Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 484, 2019 г.

И. М. Певзнер

ОРБИТЫ ВЕКТОРОВ НЕКОТОРЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ. I

§1. Введение

Пусть Φ – система корней одинаковой длины и K – произвольное поле. Далее, обозначим через δ максимальный корень Φ и положим $\Phi_0 = \{\alpha \in \Phi; \delta \perp \alpha\}$, $G_0 = G_{\mathrm{sc}}(\Phi_0, K)$ и $V_1 = \langle e_\alpha; \angle(\alpha,\delta) = \pi/3\rangle$, где e_α – элементарные корневые элементы. В настоящей серии статей будут рассмотрены орбиты действия G_0 на V_1.

Такое действие изучалось во множестве статей. Прежде всего это, разумеется, случай $\Phi = E_8$ – тогда получается 56-мерное минимальное микровесовое представление группы типа E_7. Остальные случаи исследуются меньше, однако тоже встречаются достаточно часто. Наряду с изучением собственно представления G_0 в V_1, это может помочь и при исследовании представления всей группы $G_{\mathrm{sc}}(\Phi, K)$ и соответствующей алгебры Ли.

Орбиты этого действия также изучались в нескольких статьях. По-видимому, самый общий случай разобран в работе Крутелевича 2007 года [28]. В ней используется слегка другой язык, но, в частности, из нее следует описание орбит для исключительных групп типов E_6, E_7 и E_8 и характеристики поля, не равной 2 и 3. Стоит также отметить более раннюю статью Брюса Куперстейна [27], в которой он описывает конструкцию 56-мерного модуля и действие на нем группы Шевалле типа E_7 над полем K, $\mathrm{char}\, K \neq 2$. В частности, там были описаны орбиты векторов этого модуля под действием этой группы. Однако в его статью вкралась некоторая неточность — кое-где спутаны, по-видимому, орбиты векторов и прямых; вероятно, Куперстейна больше интересовало получающееся проективное многообразие. К сожалению, в ряде работ других авторов, например [30, 4], цитирующих статью Куперстейна, этот результат приводится в неправильной формулировке.

В настоящей серии статей мы обобщим описание орбит векторов на другие системы корней, а также на случай произвольного поля.

Ключевые слова: группы Шевалле, орбиты векторов, корневые элементы.
Настоящая работа выполнена при содействии проекта РФФИ 19-01-00297.

Отметим также, что хоть в отличие от работы Куперстейна случай $\operatorname{char} K = 2$ нам не приходится отделять с самого начала, некоторые проблемы с ним все равно возникают. Более того, и сам результат в этом случае получается более сложный, поэтому случай $\operatorname{char} K = 2$ будет нами рассмотрен отдельно.

В данной статье будут доказаны некоторые общие результаты и разобраны случаи $\Phi = E_6$, E_7 и E_8 при $\operatorname{char} K \neq 2$. А именно, доказана следующая теорема:

Теорема. *Пусть $\Phi = E_6$, E_7 или E_8, K — произвольное поле и $\operatorname{char} K \neq 2$. Далее, пусть δ — максимальный корень системы Φ, $\Phi_0 = \{\alpha \in \Phi; \delta \perp \alpha\}$, а λ, μ, ν и ξ — четыре произвольных попарно ортогональных корня, образующих с δ угол $\pi/3$ каждый. Тогда орбиты естественного действия группы $G_0 = G_{\mathrm{sc}}(\Phi_0, K)$ на подпространстве $\langle e_\alpha; \angle(\alpha, \delta) = \pi/3\rangle$ имеют вид:*

I. *Одна нулевая орбита, $x = 0$.*
II. *Одна орбита из векторов, приводящихся к виду $x = e_\lambda$.*
III. *Одна орбита из векторов, приводящихся к виду $x = e_\lambda + e_\mu$.*
IV. *Одна орбита из векторов, приводящихся к виду $x = e_\lambda + e_\mu + e_\nu$.*
V. *Однопараметрическое множество орбит векторов, приводящихся к виду $x = e_\lambda + e_\mu + e_\nu + ae_\xi$, $a \in K^*$; для каждого a получается своя орбита.*

Также в тексте дается метод определения орбиты, в которую попадает выбранный элемент.

§1. Основные обозначения

Пусть Φ — система корней одной длины, $V = V(\Phi)$ — соответствующая алгебра Ли, K — произвольное поле, а $G = G_{\mathrm{sc}}(\Phi, K)$ — соответствующая присоединенная группа. В данной статье нас интересует в первую очередь случай $\Phi = E_l$ и $\operatorname{char} K \neq 2$, но значительная часть утверждений будет выполняться и в других случаях и будет использоваться в последующих статьях.

Как известно, в V существует базис Шевалле $\{e_\alpha, \alpha \in \Phi; h_\alpha, \alpha \in \Pi\}$, где Π – фундаментальная система корней. При этом все h_α из подалгебры Картана; $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$; $[h_\alpha, e_\beta] = A_{\alpha\beta} e_\beta$, где $A_{\alpha\beta} = 2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Z}$ — числа Картана; $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}$ при $\alpha + \beta \in \Phi$ и $[e_\alpha, e_\beta] = 0$ при $\alpha + \beta \notin \Phi$ и $\beta \neq -\alpha$, где $N_{\alpha\beta} = \pm 1$ — структурные константы. Коэффициент в разложении вектора $x \in V$ по этому базису при e_α обозначим x^α, а соответствующий элемент из подалгебры Картана обозначим x^h; тогда $x = \sum_{\alpha\in\Phi} x^\alpha e_\alpha + x^h$. Из свойств структурных констант (см. [30]) нам понадобятся два: $N_{\alpha\beta} = N_{-\alpha,\alpha+\beta}$ (при $a, \beta \in \Phi$ и $\angle(\alpha,\beta) = 2\pi/3$) и $N_{\alpha\gamma}N_{\beta,\alpha+\gamma} = N_{\beta\gamma}N_{\alpha,\beta+\gamma}$ (при $\alpha,\beta,\gamma \in \Phi$, $\alpha \perp \beta$ и $\angle(\alpha,\gamma) = \angle(\beta,\gamma) = 2\pi/3$).

Далее, в группе G выделяются элементарные корневые элементы $x_\alpha(a)$, $\alpha \in \Phi, a \in K$ и $X_\alpha = \langle x_\alpha(a); a \in K\rangle$ — элементарные корневые подгруппы. В работе будут использоваться формулы для действия $x_\alpha(a)$ на базисе Шевалле. Они перечислены, например, в [31]. Нам понадобятся следующие равенства: $x_\alpha(a)e_\beta = e_\beta$ при $\angle(\alpha,\beta) < 2\pi/3$, $x_\alpha(a)e_\beta = e_\beta + N_{\alpha,\beta}ae_{\alpha+\beta}$ при $\angle(\alpha,\beta) = 2\pi/3$, $x_\alpha(a)e_{-\alpha} = e_{-\alpha} + ah_\alpha - a^2e_\alpha$ и $x_\alpha(a)h_\beta = h_\beta - A_{\beta\alpha}ae_\alpha$; мы будем ими пользоваться без дополнительных ссылок.

Обозначим через δ максимальный корень системы Φ. Экстраспециальным унипотентным радикалом называется подгруппа

$$U_\delta = \langle X_\alpha; \angle(\alpha,\delta) < \pi/2\rangle.$$

Подробнее об этом радикале говорится, например, в [7, 15].

Пусть $\alpha \in \Phi$ — некоторый корень. Разобьем все корни из Φ на пять классов в зависимости от их расположения относительно корня α: $\Phi_2(\alpha) = \{\alpha\}$, $\Phi_1(\alpha) = \{\beta; \angle(\beta,\alpha) = \pi/3\}$, $\Phi_0(\alpha) = \{\beta; \angle(\beta,\alpha) = \pi/2\}$, $\Phi_{-1}(\alpha) = \{\beta; \angle(\beta,\alpha) = 2\pi/3\}$, $\Phi_{-2}(\alpha) = \{-\alpha\}$. Другими словами, β принадлежит $\Phi_i(\alpha)$ тогда и только тогда, когда скалярное произведение β и α равно $i/2$. Простейшие свойства этого разбиения приведены в [15]. Часто нас будет интересовать случай $\alpha = \delta$; для краткости, аргумент у $\Phi_i(\delta)$ будем опускать. В этих обозначениях экстраспециальный радикал $U_\delta = \langle X_\alpha; \alpha \in \Phi_2 \cup \Phi_1\rangle$.

§2. Конструкция орбит

1. Как отмечалось в [15], любой элемент $g \in U_\delta$ может быть представлен в виде $g = x_\delta(d)\cdot\prod_{\alpha\in\Phi_1} x_\alpha(a)$, причем в произведении каждый из корней встречается ровно по одному разу. При этом число a, то есть коэффициент, с которым в это разложение входит x_α при корне $\alpha \in \Phi_1$, не зависит от порядка сомножителей; в статье [15] этот коэффициент обозначался через $(\alpha)_g$. Далее, подгруппа X_δ нормальна в U_δ и фактор по ней абелев. Более того, как известно (см., например, [30]), U_δ/X_δ изоморфно $V_1 = \langle e_\alpha; \alpha \in \Phi_1\rangle$; элемент $x_\delta(d)\cdot\prod_{\alpha\in\Phi_1} x_\alpha((\alpha)_g) \in U_\delta$ при

таких факторизации и изоморфизме переходит в $\sum_{\alpha\in\Phi_1}(\alpha)_g e_\alpha$. Действие группы $G_0 = G_{\mathrm{sc}}(\Phi_0, K)$ сопряжением на U_δ/X_δ соответствует действию на V_1. Таким образом, все утверждения с V_1 переносятся на U_δ/X_δ и наоборот; большинство из них также переносится, с соответствующими поправками, на U_δ. В частности, в работе [15] доказывалась следующая теорема:

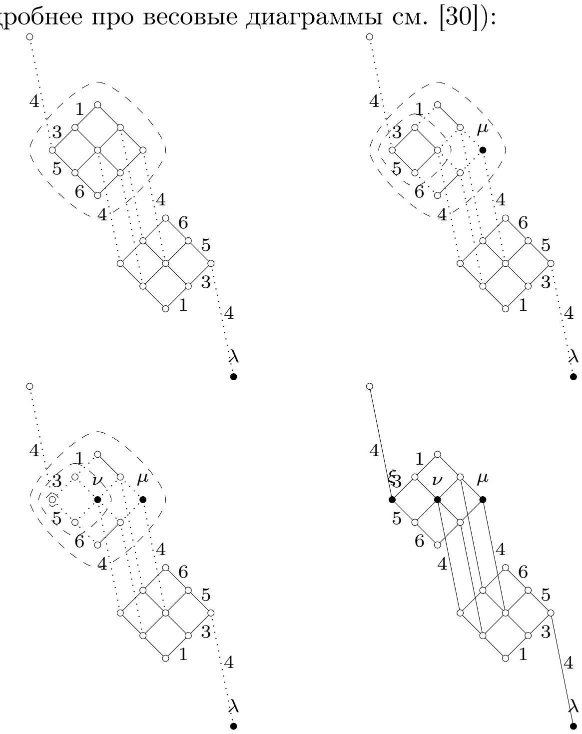
Теорема. *Пусть $g \in \mathrm{U}_\delta$. Тогда, сопрягая элемент g корневыми элементами $x_\beta(b)$ при $\beta \in \Phi_0$, можно добиться того, чтобы все коэффициенты $(\alpha)_g$, $\alpha \in \Phi_1$, при $\alpha \neq \lambda$, $\delta-\lambda$, μ, ν и ξ стали равны* 0. *При этом $\lambda, \mu, \nu, \xi \in \Phi_1$ — некоторые попарно ортогональные корни.*

Кроме того, как отмечалось в утверждении 1 [15], $\lambda+\mu+\nu+\xi = 2\delta$. Из теоремы следует, что действуя элементами G_0 на $x \in V_1$, можно добиться того, чтобы все коэффициенты x^α при $\alpha \neq \lambda$, $\delta - \lambda$, μ, ν и ξ стали равны 0. Иначе говоря, можно считать, что $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda} e_{\delta-\lambda} + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu + x^\xi e_\xi$.

2. Далее стоит обсудить вопрос существования и произвольности выбора четырех попарно ортогональных корней λ, μ, ν и ξ для разных систем Φ. Мы перечислим орбиты этих корней под действием группы Вейля системы Φ_0; так как корни выбирались в теореме по порядку, то порядок нам тоже важен. Таким образом, для определения корня λ мы можем пользоваться всей группой Вейля, для корня μ — только подгруппой, оставляющей уже выбранный λ неподвижным, для корня ν — подгруппой, оставляющей λ и μ неподвижными. Корень ξ определяется по корням λ, μ и ν однозначно, поэтому про него можно и не говорить (к слову, подгруппа, оставляющая на месте λ, μ и ν, будет единичной). Как уже говорилось, в данной статье мы рассматриваем системы $\Phi = E_6$, E_7 и E_8.

- Пусть $\Phi = E_6$. В этом случае Φ_1 состоит из 20 корней вида $\substack{*****\\1}$. Несложно видеть, что все эти корни переводятся друг в друга, то есть у корня λ одна орбита; можно считать, что $\lambda = \substack{00000\\1}$. Корни из Φ_1, ортогональные λ — это 9 корней вида $\substack{**2**\\1}$. Все эти корни также переводятся друг в друга (как уже говорилось, элементами группы Вейля, оставляющими λ на месте), то есть у корня μ тоже одна орбита; можно считать, что $\mu = \substack{01210\\1}$. Корни из Φ_1, ортогональные λ и μ — это корни $\left\{\substack{11211\\1}, \substack{12211\\1}, \substack{11221\\1}, \substack{12221\\1}\right\}$ (можно сказать, что это все корни вида $\underset{1}{1*2*1}$). Эти корни все опять переводятся друг в друга, то есть у корня ν тоже одна орбита; можно считать, что $\nu = \underset{1}{11211}$. Тогда $\xi = \underset{1}{12221}$; таким образом, в случае $\Phi = E_6$ у корней λ, μ, ν и ξ по одной орбите.

Это можно также увидеть на следующих диаграммах (подробнее про весовые диаграммы см. [30]):



На первой диаграмме отмечены корень λ и 9 ортогональных ему корней; на второй добавлены μ и 4 корня, ортогональных и λ, и μ; на третьей еще отмечены корень ν и корень, ортогональный всем троим выделенным корням; на четвертой отмечены все 4 корня. Пунктиром отмечены те ребра, соответствующие которым преобразования из группы Вейля мы не можем использовать (чтобы не испортить уже зафиксированные корни). В последующих случаях $\Phi = E_7$ и E_8 несложно нарисовать аналогичные диаграммы, но здесь мы не будем их приводить, ограничась алгебраическими рассуждениями.

- Пусть $\Phi = E_7$. В этом случае Φ_1 состоит из 32 корней вида $\underset{*}{1*****}$. Несложно видеть, что все эти корни переводятся друг в друга, то есть у корня λ одна орбита; можно считать, что $\lambda = \underset{0}{100000}$. Корни из Φ_1, ортогональные λ — это 15 корней вида $\underset{*}{12****}$. Все эти корни также переводятся друг в друга, то есть у корня μ тоже одна орбита; можно считать, что $\mu = \underset{1}{122100}$. Корни из Φ_1, ортогональные λ и μ — это корни $\left\{\underset{1}{122221}, \underset{1}{123221}, \underset{2}{123221}, \underset{1}{123321}, \underset{2}{123321}, \underset{2}{124321}\right\}$ (можно сказать, что это все корни вида $\underset{*}{12**21}$). Эти корни все опять переводятся друг в друга, то есть у корня ν тоже одна орбита; можно считать, что $\nu = \underset{1}{122221}$. Тогда $\xi = \underset{2}{124321}$; таким образом, в случае $\Phi = E_7$ у корней λ, μ, ν и ξ тоже по одной орбите.
- Пусть $\Phi = E_8$. В этом случае Φ_1 состоит из 56 корней вида $\underset{*}{******1}$. Несложно видеть, что все эти корни переводятся друг в друга, то есть у корня λ одна орбита; можно считать, что $\lambda = \underset{0}{0000001}$. Корни из Φ_1, ортогональные λ — это 27 корней вида $\underset{*}{*****21}$. Все эти корни также переводятся друг в друга, то есть у корня μ тоже одна орбита; можно считать, что $\mu = \underset{1}{0122221}$. Корни из Φ_1, ортогональные λ и μ — это корни
$$\Big\{\underset{2}{2343221}, \underset{2}{2343321}, \underset{2}{2344321}, \underset{2}{2354321}, \underset{3}{2354321}, \\ \underset{2}{2454321}, \underset{3}{2454321}, \underset{3}{2464321}, \underset{3}{2465321}, \underset{3}{2465421}\Big\}$$
(можно сказать, что это все корни вида $\underset{*}{2****21}$). Эти корни все опять переводятся друг в друга, то есть у корня ν тоже одна орбита; можно считать, что $\nu = \underset{2}{2343221}$. Тогда $\xi = \underset{3}{2465421}$; таким образом, в случае $\Phi = E_8$ у корней λ, μ, ν и ξ тоже по одной орбите.

3. Как уже говорилось, можно считать, что $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda} e_{\delta-\lambda} + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu + x^\xi e_\xi$. Так как корни в теореме выбирались последовательно, то любой $x \in V_1$ приводится к одному из следующих типов.

I. $x = 0$.

II. $x = x^\lambda e_\lambda$; $x^\lambda \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_1.

III. $x = x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu$; $x^\lambda, x^\mu \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_1 и A_2.

IV. $x = x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu$; $x^\lambda, x^\mu, x^\nu \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_l.

V. $x = x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu + x^\xi e_\xi$; $x^\lambda, x^\mu, x^\nu, x^\xi \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_l.

VI. $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda} e_{\delta-\lambda}$; $x^\lambda, x^{\delta-\lambda} \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_1.

VII. $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda} e_{\delta-\lambda} + x^\mu e_\mu$; $x^\lambda, x^{\delta-\lambda}, x^\mu \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_1 и A_2.

VIII. $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda} e_{\delta-\lambda} + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu$; $x^\lambda, x^{\delta-\lambda}, x^\mu, x^\nu \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_l.

IX. $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda} e_{\delta-\lambda} + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu + x^\xi e_\xi$; $x^\lambda, x^{\delta-\lambda}, x^\mu, x^\nu, x^\xi \neq 0$. Есть для всех систем Φ, кроме A_l.

4. Попробуем выяснить, можно ли упростить эти выражения. Прежде всего, избавимся от VII и VIII вариантов. Пусть $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda} e_{\delta-\lambda} + x^\mu e_\mu$. Тогда, как несложно видеть, $\lambda + \mu - \delta \in \Phi_0$ и при умножении x на корневой элемент $g = x_{\lambda+\mu-\delta}(-N_{\lambda+\mu-\delta,\delta-\lambda}\frac{x^\mu}{x^{\delta-\lambda}})$ получится $gx = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda} e_{\delta-\lambda}$, то есть вариант VI. В варианте VIII рассуждения похожие, но посложнее. Пусть $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda} e_{\delta-\lambda} + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu$. Умножая на тот же самый g, получаем $gx = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda} e_{\delta-\lambda} + x^\nu e_\nu - N_{\lambda+\mu-\delta,\nu} N_{\lambda+\mu-\delta,\delta-\lambda}\frac{x^\mu}{x^{\delta-\lambda}} x^\nu e_{\lambda+\mu+\nu-\delta}$; коэффициент при $e_{\lambda+\mu+\nu-\delta} = e_{\delta-\xi}$ обозначим $x^{\delta-\xi}$. Далее gx умножим на $f = x_{\delta-\xi-\lambda}(-N_{\delta-\xi-\lambda,\lambda}\frac{x^{\delta-\xi}}{x^\lambda})$ и получим $fgx = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda} e_{\delta-\lambda} + x^\nu e_\nu$, то есть вариант VII.

5. Следующая лемма поможет нам избавиться от некоторых коэффициентов.

Лемма 1. *Пусть* $w_\alpha(a) = x_{-\alpha}(-a^2 + a)x_\alpha(-\frac{1}{a})x_{-\alpha}(a-1)x_\alpha(1)$ *при* $\alpha \in \Phi_0$ *и* $a \in K^*$. *Тогда* $w_\alpha(a)e_\beta = \frac{1}{a}e_\beta$ *при* $\angle(\alpha, \beta) = \pi/3$; $w_\alpha(a)e_\beta = e_\beta$ *при* $\angle(\alpha, \beta) = \pi/2$ *и* $w_\alpha(a)e_\beta = ae_\beta$ *при* $\angle(\alpha, \beta) = 2\pi/3$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что равенство $w_\alpha(a)e_\beta = e_\beta$ при $\angle(\alpha, \beta) = \pi/2$ очевидно из вида $w_\alpha(a)$. Пусть $\angle(\alpha, \beta) = \pi/3$. Тогда $x_\alpha(1)e_\beta = e_\beta$, $x_{-\alpha}(a-1)x_\alpha(1)e_\beta = x_{-\alpha}(a-1)e_\beta = e_\beta + N_{-\alpha,\beta}(a-1)e_{\beta-\alpha}$ и $x_\alpha(-\frac{1}{a})x_{-\alpha}(a-1)x_\alpha(1)e_\beta = x_\alpha(-\frac{1}{a})(e_\beta + N_{-\alpha,\beta}(a-1)e_{\beta-\alpha}) = e_\beta + N_{-\alpha,\beta}(a-1)e_{\beta-\alpha} + N_{\alpha,\beta-\alpha}(-\frac{1}{a})N_{-\alpha,\beta}(a-1)e_\beta$. По первому свойству структурных констант это равно $(1+(-\frac{1}{a})(a-1))e_\beta + N_{-\alpha,\beta}(a-1)e_{\beta-\alpha} = \frac{1}{a}e_\beta + N_{-\alpha,\beta}(a-1)e_{\beta-\alpha}$. Наконец, $w_\alpha(a)e_\beta = x_{-\alpha}(-a^2+a)x_\alpha(-\frac{1}{a})x_{-\alpha}(a-$

$1)x_\alpha(1)e_\beta = x_{-\alpha}(-a^2+a)(\frac{1}{a}e_\beta + N_{-\alpha,\beta}(a-1)e_{\beta-\alpha}) = \frac{1}{a}e_\beta + N_{-\alpha,\beta}(-a^2+a)\frac{1}{a}e_{\beta-\alpha} + N_{-\alpha,\beta}(a-1)e_{\beta-\alpha} = \frac{1}{a}e_\beta$.

Аналогичные вычисления проводятся и в третьем случае. Пусть $\angle(\alpha,\beta) = 2\pi/3$. Тогда $x_\alpha(1)e_\beta = e_\beta + N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}$ и $x_{-\alpha}(a-1)x_\alpha(1)e_\beta = x_{-\alpha}(a-1)(e_\beta + N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}) = e_\beta + N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta} + N_{-\alpha,\alpha+\beta}(a-1)N_{\alpha\beta}e_\beta$. По первому свойству структурных констант это равно $e_\beta + N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta} + (a-1)e_\beta = ae_\beta + N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}$. Далее, $x_\alpha(-\frac{1}{a})x_{-\alpha}(a-1)x_\alpha(1)e_\beta = x_\alpha(-\frac{1}{a})(ae_\beta + N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}) = ae_\beta + N_{\alpha\beta} - \frac{1}{a}ae_{\alpha+\beta} + N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta} = ae_\beta$. Наконец, $w_\alpha(a)e_\beta = x_{-\alpha}(-a^2+a)x_\alpha(-\frac{1}{a})x_{-\alpha}(a-1)x_\alpha(1)e_\beta = x_{-\alpha}(-a^2+a)ae_\beta = ae_\beta$. □

6. Если система Φ отлична от A_l, естественным оказывается рассмотреть восьмерку корневых элементов

$$(e_\lambda, e_\mu, e_\nu, e_\xi, e_{\delta-\lambda}, e_{\delta-\mu}, e_{\delta-\nu}, e_{\delta-\xi}).$$

Если в изучаемом варианте используются не все корневые элементы, можно их дополнить произвольным образом с тем же условием, что $\lambda, \mu, \nu, \xi \in \Phi_1$ попарно ортогональные корни. Соответствующие восемь корней располагаются в вершинах куба; ребрами соединяются корни, угол между которыми равен $\pi/3$; угол между корнями в противоположных углах одной грани равен $\pi/2$; угол между корнями в противоположных вершинах куба равен $2\pi/3$; параллельные ребра соответствуют одному и тому же корню в Φ_0. Множество из этих шести "реберных" корней, $\pm(\delta-\lambda-\mu)$, $\pm(\delta-\lambda-\nu)$ и $\pm(\delta-\lambda-\xi)$, для краткости назовем $\Psi \subset \Phi_0$. Если изначально все ненулевые коэффициенты вектора x соответствуют вершинам этого куба, и мы умножаем x на корневые элементы x_ψ, $\psi \in \Psi$, то все ненулевые коэффициенты попрежнему соответствуют вершинам этого куба. Таким образом, при работе можно ограничиться только этими восемью элементами, не обращая внимания на остальные.

Рассмотрим этот куб отдельно, поместив в вершины коэффициенты при соответствующих корневых элементах. Чтобы окончательно объединить все системы корней и выбор корневых элементов λ, μ, ν и ξ, нужно еще разобраться со структурными константами. Первое их свойство говорит, что действия по одному ребру в обоих направлениях происходят с одним знаком; второе свойство говорит, что по любой грани количество отрицательных структурных констант четно. Заметим также, что если в вершину вместо соответствующего коэффициента писать противоположное число, то все знаки действия с этой вершиной также поменяются. Следующая лемма показывает, что после таких замен знаков можно считать, что все структурные константы, соответствующие ребрам нашего куба, равны 1.

Лемма 2. *На ребрах куба расставлены плюсы и минусы (по одному на ребре), при этом на каждой грани количество плюсов четно. Можно поменять на противоположные знаки на трех ребрах, имеющих общую вершину. Тогда можно добиться, чтобы на всех ребрах стояли только плюсы.*

Доказательство. Отметим прежде всего, что описанные действия не меняют условие, что на каждой грани количество плюсов четно. Для удобства пронумеруем вершины куба: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (стандартным образом). Начнем применять наше действие тогда, когда общее количество минусов сокращается (или, иначе говоря, если в вершине сходится не менее двух минусов). Когда-нибудь этот процесс закончится. Если уже все знаки оказались плюсами, то условие выполнено. Иначе, пусть одно ребро, скажем AA_1, оказалось с минусом. Тогда ребра AB, AD, A_1B_1 и A_1D_1 должны быть с плюсами, иначе количество минусов можно еще уменьшить. Так как на каждой грани количество плюсов четно, то BB_1 и DD_1 должны быть с минусами. Аналогично BC, CD, B_1C_1 и C_1D_1 должны быть с плюсами, а CC_1 с минусом. Тогда применяя наше действие к вершинам A, B, C и D последовательно, получим требуемое. $\square$

Стоит отметить также, что сведение к этому кубу — это, в общем-то, сведение к случаю $\Phi = D_4$, но мы не будем на этом останавливаться, так как содержательно это ничего не меняет.

7. Отметим, что $w_\alpha(a)$ при $\alpha \in \Psi$ умножает одну грань куба на a, а противоположную грань на $\frac{1}{a}$. Попробуем упростить случаи I–IX с помощью куба и подобных действий.

Рассмотрим VI случай, и пусть $|K| > 2$. Тогда $x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda}e_{\delta-\lambda}$; $x^\lambda, x^{\delta-\lambda} \neq 0$. Подействовав на него элементом $w_{\lambda+\mu-\delta}(x^\lambda)$, получим $x_1 = w_{\lambda+\mu-\delta}(x^\lambda)x = e_\lambda + x^\lambda x^{\delta-\lambda}e_{\delta-\lambda}$; положим, для краткости, $x^\lambda x^{\delta-\lambda} = a$. Таким образом, у нас получился элемент $x_1 = e_\lambda + ae_{\delta-\lambda}$. Мы будем действовать в вышеописанном кубе и считать, как писалось выше, что все структурные константы равны 1. Пусть b и c — такие числа, что $b, c, a - bc \neq 0$ (так как $|K| > 2$, то такие b и c существуют). Тогда $x_2 = x_{\lambda+\mu-\delta}(\frac{b}{a})x_1 = e_\lambda + ae_{\delta-\lambda} + be_\mu$. Далее, пусть $x_3 = x_{\lambda+\nu-\delta}(\frac{c}{a})x_2 = e_\lambda + ae_{\delta-\lambda} + ce_\nu + be_\mu + \frac{cb}{a}e_{\delta-\xi}$. Затем положим $x_4 = x_{\delta-\lambda-\xi}(-\frac{cb}{a})x_3 = e_\lambda + ae_{\delta-\lambda} + ce_\nu + be_\mu$. Потом, пусть $x_5 = x_{\delta-\mu-\nu}(1)x_4 = e_\lambda + ae_{\delta-\lambda} +$

$ae_\xi + ce_\nu + ce_{\delta-\mu} + be_\mu + be_{\delta-\nu}$. Избавимся от последнего слагаемого: $x_6 = x_{\delta-\lambda-\nu}(-b)x_5 = e_\lambda + (a-bc)e_{\delta-\lambda} + (a-bc)e_\xi + ce_\nu + ce_{\delta-\mu} + be_\mu$. И, наконец, избавимся от $e_{\delta-\mu}$: пусть $x_7 = x_{\delta-\lambda-\mu}(-c)x_6 = e_\lambda + (a-2bc)e_{\delta-\lambda} + (a-bc)e_\xi + ce_\nu + be_\mu$. Как несложно видеть, x_7 имеет вид IX или V. Иначе говоря, при предположении $|K| > 2$ (и, как отмечалось в пункте 6, при Φ отличном от A_l) от VI случая можно избавиться.

Рассмотрим IX случай, и пусть $\operatorname{char} K \neq 2$. Тогда

$$x = x^\lambda e_\lambda + x^{\delta-\lambda}e_{\delta-\lambda} + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu + x^\xi e_\xi; x^\lambda, x^{\delta-\lambda}, x^\mu, x^\nu, x^\xi \neq 0.$$

Подействовав на него элементом $w_{\lambda+\mu-\delta}(x^\mu)$, получим

$$x_1 = w_{\lambda+\mu-\delta}(x^\mu)x = \frac{x^\lambda}{x^\mu}e_\lambda + x^{\delta-\lambda}x^\mu e_{\delta-\lambda} + e_\mu + x^\nu x^\mu e_\nu + x^\xi x^\mu e_\xi;$$

положим, для краткости, $\frac{x^\lambda}{x^\mu} = a$, $x^{\delta-\lambda}x^\mu = b$, $x^\nu x^\mu = c$ и $x^\xi x^\mu = d$. Таким образом, у нас получился элемент $x_1 = ae_\lambda + be_{\delta-\lambda} + e_\mu + ce_\nu + de_\xi$. Мы будем действовать в вышеописанном кубе и считать, как писалось выше, что все структурные константы равны 1. Пусть $k = \frac{ab}{2d}$. Тогда $x_2 = x_{\delta-\xi-\mu}(k)x_1 = ae_\lambda + be_{\delta-\lambda} + e_\mu + ke_{\delta-\xi} + (c+kb)e_\nu + de_\xi + kde_{\delta-\mu}$. Далее, пусть $x_3 = x_{\delta-\lambda-\xi}(-\frac{k}{a})x_2 = ae_\lambda + (b - \frac{kd}{a})e_{\delta-\lambda} + e_\mu + (c + kb - \frac{k^2d}{a})e_\nu + de_\xi + kde_{\delta-\mu}$. Наконец, положим $x_4 = x_{\delta-\lambda-\mu}(-\frac{kd}{a})x_3 = ae_\lambda + (b - \frac{2kd}{a})e_{\delta-\lambda} + e_\mu + (c + kb - \frac{k^2d}{a})e_\nu + de_\xi$. Так как, по выбору k, $b - \frac{2kd}{a} = 0$, то мы попали в V или IV случай.

8. Пусть $\Phi = E_6$, E_7 или E_8. Как уже упоминалось, в этих случаях у корней λ, μ, ν и ξ по одной орбите, поэтому можно считать, что это не произвольные, а конкретные корни (например, указанные в пункте 2). Для корня λ во всех этих случаях существует корень $\alpha \in \Phi_1$, такой что $\angle(\lambda, \alpha) = \pi/3$. Тогда с помощью $w_\alpha(\cdot)$ можно коэффициент x^λ сделать произвольным ненулевым. Аналогично, для корней λ и μ существует корень $\alpha \in \Phi_1$, такой что $\lambda \perp \alpha$ и $\angle(\mu, \alpha) = \pi/3$. Тогда с помощью $w_\alpha(\cdot)$ можно коэффициент x^μ также сделать произвольным ненулевым, оставив x^λ без изменений. Наконец, для корней λ, μ и ν существует корень $\alpha \in \Phi_1$, такой что $\lambda \perp \alpha \perp \mu$ и $\angle(\nu, \alpha) = \pi/3$. Тогда с помощью $w_\alpha(\cdot)$ можно и коэффициент x^ν сделать произвольным ненулевым, оставив x^λ и x^μ без изменений.

9. Из этого следует, что при $\Phi = E_6$, E_7 или E_8 и $\operatorname{char} K \neq 2$ любой $x \in V_1$ приводится к одному из следующих типов:

I. $x = 0$.

II. $x = e_\lambda$.

III. $x = e_\lambda + e_\mu$.
IV. $x = e_\lambda + e_\mu + e_\nu$.
V. $x = e_\lambda + e_\mu + e_\nu + x^\xi e_\xi$; $x^\xi \neq 0$.

В первых 4 случаях по одному типу, а в пятом — однопараметрическое множество типов.

§3. Доказательство различности орбит

В этом параграфе мы докажем, что все полученные типы лежат в различных орбитах.

10. Следующая лемма сопоставляет каждому $x \in V_1$ корневой элемент из V.

Лемма 3. *Пусть* $\Phi \neq A_l$, $\operatorname{char} K \neq 2$ *и* $x = \sum_{\alpha\in\Phi_1} x^\alpha e_\alpha$. *Тогда существует и единственен корневой элемент* $y = \sum_{\alpha\in\Phi} y^\alpha e_\alpha + y^h$, *в котором* $y^\alpha = x^\alpha$ *при* $\alpha \in \Phi_1$, $y^\delta = 1$ *и* $y^h \in \langle h_\alpha; \alpha \in \Phi_0 \cap \Pi\rangle$.

Доказательство. Как говорилось в утверждении 2 [16], корневой элемент y будет равен ue_δ, где $u \in U_{-\delta}$ – унипотентный элемент, равный

$$u = x_{-\delta}(a) \cdot \prod_{\gamma\in\Phi_{-1}} x_\gamma\Big(N_{\gamma\delta} y^{\delta+\gamma}\Big)$$

для некоторого $a \in K$. При этом коэффициенты $y^{\delta+\gamma} = x^{\delta+\gamma}$ фиксированы, значит, для разных корневых элементов y меняется только число a. Иначе говоря, мы можем y умножать на $x_{-\delta}(\cdot)$. Как несложно видеть, при умножении y на $x_{-\delta}(b)$ к элементу подалгебры Картана y^h прибавляется $bh_{-\delta} = -bh_\delta$. Далее, y^h раскладывается по базису h_α, $\alpha \in \Pi$. При этом во всех системах $\Phi \neq A_l$ все $\alpha \in \Pi$, кроме одного, лежат в Φ_0, а один оставшийся – в Φ_1. И именно коэффициент при этом последнем корне мы и должны обнулить, для того чтобы выполнялось условие $y^h \in \langle h_\alpha; \alpha \in \Phi_0 \cap \Pi\rangle$. Кроме того, во всех системах $\Phi \neq A_l$ коэффициент в разложении h_δ по простым корням при этом самом корне равен 2. Поэтому при $\operatorname{char} K \neq 2$ можно выбрать коэффициент b так, чтобы при умножении y на $x_\delta(b)$ выполнялось условие $y^h \in \langle h_\alpha; \alpha \in \Phi_0 \cap \Pi\rangle$. □

11. Назовем элемент x темным, если угол между соответствующим ему y и e_δ равен π (иначе говоря, $y^{-\delta} \neq 0$). Далее, x называется светящимся, если этот угол равен $2\pi/3$; блестящим, если угол равен $\pi/2$ и сингулярным, если он равен $\pi/3$. Как несложно видеть, последнее условие равносильно тому, что x – корневой элемент. Названия взяты

из работы [27] для случая $\Phi = E_8$. Их определения в [27] другие, но, на самом деле, равносильные. Останавливаться на этом мы не будем, однако равносильность будет легко следовать из полученной классификации.

Несложно видеть, что при умножении на $g \in G_0$ элементу gx соответствует корневой элемент gy. При этом угол между y и e_δ при таком умножении также не меняется, значит, определения темного, светящегося, блестящего и сингулярного элементов можно расширить на орбиты. Более того, если x темный, то коэффициент $y^{-\delta}$ также не меняется при умножении на $g \in G_0$, то есть тоже является инвариантом.

12. Посмотрим, какими элементами являются перечисленные ранее случаи I–IX; впрочем, для рассматриваемого предположения $\operatorname{char} K \neq 2$ остались только виды I–V, причем случай нулевого вектора (то есть I случай), как всегда, стоит особняком. Для удобства использования полученных результатов в последующих статьях мы распишем случаи II–V в общем виде, как они были даны в пункте 3.

II. $x = x^\lambda e_\lambda$; $x^\lambda \neq 0$.

В этом случае вектор x корневой и, соответственно, сингулярный.

III. $x = x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu$; $x^\lambda, x^\mu \neq 0$.

В этом случае

$$\begin{aligned} y &= x_{\mu-\delta}(N_{\mu-\delta,\delta}x^\mu)x_{\lambda-\delta}(N_{\lambda-\delta,\delta}x^\lambda)e_\delta \\ &= x_{\mu-\delta}(N_{\mu-\delta,\delta}x^\mu)(e_\delta + x^\lambda e_\lambda) = e_\delta + x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu \pm x^\lambda x^\mu e_{\lambda+\mu-\delta}. \end{aligned}$$

Таким образом, вектор x оказывается блестящим. Отметим вдобавок, что слагаемое $\pm x^\lambda x^\mu e_{\lambda+\mu-\delta}$ является корневым элементом в $V_0 = \langle e_\alpha, h_\alpha; \alpha \in \Phi_0 \rangle$. Это свойство сохраняется под действием группы G_0 – для любого элемента x, сводящегося к III случаю, координаты соответствующего ему корневого элемента y, лежащие в V_0, образуют корневой элемент в V_0.

IV. $x = x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu$; $x^\lambda, x^\mu, x^\nu \neq 0$.

В этом случае

$$\begin{aligned} y &= x_{\nu-\delta}(N_{\nu-\delta,\delta}x^\nu)x_{\mu-\delta}(N_{\mu-\delta,\delta}x^\mu)x_{\lambda-\delta}(N_{\lambda-\delta,\delta}x^\lambda)e_\delta \\ &= x_{\nu-\delta}(N_{\nu-\delta,\delta}x^\nu)(e_\delta + x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu \pm x^\lambda x^\mu e_{\lambda+\mu-\delta}) \\ &= e_\delta + x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu \pm x^\lambda x^\mu e_{\lambda+\mu-\delta} + x^\nu e_\nu \pm x^\lambda x^\nu e_{\lambda+\nu-\delta} \end{aligned}$$

$$\pm x^\mu x^\nu e_{\mu+\nu-\delta} \pm x^\lambda x^\mu x^\nu e_{-\xi}.$$

Таким образом, вектор x оказывается светящимся. Отметим вдобавок, что слагаемое $\pm x^\lambda x^\mu x^\nu e_{-\xi}$ является корневым элементом в $V_{-1} = \langle e_\alpha; \alpha \in \Phi_{-1}\rangle$. Это свойство сохраняется под действием группы G_0 – для любого элемента x, сводящегося к IV случаю, координаты соответствующего ему корневого элемента y, лежащие в V_{-1}, образуют корневой элемент в V_{-1}.

V. $x = x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu + x^\nu e_\nu + x^\xi e_\xi$; $x^\lambda, x^\mu, x^\nu, x^\xi \neq 0$.

В этом случае

$$\begin{aligned}
y &= x_{\xi-\delta}(N_{\xi-\delta,\delta}x^\xi)x_{\nu-\delta}(N_{\nu-\delta,\delta}x^\nu)x_{\mu-\delta}(N_{\mu-\delta,\delta}x^\mu)x_{\lambda-\delta}(N_{\lambda-\delta,\delta}x^\lambda)e_\delta \\
&= x_{\xi-\delta}(N_{\xi-\delta,\delta}x^\xi)(e_\delta + x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu \pm x^\lambda x^\mu e_{\lambda+\mu-\delta} + x^\nu e_\nu \\
&\pm x^\lambda x^\nu e_{\lambda+\nu-\delta} \pm x^\mu x^\nu e_{\mu+\nu-\delta} \pm x^\lambda x^\mu x^\nu e_{-\xi}) = e_\delta + x^\lambda e_\lambda + x^\mu e_\mu \\
&\pm x^\lambda x^\mu e_{\lambda+\mu-\delta} + x^\nu e_\nu \pm x^\lambda x^\nu e_{\lambda+\nu-\delta} \pm x^\mu x^\nu e_{\mu+\nu-\delta} \pm x^\lambda x^\mu x^\nu e_{-\xi} \\
&+ x^\xi e_\xi \pm x^\lambda x^\xi e_{\lambda+\xi-\delta} \pm x^\mu x^\xi e_{\mu+\xi-\delta} \pm x^\nu x^\xi e_{\nu+\xi-\delta} \pm x^\lambda x^\mu x^\xi e_{-\nu} \\
&\pm x^\lambda x^\nu x^\xi e_{-\mu} \pm x^\mu x^\nu x^\xi e_{-\lambda} \pm x^\lambda x^\mu x^\nu x^\xi e_{-\delta}
\end{aligned}$$

Таким образом, вектор x оказывается темным.

13. Объединим данные, полученные в предыдущем пункте, с пунктом 9.

Теорема. *Пусть $\Phi = E_6$, E_7 или E_8, и $\operatorname{char} K \neq 2$. Тогда векторы из V_1 под действием G_0 образуют следующие орбиты:*

I. *Нулевая орбита, $x = 0$.*

II. *Одна орбита из сингулярных векторов. Ее элементы можно привести к виду $x = e_\lambda$.*

III. *Одна орбита из блестящих векторов. Ее элементы можно привести к виду $x = e_\lambda + e_\mu$.*

IV. *Одна орбита из светящихся векторов. Ее элементы можно привести к виду $x = e_\lambda + e_\mu + e_\nu$.*

V. *Однопараметрическое множество орбит темных векторов. Элементы этих орбит можно привести к виду $x = e_\lambda + e_\mu + e_\nu + x^\xi e_\xi$, где $\xi \in K^*$.*

Заметим, что при этом коэффициент x^ξ равен, с точностью до знака, коэффициенту при $y^{-\delta}$. Знак зависит от выбора корней λ, μ, ν и ξ и равен произведению нескольких структурных констант.

14. И, напоследок, посчитаем размерность получаемых (аффинных) многообразий. Что касается случая I, там, разумеется, размерность равна 0. В случае V для каждой орбиты накладывается ровно одно уравнение четвертой степени, поэтому размерность получается на 1 меньше размерности V_1. Иначе говоря, в случае $\Phi = E_6$ она равна 19, при $\Phi = E_7$ – 31, а при $\Phi = E_8$ – 55. Многообразие, получающееся из объединения случаев I–IV, имеет такую же размерность. Далее, рассмотрим случай II. Пусть $x \in V_1$ – корневой и, соответственно, сингулярный элемент, а $x^\alpha \neq 0$. Тогда коэффициенты x^β при $\angle(\beta,\alpha) = \angle(\beta,\delta) = \pi/3$ могут быть произвольными, а все остальные должны через них выражаться. Таким образом, ровно половина коэффициентов оказывается свободными.

Осталось рассмотреть случай III. Дальнейшие рассуждения, по сути, повторяют доказательство теоремы 1 из работы [15]. Пусть x – блестящий вектор. Какие-то из коэффициентов x не равны 0, и можно считать, что $x^\lambda \neq 0$. Тогда x^λ может быть любым ненулевым, и все x^α при $\angle(\lambda,\alpha) = \angle(\delta,\alpha) = \pi/3$ – тоже любые. При этом все такие x^α можно обнулить, умножая x на $x_{\alpha-\lambda}(\cdot)$ с подходящим коэффициентом. После этого обнуления коэффициент $x^{\delta-\lambda}$ также получается равен 0, так как иначе мы окажемся в VI, VII, VIII или IX случаях, а из них мы попадали лишь в IV и V случаи (как мы уже доказывали, в случаях I–V получаются различные векторы, и пересечься эти случаи не могут). Далее, среди коэффициентов x^α при $\angle(\delta,\alpha) = \pi/3$, $\lambda \perp \alpha$ должны быть ненулевые (иначе мы попали в случай II) и можно считать, что это x^μ. Соответственно, x^μ может быть произвольным ненулевым, и коэффициенты x^α при $\angle(\delta,\alpha) = \angle(\mu,\alpha) = \pi/3$, $\lambda \perp \alpha$ также могут быть произвольными. И все такие x^α также можно обнулить, умножая x на $x_{\alpha-\mu}(\cdot)$ с подходящим коэффициентом. Осталось заметить, что после этого ненулевыми останутся только x^λ и x^μ; если бы $x^\alpha \neq 0$ при $\angle(\delta,\alpha) = \pi/3$, $\lambda \perp \alpha \perp \mu$, то мы бы попали в IV или V случаи. Таким образом, многообразие, получающееся из объединения случаев I–III, имеет размерность 10 (x^λ и все x^α при $\angle(\lambda,\alpha) = \angle(\delta,\alpha) = \pi/3$) $+5$ (x^μ и все x^α при $\angle(\delta,\alpha) = \angle(\mu,\alpha) = \pi/3$, $\lambda \perp \alpha$) $= 15$ для $\Phi = E_6$, $16 + 9 = 25$ для $\Phi = E_7$ и $28 + 17 = 45$ для $\Phi = E_8$. Все полученные результаты можно объединить в таблицу:

размерность многообразия	E_6	E_7	E_8
I случай	0	0	0
I+II случаи	10	16	28
I+II+III случаи	15	25	45
I+II+III+IV случаи	19	31	55
V случай, для каждой из орбит	19	31	55

Список литературы

1. А. Борель, *Свойства и линейные представления групп Шевалле*, Семинар по алгебраическим группам, Мир, М. (1973), 9–59.
2. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, Главы IV–VI, Мир, М. (1972).
3. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* — Главы VII–VIII, Мир, М. (1978).
4. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, *Нормализатор группы Шевалле типа* E_7. — Алгебра и анализ **27** (2015), No. 6, 57–88.
5. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, И. М. Певзнер, *Группа Шевалле типа* E_6 *в 27-мерном представлении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **338** (2006), 5–68.
6. Н. А. Вавилов, И. М. Певзнер, *Тройки длинных корневых подгрупп.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 54–83.
7. Н. А. Вавилов, А. А. Семенов, *Длинные корневые торы в группах Шевалле.* — Алгебра и анализ **24**, No. 3 (2012), 22–83.
8. А. Ю. Лузгарев, И. М. Певзнер, *Некоторые факты из жизни* $\mathrm{GL}(5,\mathbb{Z})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **305** (2003), 153–163.
9. О. О'Мира, *Лекции о линейных группах.* В кн.: Автоморфизмы классических групп, Мир, М. (1976), 57–167.
10. О. О'Мира, *Лекции о симплектических группах.* Мир, М. (1979).
11. И. М. Певзнер, *Геометрия корневых элементов в группах типа* E_6. — Алгебра и анализ **23**, No. 3 (2011), 261–309.
12. И. М. Певзнер, *Ширина групп типа* E_6 *относительно множества корневых элементов*, I. — Алгебра и анализ **23**, No. 5 (2011), 155–198.
13. И. М. Певзнер, *Ширина групп типа* E_6 *относительно множества корневых элементов*, II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **386** (2011), 242–264.
14. И. М. Певзнер, *Ширина группы* $\mathrm{GL}(6,K)$ *относительно множества квазикорневых элементов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **423** (2014), 183–204.
15. И. М. Певзнер, *Ширина экстраспециального унипотентного радикала относительно множества корневых элементов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **435** (2015), 168–177.
16. И. М. Певзнер, *Существование корневой подгруппы, которую данный элемент переводит в противоположную.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **460** (2017), 190–202.
17. Т. А. Спрингер, *Линейные алгебраические группы.* — Алгебраическая геометрия – 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. проблемы мат. Фундам. направления **55**, ВИНИТИ, М. (1989), 5–136.
18. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле*, Мир, М. (1975).
19. Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы*, Наука, М. (1980).

20. Дж. Хамфри, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений*, МЦНМО, М. (2003).
21. M. Aschbacher, *The* 27*-dimensional module for* E_6*.* I. — Invent. Math **89**, No. 1 (1987), 159–195.
22. M. Aschbacher, *The* 27*-dimensional module for* E_6*.* II. — J. London Math. Soc **37** (1988), 275–293.
23. M. Aschbacher, *The* 27*-dimensional module for* E_6*.* III. — Trans. Amer. Math. Soc. **321** (1990), 45–84.
24. M. Aschbacher, *The* 27*-dimensional module for* E_6*.* IV. — J. Algebra **131** (1990), 23–39.
25. M. Aschbacher, *Some multilinear forms with large isometry groups.* — Geom. Dedicata **25**, No. 1–3 (1988), 417–465.
26. M. Aschbacher, *The geometry of trilinear forms.* — Finite Geometries, Buildings and Related topics, Oxford: Oxford Univ. Press (1990), 75–84.
27. B. N. Cooperstein, *The fifty-six-dimensional module for* E_7*.* I*, A four form for* E_7*.* — J. Algebra **173**, No. 2 (1995), 361–389.
28. S. Krutelevich, *Jordan algebras, exceptional groups, and Bhargava composition.* — J. Algebra **314**, No. 2 (2007), 924–977.
29. T. A. Springer, *Linear algebraic groups*, Progress in Mathematics **9**, Birkhäuser Boston Inc., Boston (1998).
30. N. A. Vavilov, *A third look at weight diagrams.* — Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **204** (2000), 1–45.
31. N. A. Vavilov, E. B. Plotkin, *Chevalley groups over commutative rings.* I. *Elementary calculations.* — Acta Applicandae Math. **45** (1996), 73–115.

Pevzner I. M. Orbits of vectors in some representations.

Let Φ be a root system of type E_6, E_7, or E_8. Let K be a field of characteristic not 2. Let δ be the maximal root of Φ and set $\Phi_0 = \{\alpha \in \Phi; \delta \perp \alpha\}$. We describe orbits of the group $G_{\mathrm{sc}}(\Phi_0, K)$ acting on the set $\langle e_\alpha; \angle(\alpha, \delta) = \pi/3\rangle$.

РГПУ им. А. И. Герцена
наб. реки Мойки, д. 48
191186, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: pevzner_igor@mail.ru

Поступило 9 сентября 2019 г.