Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 484, 2019 г.

А. Цыбышев

МОТИВНЫЙ АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ СЕГАЛА ДЛЯ ПАР (АНОНС)

§1. Введение

Напомним, что Воеводский в [13, раздел 2] для произвольного поля k построил категорию фрейм-соответствий $Fr_*(k)$, чьи объекты – это объекты категории Sm/k, а множество морфизмов $Fr_*(X,Y) = \sqcup_{n\geqslant 0} Fr_n(X,Y)$ определено как множество наборов некоторых геометрических данных. Там же предпучки с фрейм-трансферами определены как предпучки множеств на категории $Fr_*(k)$ и введено понятие пучка Нисневича с фрейм-трансферами. Это такие предпучки с фрейм-трансферами, ограничение которых на категорию Sm/k является пучком Нисневича. Там же доказаны многие базовые свойства как категории $Fr_*(k)$, так и предпучков и пучков Нисневича с фрейм-трансферами.

Отталкиваясь от этих фундаментальных заметок Воеводского, в [1] была построена теория фрейм-мотивов. В частности, в [1] доказано, что для любого бесконечного совершенного поля k и любой k-гладкой схемы X канонический морфизм мотивных пространств $C_*Fr(X) \to \Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}\Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(X_+)$ локально в топологии Нисневича является групповым пополнением (group-completion). А если заменить k-гладкую схему X на k-гладкую симплициальную схему Y такую, что мотивное пространство $C_*Fr(Y)$ локально связно, то канонический морфизм мотивных пространств

$$C_*Fr(Y) \to \Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}\Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(Y_+)$$

локально в топологии Нисневича является слабой эквивалентностью.

Ключевые слова: теория A^1-гомотопий, фрейм-мотивы, распетливание, открытые пары, теорема о конусе.

§2. Формулировка основной теоремы и ее вывод из остальных утверждений

Сперва договоримся о соглашениях и напомним необходимые определения. Эти определения, а также определения прочих упоминаемых фрейм-объектов взяты из [13, раздел 2] и [1].

На протяжении всей статьи, пусть k – бесконечное совершенное поле, и $\mathrm{char}(k) \neq 2$.

Замечание 2.1. Благодаря [4, теорема 1.1], можно избавиться от ограничения на характеристику поля k.

Для читателя, знакомого с общими понятиями и обозначениями теории фрейм-соответствий и желающего сразу прочитать формулировки результатов, игнорируя предварительные построения, приводится список обозначений в данной работе, которые не общеприняты.

Обозначения 2.2. Объект (обычно $\mathbb{B}$ или $\mathbb{T}$), записанный жирным шрифтом для доски, обозначает открытую пару гладких многообразий. В случае $\mathbb{B}$ она означает некоторое $(X, U) \in SmOp(Fr_0(k))$, где $U = X - S$, а в случае $\mathbb{T}$ это фиксированный объект – пара $(\mathbb{A}^1, \mathbb{G}_m)$ (см. определение 2.4, обозначение 2.11).

Объект (обычно B или T), записанный обычным шрифтом, обозначает пунктированный пучок Нисневича, получаемый из соответствующей пары, записанной жирным шрифтом для доски, применением функтора *spc*. В случае B это X/U, а в случае T это привычный пучок $\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$ (см. обозначение 2.9, замечание 2.12).

Функтор $Fr_m(-, \mathbb{B})$ задается геометрически (см. определение 2.7), но, благодаря лемме Воеводского, его можно понимать как $\mathcal{F}r_m(-, B)$ (см. замечание 2.6).

Любое многообразие X понимается также как пара $(X, \varnothing)$. При таком отождествлении, получается $spc(X) = Hom_{Sm}(-, X_+)$ (см. замечание 2.10).

Почти всюду в формулах в скобках стоят не мотивные пространства, а симплициальные пары, объекты $\Delta^{op} SmOp(Fr_0(k))$.

Для данной работы важным объектом является топология Нисневича, которую можно определить как минимальную топологию Гротендика на некоторой категории схем, в которой каждый элементарный квадрат Нисневича представляет собой покрытие.

Обозначения 2.3. В данной работе Nis обозначает топологию Нисневича на категории k-гладких схем (Sm/k).

Имеется два важных соглашения. Пусть $sShv_\bullet(Sm/k)$ – категория симплициальных пучков Нисневича на категории k-гладких схем Sm/k (ее часто называют категорией мотивных пространств). Согласно [5, 2.7] категория $sShv_\bullet(Sm/k)$ снабжена инъективной локальной модельной структурой, в которой корасслоения – это мономорфизмы, а слабые эквивалентности – это локальные слабые эквивалентности. Зафиксируем некоторую функториальную фибрантную замену $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}_f$ в соответствии с *инъективной локальной модельной структурой* на категории $sShv_\bullet(Sm/k)$. И будем пользоваться ею на протяжении всей статьи.

Под мотивной модельной структурой на категории симплициальных пунктированных пучков Нисневича понимается конструкция модельной категории Воеводского–Мореля [10].

Рассмотрим пунктированный пучок Нисневича (не путать с обозначением для открытых пар ниже) $(\mathbb{P}^1, \infty)$. В. Воеводский в [14, раздел 5] определяет мотивные спектры, в частности, $(\mathbb{P}^1, \infty)$-спектры. В работах, таких, как [1] и [2], те же самые объекты называются $\mathbb{P}^1$-спектрами, а пунктированный пучок $(\mathbb{P}^1, \infty)$ обозначается $\mathbb{P}^{\wedge 1}$. В настоящем тексте, во имя внутренней согласованности и следуя изначальному определению Воеводского, используется обозначение $(\mathbb{P}^1, \infty)$. Символом T будем обозначать, как и принято, пунктированный пучок Нисневича $\mathbb{A}^1/(\mathbb{A}^1 - \{0\})$.

Определение 2.4. *$SmOp(Fr_0(k))$ – категория пар $\mathbb{B} = (X, U)$, где X – k-гладкая схема, а U – его открытая подсхема. Морфизмы из (X, U) в (X', U') – фрейм-соответствия уровня 0 из X в X', индуцирующие соответствия из U в U'.*

Формула $(X, U) \wedge (X', U') = (X \times X', (X \times U' \cup U \times X'))$ задает на $SmOp(Fr_0(k))$ структуру симметрической моноидальной категории.

Приведем мотивировку того, почему мы решили уточнить (изменить) ниже одно из базовых обозначений статьи [1]. В [1, определения 2.5, 2.8] для каждой пары $(X, X - S) \in SmOp(Fr_0(k))$, каждого $U \in Sm/k$ и каждого $m \geqslant 0$ определены множества с отмеченной точкой $Fr_m(U, X/(X - S))$, и $Fr(U, X/(X - S))$. Там же проверено, что $Fr(-, X/(X - S))$ – это фрейм-предпучок и даже фрейм-пучок Нисневича.

В [1, определение 5.2.(2)] фрейм-мотив $M_{fr}(X/(X-S))$ пары $(X, X-S) \in SmOp(Fr_0(k))$ определен как некоторый ковариантный функтор на категории $SmOp(Fr_0(k))$ со значениями в категории S^1-спектров в категории $sShv_\bullet(Sm/k)$. Этот функтор на категории $SmOp(Fr_0(k))$ строится с использованием симплициальных пучков вида $Fr(-, X/(X-S))$, однако символ $X/(X-S)$ часто используется для обозначения пунктированного фактор-пучка, а не пары $(X, X-S)$. Чтобы избежать такого смешения в обозначениях мы решили для пары $(X, X-S) \in SmOp(Fr_0(k))$ ввести следующее обозначение.

Обозначение 2.5. Введем новые обозначения:
будем писать $Fr_m(U, (X, X-S))$ вместо $Fr_m(U, X/(X-S))$,
$Fr(U, (X, X-S))$ вместо $Fr(U, X/(X-S))$,
где $Fr_m(U, X/(X-S))$ и $Fr(U, X/(X-S))$ определены в [1, определение 2.5] и [1, определение 2.8] соответственно.

Новые обозначения позволяют определить ковариантный функтор

$$Fr : SmOp(Fr_0(k)) \to Shv_\bullet(Fr_*(k))$$

по правилу $Fr(X, X-S) = Fr(-, (X, X-S))$. Забегая вперед, отметим, что имеется априори другой ковариантный функтор

$$\mathcal{F}r \circ spc : SmOp(Fr_0(k)) \to Shv_\bullet(Fr_*(k)),$$

переводящий пару $(X, X-S)$ в оснащенный пучок $\mathcal{F}r(-, X/(X-S))$. Здесь $X/(X-S)$ – это пунктированный фактор-пучок Нисневича, а для произвольного пунктированного пучка Нисневича $\mathcal{F}$ через $\mathcal{F}r(-, \mathcal{F})$ обозначен фрейм-пучок Нисневича, определенный в [1, определение 3.10].

Замечание 2.6. Подчеркнем, что согласно следствию [1, изоморфизмы (6)] из леммы Воеводского, указанные два функтора

$$Fr,\ (\mathcal{F}r \circ spc) : SmOp(Fr_0(k)) \rightrightarrows Shv_\bullet(Fr_*(k))$$

канонически изомофны. В частности, они имеют одни и те же свойства. Иногда удобно работать с одним из них, иногда с другим. Но оба функтора определены на парах, а именно, определены на категории $SmOp(Fr_0(k))$.

Напомним здесь [1, определения 2.5, 2.8], используя уточненные обозначения из 2.5.

Определение 2.7 ([1, определения 2.5, 2.8])**.** (I) Пусть Y – k-гладкая схема, $S \subset Y$ – замкнутое подмножество, и пусть $U \in Sm/k$. *Явное фрейм-соответствие уровня $m \geqslant 0$ из U в $(Y, Y-S)$* состоит из наборов:

$$(Z, W, \varphi_1, \dots, \varphi_m; g : W \to Y),$$

где Z – замкнутое подмножество в $U \times \mathbb{A}^m$, конечное над U, W – этальная окрестность Z в $U \times \mathbb{A}^m$, $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ – регулярные функции на W, g – регулярное отображение, такое, что $Z = Z(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \cap g^{-1}(S)$. Множество Z называется *носителем* явного фрейм-соответствия. Мы также используем четверки $\Phi = (Z, W, \varphi; g)$ для обозначения явных фрейм-соответствий.

(II) Два явных фрейм-соответствия $(Z, W, \varphi; g)$ и $(Z', W', \varphi'; g')$ уровня m *эквивалентны,* если $Z = Z'$ и существует этальная окрестность W'' Z в $W \times_{\mathbb{A}^m_U} W'$, такая, что $\varphi \circ pr$ совпадает с $\varphi' \circ pr'$ и морфизм $g \circ pr$ совпадает с $g' \circ pr'$ на W''.

(III) *Фрейм-соответствие уровня m из U в $(Y, Y-S)$* – класс эквивалентности явных фрейм-соответствий уровня m из U в $(Y, Y-S)$. Будем обозначать через $Fr_m(U, (Y, Y-S))$ множество фрейм-соответствий уровня m из U в $(Y, Y-S)$. Будем понимать его как пунктированное множество с отмеченной точкой $0_{(Y,Y-S),m}$ явного соответствия $(Z, W, \varphi; g)$ с $W = \varnothing$.

(IV) Если $S = Y$, то пунктированное множество $Fr_m(U, (Y, Y-S))$ совпадает с множеством $Fr_m(U, Y)$ фрейм-соответствий уровня m из U в Y.

(V) Обозначим через

$$\sigma_{(Y,(Y-S))} : Fr_m(U, (Y, (Y-S))) \to Fr_{m+1}(U, (Y, (Y-S)))$$

отображение, переводящее $\Phi = (Z, W, \varphi; g)$ в

$$(Z \times \{0\}, W \times \mathbb{A}^1, \varphi \circ pr_W, pr_{\mathbb{A}^1}; g).$$

Положим $\sigma := \sigma_{(Y,(Y-S))}$ и назовем, как и в [1, определение 2.8], множество

$$Fr(U, (Y, (Y-S))) := \operatorname{colim}[Fr_0(U, (Y, (Y-S))) \xrightarrow{\sigma} Fr_1(U, (Y, (Y-S))) \xrightarrow{\sigma} \dots]$$

множеством стабильных фрейм-соответствий из U в $(Y, (Y-S))$.

Определение 2.8. *Пусть* $Shv_\bullet(Sm/k)$ *– категория пунктированных пучков Нисневича на* Sm/k. *Имеется функтор*

$$spc : SmOp(Fr_0(k)) \to Shv_\bullet(Sm/k),$$

переводящий пару (X, U) *в фактор пучок Нисневича* X/U *с отмеченной точкой* U/U. *Если* $U = \varnothing$, *то по определению* $X/U = X_+$.

Функтор $spc : SmOp(Fr_0(k)) \to Shv_\bullet(Sm/k)$ *индуцирует функтор* $spc : \Delta^{op} SmOp(Fr_0(k)) \to sShv_\bullet(Sm/k)$, *переводящий объект* $[n] \mapsto (Y_n, U_n)$ *в симплициальный пучок Нисневича* $[n] \mapsto (Y_n/U_n)$.

Обозначение 2.9. Для пары, обозначаемой жирным шрифтом для доски, как $\mathbb{B} = (X, U)$, обозначим через ту же букву в обыкновенном шрифте, как B, пунктированный фактор-пучок X/U с отмеченной точкой U/U.

Замечание 2.10. Каждому гладкому многообразию $X \in Fr_0(k)$ естественным образом соответствует пара $(X, \varnothing) \in SmOp(Fr_0(k))$. Пренебрегая обозначениями, будем эту пару также обозначать через X.

Это сопоставление задает вложение моноидальных категорий: $(X \times X', \varnothing) = (X, \varnothing) \wedge (X', \varnothing)$.

При таких обозначениях, $spc(X)$ – пучок X_+ в обычном понимании.

Обозначение 2.11. Пара $(\mathbb{A}^1, \mathbb{G}_m)$ играет особую роль. Обозначим ее через $\mathbb{T}$.

Замечание 2.12. $spc(\mathbb{T})$ – это пучок $T = \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m$, введенный в работе Воеводского и Мореля [10].

Для пучка $U \mapsto \mathcal{F}(U)$ на $Fr_*(k)$ имеется симплициальный пучок $C_*(\mathcal{F})$, равный $U \mapsto \mathcal{F}(\Delta^\bullet \times U)$, где $\Delta^\bullet$ – стандартная косимплициальная схема. Следующее ключевое определение дано в [1, раздел 4].

Определение 2.13. *Для каждой пары* $\mathbb{B} = (X, U) \in SmOp(Fr_0(k))$ *зададим* $(\mathbb{P}^1, \infty)$*-спектр* $M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B})$ *следующим образом*

$$M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B}) = (C_* Fr(-, \mathbb{B}), C_* Fr(-, \mathbb{B} \wedge \mathbb{T}), C_* Fr(-, \mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge 2}) \cdots),$$

где структурные морфизмы – $C_*(\sigma_n)$, *и где* $\sigma_n : Fr(-, \mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^n) \to \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), Fr(-, \mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{n+1}))$ *определены в [1, раздел 4].*

Имеется канонический морфизм $(\mathbb{P}^1, \infty)$-спектров

$$\varkappa : \Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)} B \to M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B}),$$

заданный тождественным морфизмом $\mathrm{id}_{\mathbb{B}} \in Fr_0(\mathbb{B},\mathbb{B})$. Возьмем фибрантную замену $C_*Fr(-,\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^n) \to C_*Fr(-,\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^n)_f$ каждого из мотивных пространств в соответствии с инъективной локальной модельной структурой. Мы тогда получим $(\mathbb{P}^1,\infty)$-спектр

$$M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B})_f = (C_*Fr(-,\mathbb{B})_f, C_*Fr(-,\mathbb{B}\wedge\mathbb{T})_f, C_*Fr(-,\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^2)_f, \ldots).$$

Заметим, что $M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B})_f$ – это фибрантная замена $(\mathbb{P}^1,\infty)$-спектра $M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B})$ в соответствии с поуровневой инъективной локальной модельной структурой на категории $(\mathbb{P}^1,\infty)$-спектров. Пусть

$$\varkappa_f : \Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}B \to M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B}) \to M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B})_f$$

– композиция морфизмов.

Чтобы сформулировать третий пункт нижеследующей теоремы, напомним еще одно определение. Для $(\mathbb{P},\infty)$-спектра E пусть $\mathcal{E}$ – это Ω-спектр, мотивно стабильно эквивалентный E. Обозначение $\Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(E)$ означает мотивное пространство $\mathcal{E}_0$ (нулевое пространство $(\mathbb{P},\infty)$-спектра $\mathcal{E}$). Если $E = \Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}\mathcal{X}$ – $(\mathbb{P}^1,\infty)$-надстроечный спектр пунктированного мотивного пространства $\mathcal{X}$, то мы будем писать $\Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}\Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathcal{X})$ вместо $\Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(E)$.

Теорема 2.14 ([1, теорема 4.1])**.** *Пусть X – гладкая k-схема, S – замкнутая подсхема в X, не содержащая целиком компонент связности X. Рассмотрим пару $\mathbb{B} = (X, X-S) \in SmOp(Fr_0(k))$ и соответствующее ей мотивное пространство $B = X/(X-S) \in Shv_\bullet(Sm/k)$. Верно следующее:*

(1) *Морфизм $\varkappa_f : \Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(B) \to M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B})_f$ – стабильная мотивная эквивалентность $(\mathbb{P}^1,\infty)$-спектров.*

(2) *$(\mathbb{P}^1,\infty)$-спектр $M_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(\mathbb{B})_f$ – мотивно фибрантный Ω-спектр. Это означает, что для каждого целого $n \geqslant 0$ каждое мотивное пространство $C_*(Fr(-,\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^n))_f$ мотивно фибрантно в мотивной модельной категории Воеводского–Мореля [10] симплициальных пучков Нисневича, и структурный морфизм*

$$C_*(Fr(-,\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^n))_f \to \Omega_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(C_*(Fr(-,\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n+1}))_f)$$

– посхемная слабая эквивалентность.

(3) *Канонический морфизм симплициальных пучков Нисневича*

$$C_*Fr(-,(X,X-S))_f \to \Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}\Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(X/(X-S))$$

является посхемной гомотопической эквивалентентностью. В частности, для любого расширения полей конечной степени трансцендентности K/k, канонический морфизм симплициальных множеств

$$C_*Fr(Spec(K),(X,X-S)) \to \Omega^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}\Sigma^\infty_{(\mathbb{P}^1,\infty)}(X/(X-S))(Spec(K))$$

является слабой эквивалентностью.

Кроме того, имеет место следующее предложение.

Предложение 2.15. *Пусть $r > 0$ и $(X, X-S) \in SmOp(Fr_0(k))$ – такая пара, что $codim_{X_i}(S \cap X_i) > r$ в каждой связной (или, что то же самое для k-гладкой схемы, неприводимой) компоненте $X_i \subseteq X$. Тогда симплициальный пучок $C_*Fr(-,(X,X-S))$ локально r-связен в топологии Нисневича.*

Часть (1) теоремы 2.14 доказана в [1, подраздел 9.2], даже в большей общности. Часть (3) является прямым следствием частей (1) и (2). Часть (2) требует доказательства в нашем случае и является одним из основных результатов данной статьи.

Доказательство этой теоремы использует теорию оснащенных мотивов, введенную и разработанную в [1]. Согласно [1, определение 5.2.(2)] функтор оснащенного мотива – это функтор

$$M_{fr} : \Delta^{op}SmOp(Fr_0(k)) \to Sp_{S^1}(k),$$

где $Sp_{S^1}(k)$ – категория S^1-спектров над категорией пучков Нисневича пунктированных множеств на Sm/k. Напомним, что оснащенный мотив $M_{fr}(\mathbb{B})$ пары $\mathbb{B} = (X,U) \in SmOp(Fr_0(k))$ – это S^1-спектр Сегала

$$M_{fr}(\mathbb{B}) = (C_*Fr(-,\mathbb{B}), C_*Fr(-,\mathbb{B}\otimes S^1), C_*Fr(-,\mathbb{B}\otimes S^2), \ldots),$$

отвечающий Γ-пространству $K \mapsto C_*Fr(-,\mathbb{B}\otimes K) = Fr(\Delta^\bullet \times -, \mathbb{B}\otimes K)$. Внутренний смысл оснащенного мотива $M_{fr}(\mathbb{B})$ пары $\mathbb{B} = (X,U) \in SmOp(Fr_0(k))$ состоит в том, что в мотивной категории $SH_{S^1}(k)$ имеется канонический изоморфизм $\Omega^\infty_{\mathbb{G}}\Sigma^\infty_{\mathbb{G}}\Sigma^\infty_{S^1}(B) \to M_{fr}(\mathbb{B})$ (см. [1, введение]).

Доказательство теоремы 2.14 опирается на теорию оснащенных мотивов и содержательные moving леммы. Последние не вошли в данную статью и будут опубликованы позже.

Замечание 2.16. В ходе доказательства потребуются следующие категории, функторы и естественные преобразования функторов, введенные в [1]: симметрические моноидальные категории $SmOp(Fr_0(k))$, $\Delta^{\mathrm{op}}SmOp(Fr_0(k))$, функтор

$$SmOp(Fr_0(k)) \to \Delta^{\mathrm{op}}SmOp(Fr_0(k)),$$

переводящий (X, U) в $X//U$ и его обобщения, взятые из [1, раздел 5] и [1, раздел 8].

Определение 2.17. *Для любого морфизма $f : Y \to Z$ в $Fr_0(k)$ обозначим через $Z//_f Y$ симплициальный объект в категории $Fr_0(k)$, являющийся копределом в $\Delta^{op}Fr_0(k)$ диаграммы*

$$Z \xleftarrow{f} Y \hookrightarrow Y \otimes I.$$

Здесь для пунктированного множества $(K, *)$ объект $Y \otimes K \in Fr_0(k)$ понимается как в [1, раздел 8]. *Для пунктированного симплициального множества A_*, $Y \otimes A_*$ понимается как симплициальный объект $(Y \otimes A)_n = Y \otimes A_n$ (определение взято из* [1, раздел 8].)

Замечание 2.18. Для любых $Y, Z \in Fr_0(k)$ имеем: $Z//_f Y$ – симплициальная гладкая схема над k.

Замечание 2.19. Имеется естественный по паре

$$\mathbb{B} := (X, U) \in SmOp(Fr_0(k))$$

морфизм $\alpha_{\mathbb{B}} : X//U \to (X, U) = \mathbb{B}$ в постоянный симплициальный объект $[n] \mapsto (X, U) = \mathbb{B}$ в категории $\Delta^{\mathrm{op}}SmOp(Fr_0(k))$; конструкция $\alpha_{\mathbb{B}}$ дана во введении к [2], где он обозначен α.

Определение 2.20. *Если $X \in Sm/k$ и $x \in X$ – k-рациональная точка, то мы пишем $X^{\wedge 1}$ вместо $X//x$. В частности, мы пишем $\mathbb{G}_m^{\wedge 1}$ вместо $\mathbb{G}_m//1$.*

Рассматривая $\Delta^{op}Fr_0(k)$ как полную покатегорию в симметрической моноидальной категории $\Delta^{op}SmOp(Fr_0(k))$, мы можем взять n-ю моноидальную степень $X//x$ для каждого $n > 0$. Мы будем обозначать ее $X^{\wedge n}$. Примером является $\mathbb{G}_m^{\wedge n}$.

В ходе доказательства потребуются утверждения четырех типов:

(1) доказанные ранее утверждения;
(2) утверждения, у которых доказательство переносится с имеющегося случая с несущественными изменениями;

(3) локальная связность пространств вида $C_*Fr(-,(X,X-S))$;
(4) морфизм $\alpha_{(X,U)} : X//U \to (X,U)$ в категории $\Delta^{\mathrm{op}}SmOp(Fr_0(k))$ из замечания 2.19 индуцирует стабильную локальную эквивалентность
$$M_{fr}(\alpha_{(X,U)}) : M_{fr}(X//U) \to M_{fr}(X,U)$$
в категории $Sp_{S^1}(k)$.

Утверждения третьего и четвертого типов составляют основную сложность в доказательстве теоремы 2.14. Они не вошли в настоящую статью. Следующую конструкцию можно найти в [1, раздел 8].

Ниже приведены утверждения из групп (2)–(4) и некоторые утверждения из группы (1).

2.1. Группа 1 – Доказанное ранее.

Определение 2.21 ([1, определение 5.2.(1)]). *Оснащенный мотив $\mathcal{M}_{fr}(\mathcal{G})$ пунктированного симплициального пучка Нисневича $\mathcal{G}$ – это S^1-спектр Сегала $(C_*\mathcal{F}r(-,\mathcal{G}), C_*\mathcal{F}r(-,\mathcal{G}\wedge S^1), C_*\mathcal{F}r(-,\mathcal{G}\wedge S^2),\ldots)$, ассоциированный с Γ-пространством $K \in \Gamma^{op} \mapsto C_*\mathcal{F}r(-,\mathcal{G}\wedge K) = \mathcal{F}r(\Delta^\bullet_+ \wedge -, \mathcal{G}\wedge K)$.*

Замечание 2.22. Оснащенный мотив $M_{fr}(\mathbb{B}_\bullet)$ симплициальной пары $\mathbb{B}_\bullet \in \Delta^{op}SmOp(Fr_0(k))$ равен оснащенному мотиву $\mathcal{M}_{fr}(spc(\mathbb{B}_\bullet))$ мотивного пространства $spc(\mathbb{B}_\bullet)$. Априори имеется два функтора
$$\mathcal{M}_{fr}\circ spc, M_{fr} : \Delta^{op}SmOp(Fr_0(k)) \rightrightarrows Sp_{S^1}(k).$$
Однако они совпадают благодаря замечанию 2.6. Иногда удобно пользоваться одним из них, а иногда другим.

Напомним, что в [1, раздел 9.1] для конечно представленного $A \in sShv_\bullet(Sm/k)$ введены канонические морфизмы
$$C_*\mathcal{F}r(L) \to \underline{\mathrm{Hom}}(A, C_*\mathcal{F}r(L\wedge A)) \text{ и } \mathcal{M}_{fr}(L) \to \underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathcal{M}_{fr}(L\wedge A)). \quad (1)$$
Они индуцируют морфизмы
$$C_*\mathcal{F}r(L)_f \xrightarrow{a_A} \underline{\mathrm{Hom}}(A, C_*\mathcal{F}r(L\wedge A)_f), \text{ и } \mathcal{M}_{fr}(L)_f \xrightarrow{\alpha_A} \underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathcal{M}_{fr}(L\wedge A)_f), \quad (2)$$
где смысл нижнего индекса f для пространств указан в начале статьи, а его смысл в случае S^1-спектров – это взятие поуровневой Нисневич-локально фибрантной замены в категории обычных S^1-спектров.

Лемма 2.23 ([1, лемма 9.1])**.** *Пусть $u : A \to B$ – мотивная слабая эквивалентность в $sShv_\bullet(Sm/k)$ между конечно представимыми объектами, такая, что индуцированный морфизм $u_* : \mathcal{M}_{fr}(L \wedge A) \to \mathcal{M}_{fr}(L \wedge B)$ – Nis-локально стабильная слабая эквивалентность спектров. Предположим, что фибрантные замены в поуровневой Nis-локальной модельной структуре $\mathcal{M}_{fr}(L)_f, \mathcal{M}_{fr}(L \wedge A)_f, \mathcal{M}_{fr}(L \wedge B)_f$ все являются мотивно фибрантными S^1-спектрами. Тогда*

$$\alpha_A : \mathcal{M}_{fr}(L)_f \to \underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathcal{M}_{fr}(L \wedge A)_f)$$

– посхемная стабильная эквивалентность, если и только если таковой является $\alpha_B : \mathcal{M}_{fr}(L)_f \to \underline{\mathrm{Hom}}(B, \mathcal{M}_{fr}(L \wedge B)_f)$.

Следствие 2.24 (= [1, следствие 7.5])**.** *Пусть k – бесконечное совершенное поле, а Y – симплициальный объект в $SmOp(Fr_0(k))$. Предположим, что симплициальный пучок Нисневича $C_*Fr(Y)$ локально связен в топологии Нисневича. Пусть $M_{fr}(Y) \to M_{fr}(Y)_f$ – фибрантная замена в поуровневой иъективной модельной структуре на обыкновенных пучках S^1-спектров. Тогда:*

(1) *$M_{fr}(Y)_f$ фибрантен в стабильной инъективной мотивной модельной категории S^1-спектров;*
(2) *для любого $n \geqslant 0$ и любой фибрантной замены $C_*(Fr(-, Y \otimes S^n)) \to C_*(Fr(-, Y \otimes S^n))_f$ в $sShv_\bullet(Sm/k)$, пространство $C_*(Fr(-, Y \otimes S^n))_f$ мотивно фибрантно в $sShv_\bullet(Sm/k)$.*

2.2. Группа 2 – Переносящееся без изменений. Пусть $\mathbb{B} \in SmOp(Fr_0(k))$. Рассмотрим коммутативную диаграмму в $\Delta^{\mathrm{op}}Fr_0(k)$ (= [1, стр. 33 формула (12)]

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_m \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathbb{G}_m^{\wedge 1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{A}^{\wedge 1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^{\wedge 1}//\mathbb{G}_m^{\wedge 1} \arrow[d, "\beta"] \\
\mathbb{G}_m^{\wedge 1} \arrow[r] & \varnothing \arrow[r] & \mathbb{G}_m^{\wedge 1} \otimes S^1.
\end{tikzcd} \tag{3}$$

Она индуцирует морфизм фрейм-мотивов

$$\beta_*\alpha_* : M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)) \to M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^n \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge 1} \otimes S^1), \quad n \geqslant 0.$$

Теорема 2.25 (ср. [1, теорема 8.2]). *Морфизм $\beta_*\alpha_*$ – локально в топологии Нисневича стабильная слабая эквивалентность S^1-спектров, если* $\mathrm{char}(k) \neq 2$.

2.3. Группа 3 – Локальная связность.

Определение 2.26. *Назовем пару $\mathbb{B} = (X, U) \in SmOp(Fr_0(k))$ связной, если пересечение U с каждой связной (=неприводимой) компонентой X непусто.*

Замечание 2.27. В случае $k = \mathbb{C}$ пара (X, U) связна тогда и только тогда, когда пара топологических многообразий (X^{an}, U^{an}) связна в общепринятом топологическом смысле.

Пример 2.28. Для любой пары $\mathbb{B}$ и $n \geqslant 1$ пара $\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n}$ связна.

Предложение 2.29. *Для любого целого $n \geqslant 0$ и любой связной пары $\mathbb{B} = (X, U) \in SmOp(Fr_0(k))$ пространства*

$$C_*Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n}), C_*Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)), C_*(Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge 1} \otimes S^1))$$

локально связны в топологии Нисневича.

Отсюда имеем следующее:

Предложение 2.30. *Пусть $E \mapsto E_f$ – фибрантная замена в поуровневой инъективной модельной структуре на обыкновенных пучках S^1-спектров. Для каждого натурального $n \geqslant 0$ и каждой связной пары $\mathbb{B} = (X, U) \in SmOp(Fr_0(k))$ S^1-спектры*

$$M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n})_f, M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge 1} \otimes S^1)_f \text{ и } M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m))_f$$

фибрантны в стабильной инъективной мотивной модельной категории S^1-спектров. В частности, они являются фибрантными заменами в Nis-локальной модельной структуре.

Кроме того, для связных пар $\mathbb{B}$ мотивные пространства

$$C_*Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n})_f, C_*(Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge 1} \otimes S^1))_f$$
$$\text{и} \quad C_*Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m))_f$$

мотивно фибрантны в мотивной модельной структуре Мореля–Воеводского на $sShv_\bullet(Sm/k)$.

2.4. Группа 4 – теорема о конусе.

Теорема 2.31 (ср. [2, теорема 1.2])**.** *Пусть* $\mathrm{char}(k) \neq 2$. *Пусть* $S \subset X$ *– замкнутая подсхема* k*-гладкой схемы. Положим* $U = X - S$ *и обозначим пару* (X, U) *через* $\mathbb{B} \in SmOp(Fr_0(k))$, *а пару* $(\mathbb{A}^1, \mathbb{G}_m)$ *через* $\mathbb{T}$. *Рассмотрим морфизмы* $\alpha_{\mathbb{B}} : (X//U) \to \mathbb{B}$ *и* $\alpha_{\mathbb{T}} : (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m) \to \mathbb{T}$ *в категории* $\Delta^{op}Fr_0(k)$ *из замечания* 2.19. *Для любого* $n \geqslant 0$ *рассмотрим морфизм*

$$\alpha_{\mathbb{B}} \wedge \alpha_{\mathbb{T}}^{\wedge n} : (X//U) \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)^{\wedge n} \to \mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n},$$

определенный как в [2, введение]. *Тогда индуцированный морфизм*

$$M_{fr}(\alpha_{\mathbb{B}} \wedge \alpha_{\mathbb{T}}^{\wedge n}) : M_{fr}((X//U) \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)^{\wedge n}) \to M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n})$$

является локально в топологии Нисневича стабильной слабой эквивалентностью S^1*-спектров.*

Следствие 2.32 (ср. [2, следствие 8.1])**.** *В условиях и обозначениях теоремы* 2.31 *для каждого* $n \geqslant 0$ *и каждого* $\mathbb{B} \in SmOp(Fr_0(k))$ *морфизм*

$$M_{fr}(id_{\mathbb{B}} \wedge id_{\mathbb{T}}^{\wedge n} \wedge \alpha_{\mathbb{T}}) : M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)) \to M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n+1})$$

– Nis-локально стабильная слабая эквивалентность S^1*-спектров.*

2.5. Вывод основной теоремы.

Вывод теоремы 2.14. Заметим, что пара $\mathbb{B}$ из теоремы 2.14 связна в смысле определения 2.26. По предложению 2.30 для каждого целого $n \geqslant 0$ S^1-спектр $M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n})_f$ мотивно фибрантен и мотивное пространство $C_*Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n})_f$ мотивно фибрантно. Пусть $u : (\mathbb{P}^1, \infty) \to T$ – каноническая мотивная слабая эквивалентность в $sShv_\bullet(Sm/k)$. Рассмотрим индуцированный морфизм мотивных пространств

$$u^* : \underline{\mathrm{Hom}}(T, C_*Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n+1})_f) \to \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), C_*Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n+1})_f).$$

Воспользуемся теперь морфизмами a_T и α_T, определенными перед леммой 2.23. А именно, по [1, лемма 9.3], морфизм

$$u^* \circ a_T : C_*Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n})_f \to \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{P}^1, \infty), C_*Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n+1})_f)$$

– посхемная слабая эквивалентность тогда и только тогда, когда морфизм $\alpha_T : M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n})_f \to \underline{\mathrm{Hom}}(T, M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n+1})_f)$ – это посхемная стабильная эквивалентность спектров.

Рассмотрим следующий домик в категории $\Delta^{op}SmOp(Fr_0(k))$:

$$\mathbb{T} \leftarrow (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m) \to \mathbb{G}_m^{\wedge 1} \otimes S^1,$$

где правая стрелка равна $\beta\alpha$, определенному в (3). Его стрелки превращаются в слабые мотивные эквивалентности при применении функтора spc.

По предложению 2.30, для каждого натурального $n \geqslant 0$, S^1-спектры

$$M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge 1} \otimes S^1)_f, M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m))_f$$

мотивно фибрантны, а

$$C_*(Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge 1} \otimes S^1))_f, C_*Fr(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m))_f$$

– мотивно фибрантные пространства. По следствию 2.32

$$M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)) \to M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n+1})$$

является локально в топологии Нисневича стабильной слабой эквивалентность спектров. По теореме 2.25,

$$M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)) \to M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n} \wedge \mathbb{G}_m{}^{\wedge 1} \otimes S^1)$$

– Nis-локальная стабильная эквивалентность спектров. По лемме 2.23,

$$\alpha_T : M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n})_f \to \underline{\mathrm{Hom}}(T, M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n+1})_f)$$

– посхемная стабильная эквивалентность спектров тогда и только тогда, когда морфизм спектров

$$\alpha_{\mathbb{G}_m{}^{\wedge 1} \otimes S^1} : M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n})_f \to \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{G}_m{}^{\wedge 1} \otimes S^1), M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^n \wedge \mathbb{G}_m{}^{\wedge 1} \otimes S^1)_f)$$

– посхемная стабильная эквивалентность спектров. Обозначим временно $X//U$ через $c(\mathbb{B})$, $\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m$ через $c(\mathbb{T})$ и рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
M_{fr}(c(\mathbb{B}) \wedge c(\mathbb{T})^{\wedge n})_f \arrow[r, "\alpha_{\mathbb{G}_m{}^{\wedge 1} \otimes S^1}"] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{G}_m{}^{\wedge 1} \otimes S^1), M_{fr}(c(\mathbb{B}) \wedge c(\mathbb{T})^{\wedge n} \wedge \mathbb{G}_m{}^{\wedge 1} \otimes S^1)_f) \arrow[d] \\
M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^{\wedge n})_f \arrow[r, "\alpha_{\mathbb{G}_m^{\wedge 1} \otimes S^1}"] & \underline{\mathrm{Hom}}((\mathbb{G}_m^{\wedge 1} \otimes S^1), M_{fr}(\mathbb{B} \wedge \mathbb{T}^n \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge 1} \otimes S^1)_f),
\end{tikzcd}$$

где нижний индекс f означает взятие стабильной локально в топологии Нисневича фибрантной замены обыкновенных спектров, а $c(\mathbb{T})^{\wedge n} = (\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)^{\wedge n} \in \Delta^{op} Fr_0(k)$ построено в определении 2.20.

Из теоремы 2.31 следует, что левая вертикальная стрелка – посхемная стабильная слабая эквивалентность спектров, значит, такова и правая стрелка. Значит, нижняя стрелка является посхемной стабильной слабой эквивалентностью спектров в том и только в том случае, когда таковой же является верхняя. Но верхняя – посхемная стабильная слабая эквивалентность по теореме сокращения для фрейм-мотивов алгебраических многообразий [3, теорема A] и [1, теорема 6.5]. Итак, морфизм α_T, а вместе с ним и морфизм $u^* \circ a_T$ являются мотивными эквивалентностями. □

Ниже частично докажем утверждения из групп (3) и (4).

§3. Сведение теоремы 2.31 к линейной теореме о конусе.

Следующая теорема обобщает [2, теорема 1.2].

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathrm{char}(k) \neq 2$. *Для любой пары* $\mathbb{B} \in SmOp(Fr_0(k))$ *следующий естественный морфизм фрейм-*S^1*-спектров является посхемной стабильной эквивалентностью:*

$$\lambda_{\mathbb{B}} : \mathbb{Z}Fr_*^{S^1}(\mathbb{B}) \to EM(\mathbb{Z}\mathrm{F}_*(-, \mathbb{B})).$$

Более того, естественный морфизм фрейм-S^1*-спектров*

$$l_{\mathbb{B}} : \mathbb{Z}M_{fr}(\mathbb{B}) \to LM_{fr}(\mathbb{B})$$

– посхемная стабильная эквивалентность. В частности, для каждого $U \in Sm/k$

$$\pi_*(\mathbb{Z}M_{fr}(\mathbb{B})(U)) = H_*(\mathbb{Z}\mathrm{F}(\Delta^\bullet \wedge U, \mathbb{B})) = H_*(C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(U, \mathbb{B})).$$

Обозначения, используемые в этой формулировке, вводятся аналогично [2, раздел 8].

Доказательство. Рассуждения [2, дополнение B] переносятся без изменений на ситуацию произвольной гладкой пары $\mathbb{B}$ вместо $X \wedge \mathbb{T}^{\wedge n}$. □

Выведем теорему 2.31 из теоремы 4.1 ниже.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по n. База – случай $n = 0$. По теореме 4.1 морфизм комплексов предпучков абелевых групп

$$C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(X)/C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(X - S) \to C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(\mathbb{B}) \tag{4}$$

– локальный квазиизоморфизм.

Ввиду [2, раздел 8] S^1-спектры

$$LM_{fr}(X), LM_{fr}(X-S) \text{ и } LM_{fr}(\mathbb{B})$$

– S^1-спектры Эйленберга–Маклейна комплексов $C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(X)$, $C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(X-S)$ и $C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(\mathbb{B})$ соответственно. Поэтому морфизм

$$LM_{fr}(X)/LM_{fr}(X-S) \to LM_{fr}(\mathbb{B}),$$

индуцированный (4), – локальная стабильная слабая эквивалентность, и следовательно, по теореме 3.1 таковым же является морфизм

$$\mathbb{Z}M_{fr}(X)/\mathbb{Z}M_{fr}(X-S) \to \mathbb{Z}M_{fr}(\mathbb{B}).$$

S^1-спектры $M_{fr}(X)$, $M_{fr}(X-S)$, $M_{fr}(\mathbb{B})$ (-1)-связны, поскольку являются спектрами Сегала (см. [1, определение 5.2], [9, предложение 1.4]).

Стабильная теорема Уайтхеда [6, II.6.30] означает, что морфизм

$$M_{fr}(X)/M_{fr}(X-S) \to M_{fr}(\mathbb{B}) \tag{5}$$

– локальная стабильная слабая эквивалентность.

База индукции доказана, перейдем к доказательству перехода индукции $n \to n+1$.

$$C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{A}^1)/C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{G}_m) \to C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n+1}) \tag{6}$$

– локальный квазиизоморфизм, по теореме 4.1.

Ввиду [2, раздел 8] (или по аналогичному рассуждению для последнего спектра), S^1-спектры

$$LM_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{A}^1), LM_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{G}_m) \text{ и } LM_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n+1})$$

– S^1-спектры Эйленберга–Маклейна комплексов

$$C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{A}^1), C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{G}_m) \text{ и } C_*\mathbb{Z}\,\mathrm{F}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n+1})$$

соответственно. Поэтому морфизм

$$LM_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{A}^1)/LM_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{G}_m) \to LM_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n+1}),$$

индуцированный (6), – локальная стабильная слабая эквивалентность, и значит, таковым же является и морфизм

$$\mathbb{Z}M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{A}^1)/\mathbb{Z}M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{G}_m) \to \mathbb{Z}M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n+1}),$$

по теореме 3.1.

S^1-спектры $M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{A}^1)$, $M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{G}_m)$, $M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n+1})$ (-1)-связны, поскольку являются спектрами Сегала (см. [1, определение 5.2], [9, предложение 1.4]).

По стабильной теореме Уайтхеда [6, II.6.30], морфизм

$$M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{A}^1)/M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{G}_m)\to M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n+1}) \qquad (7)$$

– локальная стабильная слабая эквивалентность. Рассмотрим следующую последовательность естественных морфизмов

$$M_{fr}((X//U)\wedge(\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)^{\wedge n+1})=M_{fr}((X//U)\wedge(\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)^{\wedge n}\wedge(\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m))\xrightarrow{(1)}$$
$$Cone[M_{fr}((X//U)\wedge(\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)^{\wedge n}\wedge\mathbb{G}_m)\to M_{fr}((X//U)\wedge(\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)^{\wedge n}\wedge\mathbb{A}^1)]\xrightarrow{(2)}$$
$$Cone[M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{G}_m)\to M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{A}^1)]\xrightarrow{(3)}$$
$$M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{A}^1)/M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n}\wedge\mathbb{G}_m)\xrightarrow{(4)} M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\wedge n+1}).$$

Стрелки (1) и (3) являются посхемными стабильными слабыми эквивалентностями по стандартным рассуждениям. Стрелка (2) – локальная стабильная слабая эквивалентность по предположению индукции. Стрелка (4) – в точности морфизм (7), поэтому это локальная стабильная слабая эквивалентность.

Значит, для всех $\ell\geqslant 0$, канонический морфизм

$$M_{fr}((X//U)\wedge(\mathbb{A}^1//\mathbb{G}_m)^{\wedge\ell})\to M_{fr}(\mathbb{B}\wedge\mathbb{T}^{\ell}) \qquad (8)$$

– локальная стабильная слабая эквивалентность. □

По аналогии с [2, следствие 8.1] из данной теоремы получаем следствие 2.32 (в действительности, используется аналог теоремы для симплициальных пар).

§4. Необходимые утверждения

В данном разделе приведены утверждения, необходимые для доказательства основной теоремы, но доказательство которых остается за рамками данного анонса и будет опубликовано позднее.

Теорема 4.1. *Пусть* $\mathbb{B}=(X,U),\mathbb{M}=(X',U')$ *– объекты* $SmOp(Fr_0(k)$. *Тогда последовательность*

$$C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}(-,\mathbb{M}\wedge U)\to C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}(-,\mathbb{M}\wedge X)\to C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}(-,\mathbb{M}\wedge\mathbb{B})$$

включается в выделенный треугольник в производной категории пучков Нисневича.

Поскольку пространства вида $C_*Fr(-,(X,U))$ являются нулевыми пространствами интересующих нас спектров, используем утверждение о том, что эти пространства локально связны, чтобы доказать, что спектры являются Ω-спектрами.

Лемма 4.2. *Для любого $X \in Sm/k$ и любого открытого $U \subseteq X$, если U пересекает каждую связную компоненту X, то симплициальный предпучок множеств с отмеченной точкой $C_*Fr(-,(X,U))$ локально связен в топологии Нисневича на Sm/k.*

Утверждения группы (3) получаются из следующего следствия.

Следствие 4.3. *Для любого симплициального объекта $\mathbb{B}_\bullet$ в $SmOp(Fr_0(k))$, если $\mathbb{B}_0 = (X_0, U_0)$ и U_0 пересекает каждую связную компоненту X_0, то бисимплициальный предпучок множеств с отмеченной точкой $C_*Fr(-,\mathbb{B}_\bullet)$ локально связен в топологии Нисневича на Sm/k.*

В доказательстве теоремы 4.1 используется следующее утверждение о треугольниках Майера–Виеториса, доказанное также в [15, утверждение 4.3].

Предложение 4.4. *Пусть*

$$\begin{tikzcd} V - Z \arrow[r, hook] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ X - Z \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

– квадрат Нисневича в Sm/k.

(1) *Естественные морфизмы*

$$C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}(-,V-Z) \to C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}(-,X-Z) \oplus C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}(-,V) \to C_*\,\mathbb{Z}\mathrm{F}(-,X),$$

индуцированные вложениями,превращаются в выделенный треугольник в производной категории комплексов пучков Нисневича.

(2) *Пусть $W \subset X$ – открытая подсхема. Естественные морфизмы*

$$\begin{array}{c} C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}(-, (V - Z, W \times_X V - Z \cap (W \times_X V))) \\ \big\downarrow \\ C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}(-, (X - Z, W - Z \cap W)) \oplus C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}(-, (V, W \times_X V)) \\ \big\downarrow \\ C_* \mathbb{Z}\mathrm{F}(-, (X, W)), \end{array}$$

индуцированные вложениями пар, превращаются в выделенный треугольник в производной категории комплексов пучков Нисневича.

Благодарю И. А. Панина за формулировку задачи и ценные обсуждения, а также А. А. Мингазова за его записки [15] по данной теме, содержащие доказательство основной теоремы для случая гладкой замкнутой подсхемы и вдохновшие некоторые рассуждения в доказательстве основной теоремы.

Список литературы

1. G. Garkusha, I. Panin, *Framed motives of algebraic varieties (after V. Voevodsky)*, `arXiv:1409.4372 [math.KT]`, 2014.
2. G. Garkusha, A. Neshitov, I. Panin, *Framed motives of relative motivic spheres*, `arXiv:1604.02732 [math.KT]`, 2016.
3. A. Ananyevskiy, G. Garkusha, I. Panin, *Cancellation theorem for framed motives of algebraic varieties*, `arXiv:1601.06642 [math.KT]`, 2016.
4. A. Druzhinin, I. Panin, *Surjectivity of the étale excision map for homotopy invariant framed presheaves*, `arXiv:1808.07765 [math.KT]`, 2018.
5. J. F. Jardine, *Simplicial presheaves.* — J. Pure Appl. Algebra **47** (1987), 35–87.
6. S. Schwede, *An untitled book project about symmetric spectra*, available at www.math.uni- bonn.de/people/schwede/SymSpec-v3.pdf (version April 2012).
7. G. Garkusha, I. Panin, *Homotopy invariant presheaves with framed transfers*, `arXiv:1504.00884 [math.AG]`, 2015.
8. A. Suslin, V. Voevodsky, *Bloch–Kato Conjecture and Motivic Cohomology with Finite Coefficients*, in: Gordon B.B., Lewis J.D., Muller-Stach S., Saito S., Yui N. (eds) The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles. NATO Science Series (Series C: Mathematical and Physical Sciences), vol 548. Springer, Dordrecht.
9. G. Segal, *Categories and cohomology theories.* — Topology **13** (1974), 293–312.
10. F. Morel, V. Voevodsky, $\mathbb{A}^1$*-homotopy theory of schemes.* — Publ. Math. IHES **90** (1999), 45–143.

11. J. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series 33, Princeton University Press, 1980.
12. C. Mazza, V. Voevodsky, C. Weibel, *Lecture notes on motivic cohomology Clay Mathematics Monographs Volume*, No. 2, 2006.
13. V. Voevodsky, *Notes on framed correspondences*, unpublished, 2001.
14. V. Voevodsky, *A^1-homotopy theory*, Proc. of the Int. Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998), 1998.
15. A. A. Mingazov, *Some remarks on relative framed motives*. — `arXiv:1911.04860` 2019.

Tsybyshev A. A motivic Segal-type theorem for pairs (announcement).

V. Voevodsky has set the foundation of the machinery of loop spaces of motivic spaces to provide a more computation-friendly construction of the stable motivic category $SH(k)$. G. Garkusha and I. Panin have made that vision a reality, using joint works with A. Ananievsky, A. Neshitov and A. Druzhinin. In particular, G. Garkusha and I. Panin have proved that for any infinite perfect field k and any k-smooth scheme X the canonical morphism of motivic spaces $C_*Fr(X) \to \Omega^\infty_{\mathbb{P}^1}\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}(X_+)$ is Nisnevich-locally a group-completion.

The present work addresses a generalisation of that theorem to the case of general open pairs of smooth schemes (X, U), where X is a k-smooth scheme, U is its open subscheme intersecting each component of X in a nonempty subscheme. We propose that in this case the motivic space $C_*Fr((X,U))$ is Nisnevich-locally connected and the canonical morphism of motivic spaces $C_*Fr((X,U)) \to \Omega^\infty_{\mathbb{P}^1}\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}(X/U)$ is Nisnevich-locally a homotopy equivalence of simplicial sets. Moreover, we state that if the codimension of $S = X - U$ in each component of X is greater than $r \geqslant 0$, then the simplicial sheaf $C_*Fr((X,U))$ is locally r-connected.

Some principal steps of the proof of these statements are provided in the present paper, but other important technical lemmas are given without proof. Those proofs will be published later.

С.-Петербургский
международный математический
институт им. Л. Эйлера,
наб. р. Фонтанки 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: `emperortsy@gmail.com`

Поступило 7 ноября 2019 г.