743}, 960^{3072}, 972^{1791},$
$1000^{270}, 1024^{475}, 1080^{20860}, 1125^{16}, 1152^{19478}, 1200^{1546}, 1250^{31}, 1280^{1021}, 1296^{9452},$
$1350^{5254}, 1440^{29109}, 1458^{6178}, 1500^{246}, 1536^{8896}, 1600^{743}, 1620^{4615}, 1728^{18611},$
$1800^{14656}, 1875^{4}, 1920^{17753}, 1944^{34118}, 2000^{262}, 2025^{111}, 2048^{1599}, 2160^{18794}, 2187^{42},$
$2250^{2441}, 2304^{18718}, 2400^{13473}, 2430^{17059}, 2500^{25}, 2560^{3973}, 2592^{79305}, 2700^{4607},$
$2880^{28241}, 2916^{4071}, 3000^{4498}, 3072^{9102}, 3125^{4}, 3200^{4061}, 3240^{79050}, 3456^{98271},$
$3600^{14182}, 3645^{47}, 3750^{547}, 3840^{18680}, 3888^{25850}, 4000^{2035}, 4050^{19890}, 4096^{1862},$
$4320^{146427}, 4374^{11761}, 4500^{2254}, 4608^{67546}, 4800^{13918}, 4860^{12862}, 5000^{498}, 5120^{4615},$
$5184^{64971}, 5400^{73762}, 5625^{54}, 5760^{134130}, 5832^{75850}, 6000^{4512}, 6075^{63}, 6144^{24553}, 6250^{50},$
$6400^{4718}, 6480^{65730}, 6561^{128}, 6750^{12386}, 6912^{87200}, 7200^{101354}, 7290^{37925}, 7500^{546},$
$7680^{60623}, 7776^{211457}, 8000^{2254}, 8100^{16086}, 8192^{3681}, 8640^{132244}, 8748^{7733}, 9000^{34050},$
$9216^{64775}, 9600^{61343}, 9720^{210970}, 10000^{600}, 10125^{66}, 10240^{10900}, 10368^{325643}, 10800^{65674},$
$11250^{4247}, 11520^{132493}, 11664^{55670}, 12000^{30869}, 12150^{52986}, 12288^{25620}, 12500^{53},$
$12800^{13755}, 12960^{486745}, 13122^{16751}, 13500^{10685}, 13824^{297804}, 14400^{98703}, 14580^{27576},$
$15000^{7738}, 15360^{65690}, 15552^{165906}, 15625^{9}, 16000^{9287}, 16200^{244562},$
$16384^{4071}, 16875^{34}, 17280^{593064}, 17496^{124680}, 18000^{32496}, 18225^{259}, 18432^{161038},$
$18750^{786}, 19200^{65759}, 19440^{166512}, 19683^{61}, 20000^{3457}, 20250^{40875}, 20480^{12909},$
$20736^{276903}, 21600^{447386}, 21870^{62340}, 22500^{3861}, 23040^{400715}, 23328^{406051}, 24000^{32444},$
$24300^{41325}, 24576^{47625}, 25000^{706}, 25600^{16086}, 25920^{416881}, 26244^{10200},$
$27000^{149764}, 27648^{274788}, 28125^{32}, 28800^{403796}, 29160^{406126}, 30000^{7894}, 30720^{142162},$

$31104^{750091}, 31250^{61}, 32000^{10751}, 32400^{208186}, 32768^{5918}, 32805^{51}, 33750^{18678},$
$34560^{554952}, 34992^{83048}, 36000^{202948}, 36450^{101494}, 36864^{164366}, 37500^{742}, 38400^{179614},$
$38880^{1124601}, 39366^{17904}, 40000^{3861}, 40500^{34194}, 40960^{20565}, 41472^{854954},$
$43200^{414849}, 43740^{41406}, 45000^{50662}, 46080^{414690}, 46656^{288332}, 46875^{4}, 48000^{120583},$
$48600^{563758}, 49152^{54166}, 50000^{774}, 50625^{187}, 51200^{31440}, 51840^{1710211}, 52488^{149374},$
$54000^{136866}, 54675^{118}, 55296^{614245}, 56250^{5024}, 57600^{414924}, 58320^{289266}, 59049^{91},$
$60000^{45147}, 60750^{93760}, 61440^{165074}, 62208^{575809}, 62500^{50}, 64000^{26454}, 64800^{1287994},$
$65536^{7861}, 65610^{74687}, 67500^{16874}, 69120^{1535930}, 69984^{554598}, 72000^{205307},$
$72900^{71901}, 73728^{270282}, 75000^{8934}, 76800^{206296}, 77760^{865073}, 78125^{7}, 78732^{9419},$
$80000^{13217}, 81000^{429630}, 81920^{27576}, 82944^{717039}, 86400^{1546389}, 87480^{554760},$
$90000^{51008}, 91125^{103}, 92160^{812739}, 93312^{1190449}, 93750^{731}, 96000^{136558}, 97200^{431670},$
$98304^{66506}, 100000^{3906}, 101250^{53180}, 102400^{41584}, 103680^{1439847}, 104976^{86328},$
$108000^{775331}, 109350^{138609}, 110592^{574256}, 112500^{4992}, 115200^{1025313}, 116640^{1786794},$
$118098^{13935}, 120000^{50564}, 121500^{71716}, 122880^{233841}, 124416^{1621022}, 125000^{640},$
$128000^{34194}, 129600^{1075771}, 131072^{6983}, 131220^{42937}, 135000^{192800}, 138240^{1440766},$
$139968^{343805}, 140625^{64}, 144000^{687461}, 145800^{894820}, 147456^{287858}, 150000^{9952},$
$151875^{101}, 153600^{356064}, 155520^{3245986}, 156250^{45}, 157464^{128280}, 160000^{17061},$
$162000^{357854}, 163840^{28443}, 164025^{227}, 165888^{1448241}, 168750^{18946}, 172800^{1435780},$
$174960^{344226}, 177147^{46}, 180000^{256662}, 182250^{148591}, 184320^{868476}, 186624^{803313},$
$187500^{814}, 192000^{298846}, 194400^{2443172}, 196608^{82839}, 196830^{64140}, 200000^{4992},$
$202500^{44570}, 204800^{50820}, 207360^{3627642}, 209952^{531798}, 216000^{714548}, 218700^{85846},$
$221184^{845001}, 225000^{50554}, 230400^{1080491}, 233280^{1205592}, 236196^{5558}, 240000^{148963},$
$243000^{813564}, 245760^{291072}, 248832^{1206385}, 250000^{878}, 253125^{72}, 256000^{51454},$
$259200^{3648432}, 262144^{10200}, 262440^{531960}, 270000^{178476}, 276480^{2544301}, 279936^{1299878},$
$281250^{4058}, 288000^{717158}, 291600^{602252}, 294912^{309482}, 295245^{55}, 300000^{43868},$
$303750^{100768}, 307200^{434592}, 311040^{2416815}, 312500^{57}, 314928^{57840}, 320000^{31875},$
$324000^{1826898}, 327680^{41457}, 328050^{132909}, 331776^{1212712}, 337500^{17918}, 345600^{3207291},$
$349920^{1950259}, 354294^{7569}, 360000^{267757}, 364500^{100099}, 368640^{1090888}, 373248^{2056065},$
$375000^{7076}, 384000^{360148}, 388800^{1807850}, 390625^{9}, 393216^{64686}, 393660^{28803},$
$400000^{12488}, 405000^{453872}, 409600^{71901}, 414720^{3034614}, 419904^{259869}, 421875^{30},$
$432000^{2146211}, 437400^{976582}, 442368^{814684}, 450000^{53842}, 455625^{223}, 460800^{1657517},$
$466560^{4116760}, 468750^{487}, 472392^{76102}, 480000^{179461}, 486000^{601634}, 491520^{261791},$

$492075^{117}, 497664^{2195224}, 500000^{2966}, 506250^{44563}, 512000^{71819}, 518400^{3026107},$
$524288^{6006}, 524880^{260918}, 531441^{35}, 540000^{801208}, 546750^{162353}, 552960^{2448301},$
$559872^{694569}, 562500^{4467}, 576000^{1389162}, 583200^{3096480}, 589824^{352565}, 590490^{38051},$
$600000^{53922}, 607500^{75302}, 614400^{466890}, 622080^{5496313}, 625000^{408}, 629856^{349757},$
$640000^{44570}, 648000^{1509021}, 655360^{27292}, 656100^{64773}, 663552^{1592989}, 675000^{157494},$
$691200^{3047711}, 699840^{1043492}, 703125^{26}, 708588^{2079}, 720000^{691645}, 729000^{1031562},$
$737280^{1234971}, 746496^{1220160}, 750000^{9050}, 768000^{470576}, 777600^{5523396}, 781250^{19},$
$786432^{87888}, 787320^{349494}, 800000^{17990}, 810000^{378178}, 819200^{55831}, 820125^{136},$
$829440^{4792035}, 839808^{959522}, 843750^{12709}, 864000^{2025886}, 874800^{520610}, 884736^{775021},$
$900000^{203689}, 911250^{127883}, 921600^{1844591}, 933120^{2447390}, 937500^{642}, 944784^{23296},$
$960000^{292418}, 972000^{2764903}, 983040^{352678}, 984150^{87505}, 995328^{1478726}, 1000000^{4467},$
$1012500^{37970}, 1024000^{65713}, 1036800^{6032958}, 1048576^{9510}, 1049760^{1437781}, 1062882^{2545},$
$1080000^{759927}, 1093500^{86513}, 1105920^{2722657}, 1119744^{1731416}, 1125000^{32702},$
$1152000^{1531216}, 1166400^{1828400}, 1171875^{3}, 1179648^{241419}, 1180980^{11554}, 1200000^{114306},$
$1215000^{687448}, 1228800^{614278}, 1244160^{3703870}, 1250000^{668}, 1259712^{114382},$
$1265625^{103}, 1280000^{48848}, 1296000^{4034901}, 1310720^{42937}, 1312200^{720340}, 1327104^{1249261},$
$1350000^{152714}, 1366875^{136}, 1382400^{4126454}, 1399680^{3461302}, 1406250^{2224}, 1417176^{28050},$
$1440000^{766521}, 1458000^{608922}, 1474560^{972615}, 1476225^{94}, 1492992^{2151062}, 1500000^{27244},$
$1518750^{67801}, 1536000^{612386}, 1555200^{3689895}, 1562500^{37}, 1572864^{43598}, 1574640^{114544},$
$1594323^{11}, 1600000^{23711}, 1620000^{1505808}, 1638400^{86073}, 1640250^{120077}, 1658880^{3760628},$
$1679616^{341176}, 1687500^{12838}, 1728000^{3455873}, 1749600^{2603166}, 1769472^{725216},$
$1771470^{14025}, 1800000^{231023}, 1822500^{76014}, 1843200^{1725731}, 1866240^{5378072}, 1875000^{3636},$
$1889568^{141582}, 1920000^{383076}, 1944000^{1839614}, 1953125^{3}, 1966080^{197300}, 1968300^{28555},$
$1990656^{1870972}, 2000000^{7483}, 2025000^{297116}, 2048000^{100099}, 2073600^{4676058},$
$2097152^{3443}, 2099520^{511914}, 2125764^{258}, 2160000^{1720571}, 2187000^{868272}, 2211840^{2548001},$
$2239488^{682308}, 2250000^{39050}, 2278125^{121}, 2304000^{1738396}, 2332800^{5400345}, 2343750^{212},$
$2359296^{272499}, 2361960^{141512}, 2400000^{154366}, 2430000^{460790}, 2457600^{401923},$
$2488320^{5613976}, 2500000^{1468}, 2519424^{430011}, 2531250^{24163}, 2560000^{75525}, 2592000^{3108388},$
$2621440^{17382}, 2624400^{255610}, 2654208^{1135812}, 2657205^{16}, 2700000^{508229}, 2733750^{108068},$
$2764800^{3801338}, 2799360^{1366236}, 2812500^{2782}, 2834352^{3678}, 2880000^{1080447},$
$2916000^{2704433}, 2949120^{1098484}, 2952450^{35413}, 2985984^{964715}, 3000000^{39118},$
$3037500^{46259}, 3072000^{473209}, 3110400^{7056963}, 3125000^{166}, 3145728^{59594}, 3149280^{644073},$

$3188646^{403}, 3200000^{37970}, 3240000^{1165800}, 3276800^{39790}, 3280500^{42505}, 3317760^{3975238},$
$3359232^{870399}, 3375000^{82584}, 3456000^{3155199}, 3499200^{1020498}, 3515625^{26}, 3538944^{469659},$
$3542940^{1796}, 3600000^{423776}, 3645000^{673884}, 3686400^{1911866}, 3732480^{2412120}, 3750000^{5640},$
$3779136^{20533}, 3796875^{71}, 3840000^{352478}, 3888000^{4717749}, 3906250^{9}, 3932160^{271232},$
$3936600^{322594}, 3981312^{980510}, 4000000^{12941}, 4050000^{234574}, 4096000^{53870}, 4100625^{115},$
$4147200^{6008365}, 4194304^{5558}, 4199040^{1739254}, 4218750^{5748}, 4251528^{4836},$
$4320000^{1579101}, 4374000^{339738}, 4423680^{1881710}, 4428675^{43}, 4478976^{1235622}, 4500000^{102261},$
$4556250^{66794}, 4608000^{1906378}, 4665600^{2400011}, 4687500^{346}, 4718592^{125578}, 4723920^{20840},$
$4800000^{171789}, 4860000^{1764226}, 4915200^{540569}, 4920750^{53856}, 4976640^{2947318},$
$5000000^{2782}, 5038848^{70870}, 5062500^{19542}, 5120000^{46527}, 5184000^{5027465}, 5242880^{28858},$
$5248800^{1306496}, 5308416^{715686}, 5314410^{2418}, 5400000^{475815}, 5467500^{42675}, 5529600^{3328028},$
$5598720^{3086132}, 5625000^{14086}, 5668704^{25935}, 5760000^{1192568}, 5832000^{1196475},$
$5898240^{565331}, 5904900^{5082}, 5971968^{1254353}, 6000000^{54733}, 6075000^{349960}, 6144000^{628954},$
$6220800^{3660242}, 6250000^{372}, 6291456^{19219}, 6298560^{106641}, 6328125^{66}, 6400000^{27098},$
$6480000^{2507432}, 6553600^{64773}, 6561000^{436022}, 6635520^{2513881}, 6718464^{161119},$
$6750000^{79790}, 6912000^{3346986}, 6998400^{3093836}, 7031250^{839}, 7077888^{363180}, 7085880^{25942},$
$7200000^{480967}, 7290000^{300584}, 7372800^{1147089}, 7381125^{51}, 7464960^{3758580},$
$7500000^{11134}, 7558272^{85417}, 7593750^{28831}, 7680000^{473410}, 7776000^{2431160},$
$7812500^{16}, 7864320^{95764}, 7873200^{53244}, 7962624^{913343}, 8000000^{10576}, 8100000^{745457},$
$8192000^{86649}, 8201250^{54394}, 8294400^{3745945}, 8388608^{1242}, 8398080^{325310}, 8437500^{5668},$
$8640000^{2084585}, 8748000^{1548935}, 8847360^{1461092}, 8857350^{6482}, 8957952^{262221}, 9000000^{120990},$
$9112500^{30331}, 9216000^{1348752}, 9331200^{4712690}, 9375000^{1338}, 9437184^{120788}, 9447840^{127665},$
$9600000^{239002}, 9720000^{913449}, 9765625^{5}, 9830400^{219781}, 9841500^{8743}, 9953280^{3190211},$
$10000000^{2812}, 10077696^{190757}, 10125000^{122678}, 10240000^{76014}, 10368000^{3106657},$
$10485760^{6727}, 10497600^{242590}, 10546875^{18}, 10616832^{472213}, 10800000^{822998},$
$10935000^{386852}, 11059200^{2538667}, 11197440^{658522}, 11250000^{17382}, 11390625^{75},$
$11520000^{1006451}, 11664000^{3148293}, 11718750^{83}, 11796480^{548443}, 11809800^{63966},$
$11943936^{310815}, 12000000^{80787}, 12150000^{183864}, 12288000^{296786}, 12301875^{67},$
$12441600^{4805346}, 12500000^{465}, 12582912^{23440}, 12597120^{380077}, 12656250^{8656},$
$12800000^{46380}, 12960000^{1555461}, 13107200^{17440}, 13122000^{80630}, 13271040^{1886656},$
$13436928^{304330}, 13500000^{201819}, 13668750^{38539}, 13824000^{2527216}, 13996800^{656694},$
$14062500^{1040}, 14155776^{168621}, 14400000^{493987}, 14580000^{1179614}, 14745600^{1089604},$

$14762250^{10735}, 14929920^{939032}, 15000000^{17342}, 15187500^{15435}, 15360000^{257839},$
$15552000^{4014991}, 15625000^{60}, 15728640^{118800}, 15746400^{285012}, 15925248^{275364},$
$16000000^{19542}, 16200000^{468701}, 16384000^{26749}, 16402500^{9901}, 16588800^{3318974},$
$16777216^{2114}, 16796160^{757590}, 16875000^{28234}, 17280000^{1582211}, 17496000^{326383},$
$17578125^{16}, 17694720^{756042}, 17915904^{353069}, 18000000^{160062}, 18225000^{235356},$
$18432000^{1265618}, 18662400^{1168065}, 18750000^{2146}, 18874368^{38464}, 19200000^{150820},$
$19440000^{2006732}, 19531250^{4}, 19660800^{265426}, 19683000^{95488}, 19906560^{967666},$
$20000000^{5734}, 20250000^{78588}, 20480000^{26619}, 20503125^{58}, 20736000^{3329462},$
$20971520^{11554}, 20995200^{757076}, 21093750^{1717}, 21233664^{175858}, 21600000^{637572},$
$21870000^{81492}, 22118400^{1521969}, 22394880^{1055377}, 22500000^{33261}, 22781250^{19527},$
$23040000^{953388}, 23328000^{776179}, 23437500^{102}, 23592960^{191584}, 23887872^{299718},$
$24000000^{60347}, 24300000^{600182}, 24576000^{352534}, 24603750^{12006}, 24883200^{1444125},$
$25000000^{1040}, 25165824^{4780}, 25312500^{5605}, 25600000^{17962}, 25920000^{2077641},$
$26214400^{28649}, 26244000^{379532}, 26542080^{708447}, 27000000^{160451}, 27337500^{8134},$
$27648000^{1781381}, 27993600^{1318102}, 28125000^{4058}, 28311552^{78419}, 28800000^{481707},$
$29160000^{289847}, 29491200^{434462}, 29859840^{1044268}, 30000000^{16420}, 30375000^{99722},$
$30720000^{310616}, 31104000^{1197497}, 31250000^{118}, 31457280^{26037}, 31640625^{31},$
$31850496^{185855}, 32000000^{8532}, 32400000^{826338}, 32768000^{42505}, 32805000^{95426},$
$33177600^{1231398}, 33554432^{249}, 33750000^{22930}, 34171875^{39}, 34560000^{1331885},$
$34992000^{880041}, 35156250^{245}, 35389440^{356732}, 36000000^{162520}, 36450000^{58266},$
$36864000^{582467}, 37324800^{1565610}, 37500000^{2911}, 37748736^{22836}, 37968750^{7111},$
$38400000^{189312}, 38880000^{598341}, 39062500^{3}, 39321600^{66350}, 39813120^{739579},$
$40000000^{2812}, 40500000^{204849}, 40960000^{42790}, 41006250^{9603}, 41472000^{1227312},$
$41943040^{1442}, 42187500^{1419}, 42467328^{82979}, 43200000^{659566}, 43740000^{331018},$
$44236800^{710845}, 45000000^{34904}, 45562500^{4795}, 46080000^{506735}, 46656000^{1306015},$
$46875000^{352}, 47185920^{117116}, 48000000^{80362}, 48600000^{179793}, 48828125, 49152000^{100725},$
$49766400^{1292947}, 50000000^{612}, 50331648^{4169}, 50625000^{29116}, 51200000^{30331},$
$51840000^{766945}, 52428800^{3943}, 53084160^{369887}, 54000000^{216979}, 54675000^{66592},$
$55296000^{826913}, 56250000^{4374}, 56623104^{25220}, 56953125^{46}, 57600000^{299802},$
$58320000^{654428}, 58593750^{26}, 58982400^{262259}, 60000000^{23176}, 60750000^{30168},$
$61440000^{100395}, 62208000^{1293746}, 62500000^{113}, 62914560^{23108}, 63281250^{1800},$
$64000000^{15510}, 64800000^{309333}, 65536000^{6629}, 66355200^{738138}, 67108864^{258},$

$675000000^{45916}, 68343750^{5558}, 69120000^{622560}, 70312500^{215}, 70778880^{124948},$
$72000000^{122092}, 72900000^{197059}, 73728000^{349565}, 75000000^{4326}, 75497472^{4592},$
$75937500^{2140}, 76800000^{68852}, 77760000^{809278}, 78125000^{20}, 78643200^{57153},$
$80000000^{5605}, 81000000^{77792}, 81920000^{7237}, 82944000^{860577}, 83886080^{1812},$
$84375000^{5706}, 86400000^{314183}, 87890625^{10}, 88473600^{280142}, 90000000^{34176},$
$91125000^{33086}, 92160000^{307336}, 93750000^{436}, 94371840^{25166}, 94921875^{15},$
$96000000^{33498}, 97200000^{324258}, 98304000^{85010}, 100000000^{1450}, 100663296^{403},$
$101250000^{11270}, 102400000^{5611}, 103680000^{645128}, 104857600^{5082}, 105468750^{336},$
$108000000^{106129}, 110592000^{373155}, 112500000^{6267}, 113906250^{2389}, 115200000^{187416},$
$117187500^{20}, 117964800^{62940}, 120000000^{11510}, 121500000^{81345}, 122880000^{85417},$
$125000000^{215}, 125829120^{2418}, 126562500^{674}, 128000000^{3093}, 129600000^{322517},$
$131072000^{8794}, 135000000^{22838}, 138240000^{325641}, 140625000^{746}, 144000000^{79265},$
$147456000^{94454}, 150000000^{2714}, 151875000^{11756}, 153600000^{60662}, 156250000^{30},$
$157286400^{6482}, 158203125^{14}, 160000000^{1225}, 162000000^{107765}, 163840000^{9901},$
$168750000^{2864}, 172800000^{194970}, 175781250^{42}, 180000000^{23056}, 184320000^{94314},$
$187500000^{485}, 189843750^{743}, 192000000^{30909}, 195312500^{3}, 196608000^{10735},$
$200000000^{310}, 202500000^{23309}, 204800000^{8192}, 210937500^{136}, 216000000^{81056},$
$225000000^{4243}, 230400000^{65856}, 234375000^{64}, 240000000^{11210}, 244140625,$
$245760000^{12006}, 250000000^{77}, 253125000^{2968}, 256000000^{4795}, 270000000^{23320},$
$281250000^{454}, 288000000^{32868}, 300000000^{2853}, 307200000^{9603}, 312500000^{18},$
$316406250^{177}, 320000000^{2186}, 337500000^{4427}, 351562500^{16}, 360000000^{11772},$
$375000000^{430}, 384000000^{5558}, 400000000^{674}, 421875000^{522}, 439453125^{2},$
$450000000^{2980}, 468750000^{40}, 480000000^{2389}, 500000000^{150}, 527343750^{24},$
$562500000^{518}, 585937500^{6}, 600000000^{743}, 625000000^{16}, 703125000^{48},$
$750000000^{177}, 781250000^{8}, 937500000^{24}$

`Checksum =` 4096000000000000
`Maximum number of equal dimensions =` 7056963
Wreath irreducible projectors:

$$\widetilde{B}_1 = B_1^{\otimes 12}$$
$$\widetilde{B}_2 = B_1^{\otimes 8} \otimes B_2 \otimes B_1^{\otimes 3} + B_1^{\otimes 5} \otimes B_2 \otimes B_1^{\otimes 6}$$
$$\widetilde{B}_3 = B_1^{\otimes 11} \otimes B_2 + B_1^{\otimes 2} \otimes B_2 \otimes B_1^{\otimes 9}$$
$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{B}_{251492858} &= B_5 \otimes B_2 \otimes B_3 \otimes B_6 \otimes B_5^{\otimes 2} \otimes B_2 \otimes B_3 \otimes B_1 \otimes B_2^{\otimes 2} \otimes B_6 \\
&+ B_2 \otimes B_3 \otimes B_6 \otimes B_2^{\otimes 2} \otimes B_1 \otimes B_5 \otimes B_2 \otimes B_5^{\otimes 2} \otimes B_6 \otimes B_3 \\
\widetilde{B}_{251492859} &= B_1 \otimes B_6 \otimes B_1 \otimes B_3^{\otimes 2} \otimes B_5 \otimes B_6 \otimes B_4 \otimes B_2 \otimes B_3 \otimes B_4 \otimes B_3 \\
&+ B_4 \otimes B_6 \otimes B_3 \otimes B_1 \otimes B_6 \otimes B_3^{\otimes 2} \otimes B_1 \otimes B_5 \otimes B_2 \otimes B_4 \otimes B_3 \\
&+ B_6 \otimes B_4 \otimes B_1^{\otimes 2} \otimes B_5 \otimes B_3 \otimes B_4 \otimes B_3 \otimes B_2 \otimes B_6 \otimes B_3^{\otimes 2} \\
&+ B_3 \otimes B_1 \otimes B_3 \otimes B_4 \otimes B_2 \otimes B_5 \otimes B_4 \otimes B_6 \otimes B_3 \otimes B_6 \otimes B_1 \otimes B_3 \\
&+ B_6 \otimes B_4 \otimes B_3 \otimes B_4 \otimes B_3 \otimes B_2 \otimes B_1 \otimes B_6 \otimes B_5 \otimes B_3^{\otimes 2} \otimes B_1 \\
&+ B_4 \otimes B_3^{\otimes 3} \otimes B_6 \otimes B_2 \otimes B_6 \otimes B_4 \otimes B_3 \otimes B_5 \otimes B_1^{\otimes 2} \\
\widetilde{B}_{251492860} &= B_1 \otimes B_3 \otimes B_1 \otimes B_3 \otimes B_5 \otimes B_2 \otimes B_4 \otimes B_3 \otimes B_2 \otimes B_6^{\otimes 2} \otimes B_5 \\
&+ B_5 \otimes B_1 \otimes B_3^{\otimes 2} \otimes B_2^{\otimes 2} \otimes B_6 \otimes B_4 \otimes B_6 \otimes B_3 \otimes B_1 \otimes B_5 \\
&+ B_3 \otimes B_6 \otimes B_1^{\otimes 2} \otimes B_2 \otimes B_6 \otimes B_3 \otimes B_5 \otimes B_2 \otimes B_4 \otimes B_5 \otimes B_3 \\
&+ B_6 \otimes B_4 \otimes B_5 \otimes B_1 \otimes B_3 \otimes B_6 \otimes B_5 \otimes B_1 \otimes B_2^{\otimes 2} \otimes B_3^{\otimes 2} \\
&+ B_4 \otimes B_3 \otimes B_5 \otimes B_6^{\otimes 2} \otimes B_2 \otimes B_1 \otimes B_3 \otimes B_2 \otimes B_5 \otimes B_3 \otimes B_1 \\
&+ B_3 \otimes B_5 \otimes B_3 \otimes B_5 \otimes B_4 \otimes B_2 \otimes B_3 \otimes B_6^{\otimes 2} \otimes B_2 \otimes B_1^{\otimes 2} \\
&\vdots \\
\widetilde{B}_{502985715} &= B_4 \otimes B_6 \otimes B_5 \otimes B_6^{\otimes 9} + B_6^{\otimes 2} \otimes B_5 \otimes B_4 \otimes B_6^{\otimes 8} \\
&+ B_6^{\otimes 3} \otimes B_5 \otimes B_6^{\otimes 3} \otimes B_4 \otimes B_6^{\otimes 4} \\
&+ B_6 \otimes B_4 \otimes B_6^{\otimes 8} \otimes B_5 \otimes B_6 + B_6^{\otimes 6} \otimes B_4 \otimes B_6^{\otimes 4} \otimes B_5 \\
&+ B_6^{\otimes 10} \otimes B_4 \otimes B_5 \\
\widetilde{B}_{502985716} &= B_6^{\otimes 3} \otimes B_5 \otimes B_6 \otimes B_4 \otimes B_6^{\otimes 6} + B_6^{\otimes 4} \otimes B_4 \otimes B_6 \otimes B_5 \otimes B_6^{\otimes 5} \\
&+ B_6^{\otimes 5} \otimes B_4 \otimes B_6 \otimes B_5 \otimes B_6^{\otimes 4} \\
&+ B_6 \otimes B_5 \otimes B_6^{\otimes 6} \otimes B_4 \otimes B_6^{\otimes 3} \\
&+ B_5 \otimes B_6^{\otimes 8} \otimes B_4 \otimes B_6^{\otimes 2} + B_6^{\otimes 8} \otimes B_4 \otimes B_6 \otimes B_5 \otimes B_6 \\
\widetilde{B}_{502985717} &= B_6^{\otimes 3} \otimes B_4 \otimes B_6 \otimes B_4 \otimes B_6^{\otimes 6} + B_6^{\otimes 4} \otimes B_4 \otimes B_6 \otimes B_4 \otimes B_6^{\otimes 5} \\
&+ B_6^{\otimes 5} \otimes B_4 \otimes B_6 \otimes B_4 \otimes B_6^{\otimes 4} + B_6 \otimes B_4 \otimes B_6^{\otimes 6} \otimes B_4 \otimes B_6^{\otimes 3} \\
&+ B_4 \otimes B_6^{\otimes 8} \otimes B_4 \otimes B_6^{\otimes 2} + B_6^{\otimes 8} \otimes B_4 \otimes B_6 \otimes B_4 \otimes B_6
\end{aligned}$$

```
Time: 26 min 46.16 sec
Maximum number of tensor monomials: 2176782336
```

Благодарности. Я благодарен Ю. А. Блинкову, В. П. Гердту и Н. Н. Васильеву за обсуждение работы и ценные советы.

Список литературы

1. M. Van Raamsdonk, *Building up spacetime from quantum entanglement.* — Gen. Relativ. Grav. **42** (2010), 2323–2329.
2. C. Cao, S. M. Carroll and S. Michalakis, *Space from Hilbert space: Recovering geometry from bulk entanglement.* — Phys. Rev. D **95** (2017), 024031.
3. V. V. Kornyak, *Modeling quantum behavior in the framework of permutation groups.* — `https://doi.org/10.1051/epjconf/201817301007` `EPJ` Web of Conferences **173** (2018), 01007.
4. V. V. Kornyak, *Quantum models based on finite groups.* — `http://stacks.iop.org/1742-6596/965/i=1/a=012023` `J` Phys.: Conf. Ser. **965** (2018), 012023.
5. J. D. P. Meldrum, *Wreath Products of Groups and Semigroups.* Longman/Wiley, New York (1995).
6. G. D. James, A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 16, Addison-Wesley, Reading (1981).
7. М. Холл, *Теория групп.* М., Изд-во иностр. лит. (1962).
8. P. J. Cameron, *Permutation Groups.* Cambridge University Press, Cambridge (1999).
9. Eiichi Bannai, Tatsuro Ito, *Algebraic Combinatorics I: Association Schemes.* The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc. Menlo Park, CA (1984).
10. Н. Н. Васильеву, *Splitting permutation representations of finite groups by polynomial algebra methods.* In: Gerdt V. P. et al. (Eds.): CASC 2018, LNCS **11077**. pp. 304–318. Cham, Springer, (2018).
11. В. В. Корняк, *Алгоритм разложения представлений конечных групп с помощью инвариантных проекторов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **468**, (2018).
12. N. Jacobson, *Structure of Rings.* Vol. 37. Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1956).
13. L. H. Rowen, *Ring Theory.* Academic Press, Inc., Boston (1991).
14. R. Wilson *et al.*, `http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3` *Atlas of finite group representations..*
15. W.-H. Steeb, *Matrix Calculus and the Kronecker Product with Applications and C++ Programs.* — River Edge, NJ, USA: World Scientific Publishing Co., Inc., (1997).

Kornyak V. V. An algorithm for constructing irreducible decompositions of permutation representations of wreath products of finite groups.

We describe an algorithm for decomposing permutation representations of wreath products of finite groups into irreducible components. The algorithm is based on the construction of a complete set of mutually orthogonal projection operators into irreducible invariant subspaces of the Hilbert space of the representation under consideration. In constructive models of quantum mechanics, the invariant subspaces of representations of wreath products describe the states of multicomponent quantum systems. The proposed algorithm uses methods of computer algebra and computational group theory. The C implementation of the algorithm is capable of constructing irreducible decompositions of representations of wreath products of high dimensions and ranks. Examples of calculations are given.

Лаборатория информационных технологий,
Объединенный институт ядерных исследований,
ул. Жолио-Кюри 6,
141980 Дубна, Россия
E-mail: vkornyak@gmail.com

Поступило 10 октября 2019 г.