Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 484, 2019 г.

В. А. Койбаев

ВЛОЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СЕТИ В ПРОМЕЖУТОК СЕТЕЙ

Интерес к методу вложения элементарной сети в промежуток (полных) сетей связан с тем, что он позволил дать классификацию элементарных сетей $\sigma = (\sigma_{ij})$ над полем K в двух случаях: K – алгебраическое расширение поля k (σ_{ij} – k-модули) [1] и K – поле частных области главных идеалов R (σ_{ij} – R-модули) [2].

Рассматриваются элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ порядка n аддитивных подгрупп σ_{ij} коммутативного кольца, связанная с σ производная элементарная сеть $\omega = (\omega_{ij})$, и сеть $\Omega = (\Omega_{ij})$, ассоциированная с элементарной группой $E(\sigma)$. В работе предлагается новый способ дополнения производной элементарной сети ω до (полной) сети, при котором для элементарной сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ выполнена теорема вложения элементарной сети σ в промежуток (полных) сетей, а именно (теорема 1) имеет место включение $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$, причем матричное кольцо $M(\omega)$ является двустонним идеалом кольца $M(\Omega)$. Для случая $n = 3$ получена теорема вложений элементарной сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ в промежуток (полных) сетей $\omega = (\omega_{ij})$ и $\Omega = (\Omega_{ij})$, у которых кольца, лежащие на главной диагонали, совпадают (теорема 2).

Пусть R – произвольное коммутативное кольцо с единицей, n – натуральное число, $n \geqslant 2$. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп σ_{ij} кольца R называется сетью (ковром) [3, 4] над кольцом R порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется элементарной сетью (элементарный ковер) [3,4; 5, вопрос 15.46].

Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, называется *дополняемой* (до полной сети), если для некоторых аддитивных подгрупп (точнее, подколец) σ_{ii} кольца R таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leqslant i, j \leqslant n$ является (полной) сетью. Назовем элементарную сеть σ *замкнутой* (*допустимой*), если элементарная сетевая подгруппа $E(\sigma)$ не содержит

Ключевые слова: сети, ковры, элементарные сети, замкнутые элементарные сети, допустимые элементарные сети, производная сеть, элементарная сетевая группа.

Работа выполнена в рамках темы НИР ЮМИ ВНЦ РАН.

новых элементарных трансвекций. Замкнутыми являются, например, дополняемые элементарные сети.

Хорошо известно (см. [3]), что элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ является дополняемой тогда и только тогда, когда $\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$ для любых $i \neq j$. В этом случае диагональные подгруппы σ_{ii} можно определить формулой

$$\sigma_{ii} = \sum_{k \neq i} \sigma_{ki}\sigma_{ik}, \tag{1}$$

где суммирование берется по всем k, отличным от i.

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ – элементарная сеть над кольцом R порядка $n \geqslant 3$. Рассмотрим набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца R, определенных для любых $i \neq j$ следующим образом:

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{kj},$$

где суммирование берется по всем k, отличным от i и j. Ясно, что $\omega_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$, следовательно, для любой тройки попарно различных чисел i, r, j, мы имеем $\omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$. Таким образом, набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца R является элементарной сетью, которую мы называем *производной элементарной сетью* [6] .

Для элементарной сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ положим

$$\omega_{ii} = \sum_{k \neq s} \sigma_{ik}\sigma_{ks}\sigma_{si}, \tag{2}$$

где суммирование ведется по всем $1 \leqslant k \neq s \leqslant n$.

Предложение 1. *Производная элементарная сеть ω является дополняемой. Другими словами, $\omega_{ij}\omega_{ji}\omega_{ij} \subseteq \omega_{ij}$ для любых $i \neq j$. Далее, $\omega = (\omega_{ij})$, дополненная диагональю с помощью формулы* (2)*, является* (*полной*) *сетью.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные

$$(\sigma_{ir}\sigma_{rj}) \subseteq \omega_{ij},\ (\sigma_{jk}\sigma_{ki}) \subseteq \omega_{ji},\ (\sigma_{is}\sigma_{sj}) \subseteq \omega_{ij},$$

где r, k, s отличны от i и j. Тогда мы имеем $(i \neq j)$

$$\begin{aligned}(\sigma_{ir}\sigma_{rj})(\sigma_{jk}\sigma_{ki})(\sigma_{is}\sigma_{sj}) &= [(\sigma_{ir}\sigma_{rj})\sigma_{jk}][\sigma_{ki}(\sigma_{is}\sigma_{sj})] \\ &\subseteq [\sigma_{ij}\sigma_{jk}][\sigma_{ki}\sigma_{ij}] \subseteq \sigma_{ik}\sigma_{kj} \in \omega_{ij}.\end{aligned}$$

Следовательно, $\omega_{ij}\omega_{ji}\omega_{ij} \subseteq \omega_{ij}$ для любых $i \neq j$.

Покажем теперь, что элементарная сети $\omega = (\omega_{ij})$, дополненная диагональю формулой (2), является (полной) сетью. Для этого достаточно показать включения

$$\omega_{ij}\omega_{ji} \subseteq \omega_{ii}, \ \omega_{ii}\omega_{ii} \subseteq \omega_{ii}, \ \omega_{ii}\omega_{ij} \subseteq \omega_{ij}, \ \omega_{ij}\omega_{jj} \subseteq \omega_{ij}, \ i \neq j. \qquad (3)$$

Последние два включения подобны друг другу, поэтому докажем первые три включения. Для доказательства первого включения из (3) заметим, что (k, s отличны от i и j)

$$(\sigma_{ik}\sigma_{kj})(\sigma_{js}\sigma_{si}) \subseteq \sigma_{ij}\sigma_{js}\sigma_{si} \subseteq \omega_{ii}.$$

Для доказательства второго включения из (3) нужно заметить, что ($k \neq s, \ p \neq q$) при $s \neq p$ мы имеем

$$(\sigma_{ik}\sigma_{ks}\sigma_{si})(\sigma_{ip}\sigma_{pq}\sigma_{qi}) \subseteq \sigma_{is}\sigma_{sp}\sigma_{pi} \subseteq \omega_{ii},$$

а если $s = p$, то

$$(\sigma_{ik}\sigma_{ks}\sigma_{si})(\sigma_{ip}\sigma_{pq}\sigma_{qi}) \subseteq \sigma_{ip}(\sigma_{pi}\sigma_{ip}\sigma_{pq})\sigma_{qi} \subseteq \sigma_{ip}\sigma_{pq}\sigma_{qi} \subseteq \omega_{ii}.$$

Третье включение из (3) вытекает из следующих включений (r отлично от i и j; k и s отличны от i и j)

$$(\sigma_{ik}\sigma_{ks}\sigma_{si})(\sigma_{ir}\sigma_{rj}) \subseteq \sigma_{is}\sigma_{si}\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{is}\sigma_{si}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{is}\sigma_{sj} \subseteq \omega_{ij}.$$

□

В силу предложения 1 дадим следующее определение.

Определение. *Производная элементарная сеть* ω, *дополненная диагональю формулы* (2), *называется производной сетью* (*для* σ).

Замечание 1. Формула (2) определяет диагональные кольца ω_{ii} производной элементарной сети ω новым способом (см. (1)), который лежит в основе доказательства теоремы 1.

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ – элементарная сеть над кольцом R порядка n. Для произвольных $i \neq j$ положим

$$\Omega_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}\gamma_{ij},$$

где $\gamma_{ij} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} (\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m$. Таблица $\Omega = (\Omega_{ij})$ является элементарной сетью, причем дополняемой, то есть справедливы включения $\Omega_{ij}\Omega_{ji}\Omega_{ij} \subseteq \Omega_{ij}$ для любых $i \neq j$ ([6], предложение 5). Пользуясь формулой (1), дополним элементарную сеть Ω до (полной) сети стандартным способом, положив $\Omega_{ii} = \sum\limits_{k=1}^{n} \Omega_{ik}\Omega_{ki}$, где суммирование берется по k, $k \neq i$. Нетрудно видеть, что

$$\Omega_{ii} = \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \gamma_{ik}.$$

Так, например, $\Omega_{11} = \gamma_{12} + \gamma_{13} + ... + \gamma_{1n}$. Заметим, что $\omega_{ii} \subseteq \Omega_{ii}$ для всякого i. Сеть Ω является наименьшей дополняемой сетью, содержащей элементарную сеть σ ([6], предложение 6). Сеть Ω называется *сетью, ассоциированной с элементарной группой* $E(\sigma)$[6].

Для сетей ω и Ω рассмотрим матричные кольца

$$M(\omega) = \{a = (a_{ij}) : \quad a_{ij} \in \omega_{ij}\} \subseteq M(\Omega) = \{b = (b_{ij}) : \quad b_{ij} \in \Omega_{ij} \ \}.$$

Теорема 1. *Элементарная сеть σ индуцирует производную сеть $\omega = (\omega_{ij})$ и сеть $\Omega = (\Omega_{ij})$, ассоциированную с элементарной группой $E(\sigma)$, причем $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$, и для любых i, r, j выполнены соотношения*

$$\omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}, \ \Omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}, \tag{4}$$

в частности, матричное кольцо $M(\omega)$ является двусторонним идеалом кольца $M(\Omega)$.

Доказательство. Докажем первое из включений (4) теоремы 1 (второе доказывается аналогично):

$$\omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}. \tag{5}$$

Пусть вначале $i \neq j$. Если $i \neq r$, то включение (5) следует из теоремы 1 [6]. Если $i = r$, то включение (5) принимает вид $\omega_{ii}\Omega_{ij} \subseteq \omega_{ij}$. Для доказательства последнего включения покажем, что $(\sigma_{ik}\sigma_{ks}\sigma_{si})\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$ (i, k, s попарно различны). Действительно, так как $k \neq s$, то либо $k \neq j$, либо $s \neq j$, следовательно,

$$s \neq j \Longrightarrow (\sigma_{ik}\sigma_{ks}\sigma_{si})\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{is}\sigma_{sj} \subseteq \sigma_{ij};$$
$$k \neq j \Longrightarrow (\sigma_{ik}\sigma_{ks}\sigma_{si})\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ik}\sigma_{kj} \subseteq \sigma_{ij}.$$

Пусть теперь $i = j$. Включение (5) принимает вид: $\omega_{ir}\Omega_{ri} \subseteq \omega_{ii}$. Если $i \neq r$, то включение $\omega_{ir}\Omega_{ri} \subseteq \omega_{ii}$ вытекает из следующих двух (i, k, r попарно различны):

$$(\sigma_{ik}\sigma_{kr})\sigma_{ri} \subseteq \omega_{ii}; \ (\sigma_{ik}\sigma_{kr})\sigma_{ri}(\sigma_{ir}\sigma_{ri})$$
$$= [(\sigma_{ir}\sigma_{ri})\sigma_{ik}](\sigma_{kr}\sigma_{ri}) \subseteq \sigma_{ik}\sigma_{kr}\sigma_{ri} \subseteq \omega_{ii}.$$

Наконец, если $i = r$, то требуемое включение имеет вид $\omega_{ii}\Omega_{ii} \subseteq \omega_{ii}$. Для доказательства последнего включения достаточно доказать, что (для i, k, r попарно различных и $i \neq s$)

$$(\sigma_{ik}\sigma_{kr}\sigma_{ri})(\sigma_{is}\sigma_{si}) \subseteq \sigma_{ik}\sigma_{kr}\sigma_{ri}.$$

Так как $k \neq r$, то либо $r \neq s$, либо $k \neq s$. Если $r \neq s$, то последнее включение следует из включения $\sigma_{ri}(\sigma_{is}\sigma_{si}) \subseteq \sigma_{ri}$, если же $k \neq s$, то требуемое включение следует из включения $(\sigma_{is}\sigma_{si})\sigma_{ik} \subseteq \sigma_{ik}$. □

Дадим уточнение теоремы 1 для элементарных сетей порядка $n = 3$. Производная сеть $\omega = (\omega_{ij})$ в случае $n = 3$ имеет вид

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \sigma_{13}\sigma_{32} & \sigma_{12}\sigma_{23} \\ \sigma_{23}\sigma_{31} & \omega_{22} & \sigma_{21}\sigma_{13} \\ \sigma_{32}\sigma_{21} & \sigma_{31}\sigma_{12} & \omega_{33} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} + \sigma_{13}\sigma_{32}\sigma_{21}$. Для сети Ω подгруппы Ω_{ij} при $i \neq j$ описываются как и выше, а диагональные кольца сейчас описываются следующим образом:

$$\Omega_{11} = \Omega_{22} = \Omega_{33} = \gamma_{12} + \gamma_{23} + \gamma_{31}. \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ – элементарная сеть порядка $n = 3$, $\omega = (\omega_{ij})$, $\Omega = (\Omega_{ij})$ – сети, определенные формулами* (6) *и* (7)*. Тогда для элементарной сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ справедлива теорема вложения* (*теорема* 1)*.*

Замечание 2. Не умаляя общности (присоединив 1 кольца R к диагональным кольцам сетей ω, Ω), мы можем считать кольца ω_{ii} и Ω_{ii} – кольцами с единицей, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Таким образом, для $n = 3$ вложение, полученное в теореме 2, позволяет сводить изучение элементарной сети к D-сетям, у которых на главной диагонали одинаковые кольца с 1.

Отметим, что теорема 1 анонсирована в [7].

Список литературы

1. В. А. Койбаев, Я. Н. Нужин, *k-инвариантные сети над алгебраическим расширением поля k.* — Сиб. мат ж. **58**, No. 1 (2017), 143–147.
2. Р. Ю. Дряева, В. А. Койбаев, Я. Н. Нужин, *Полные и элементарные сети над полем частных кольца главных идеалов.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **455** (2017), 42–51.
3. З. И. Боревич, *О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями.* — Зап. науч. семин. ЛОМИ **75** (1978), 22–31.

4. В. М. Левчук, *Замечание к теореме Л. Диксона.* — Алгебра и логика, **22** , No. 5 (1983), 504–517.
5. *Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп.* Издание 17-е, Новосибирск, 2010.
6. В. А. Койбаев, *Замкнутые сети в линейных группах.* — Вестн. СПбГУ, Сер. 1, No. 1 (2013), 25–33.
7. Н. А. Джусоева, С. Ю. Итарова, В. А. Койбаев, *Теорема о вложении элементарной сети.* — Владикавказ. матем. журнал, Вып. 2 (2018), 57–61.

Koibaev V. A. Embedding an elementary net into a gap of nets.

Let R be a commutative unital ring and $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. A matrix $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, of additive subgroups σ_{ij} of the ring R is called a net or carpet over the ring R of order n if $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ for all i, r, j. A net without diagonal is said to be an *elementary net* or *elementary carpet.* Suppose that $n \geqslant 3$. Consider a matrix $\omega = (\omega_{ij})$ of additive subgroups ω_{ij} of the ring R, where ω_{ij}, $i \neq j$, is defined by the rule: $\omega_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{kj}$, $k \neq i, j$. The set $\omega = (\omega_{ij})$ of elementary subgroups ω_{ij} of the ring R is an elementary net, which is called *elementary derived net.* The diagonal of the derived net ω is defined by the formula $\omega_{ii} = \sum\limits_{k \neq s} \sigma_{ik}\sigma_{ks}\sigma_{si}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, where the sum is taken over all $1 \leqslant k \neq s \leqslant n$. The following result is proved. An elementary net σ generates the derived net $\omega = (\omega_{ij})$ and the net $\Omega = (\Omega_{ij})$, which is associated with the elementary group $E(\sigma)$, where $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$, $\omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$, $\Omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$ $(1 \leqslant i, r, j \leqslant n)$. In particular, the matrix ring $M(\omega)$ is a two-sided ideal of the ring $M(\Omega)$. For nets of order $n = 3$ we establish a more precise result.

Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова
ул. Ватутина, 46
362025, Владикавказ, Россия;
Южный математический институт ВНЦ РАН
ул. Ватутина, 53,
362027, Владикавказ, Россия
E-mail: koibaev-K1@yandex.ru

Поступило 26 сентября 2019 г.