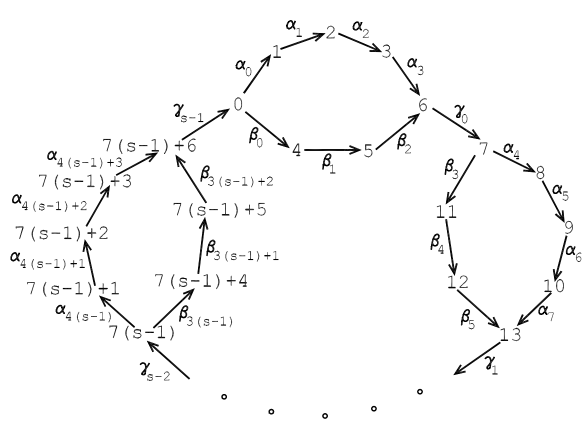
Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 484, 2019 г.

М. А. Качалова

КОЛЬЦО КОГОМОЛОГИЙ ХОХШИЛЬДА САМОИНЪЕКТИВНЫХ АЛГЕБР ДРЕВЕСНОГО ТИПА E_7

§1. Введение

Настоящая работа продолжает серию статей, посвящённых исследованию когомологий Хохшильда самоинъективных базисных алгебр над алгебраически замкнутым полем, имеющих конечный тип представления. Согласно классификации Ридтманн, стабильный AR-колчан такой алгебры описывается с помощью некоторого ассоциированного дерева, которое совпадает с одной из схем Дынкина A_n, D_n, E_6, E_7 или E_8 (см. [1]). Для алгебр типа A_n, D_n и E_6 структура кольца когомологий Хохшильда полностью исследована и описана в [2–5] (тип A_n), [6–11] (тип D_n), [12, 13] (тип E_6). В данной статье мы изучим кольцо когомологий Хохшильда алгебр типа E_7. А именно, пусть $\mathcal{Q}_s$ ($s \in \mathbb{N}$) – следующий колчан:



Ключевые слова: когомологии Хохшильда, самоинъективные алгебры, бимодульная резольвента.

Тогда любая алгебра типа E_7 производно эквивалентна алгебре $R_s = K[\mathcal{Q}_s]/I$, где K – поле, а I – идеал в алгебре путей $K[\mathcal{Q}_s]$ колчана $\mathcal{Q}_s$, порождённый

а) всеми путями длины 6;

б) выражениями вида $\alpha^4 - \beta^3$, $\alpha\gamma\beta$, $\beta\gamma\alpha$, $\beta^i\gamma\beta^{4-i}$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$.

Замечание 1. Здесь и далее индексы вершин e_i лежат в $\mathbb{Z}_{7s}$, индексы стрелок α_i – в $\mathbb{Z}_{4s}$, β_i – в $\mathbb{Z}_{3s}$, а индексы γ_i в $\mathbb{Z}_s$.

Замечание 2. Мы будем часто опускать индексы у стрелок α_i, β_i и γ_i, поскольку значения нижних индексов ясны из контекста.

Данная статья посвящена изучению структуры кольца когомологий Хохшильда для алгебры R_s. Для этой алгебры мы получим описание кольца когомологий Хохшильда в терминах образующих с соотношениями. Заметим, что для исследования структуры кольца когомологий мы построим бимодульную резольвенту алгебры R_s, которая также представляет интерес как отдельный результат.

§2. Формулировка основного результата

Далее везде предполагается, что $n = 7$.

Пусть $\mathrm{HH}^t(R)$ – t-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R с коэффициентами в R. Пусть ℓ – целая часть, а r – остаток от деления t на 17, m – целая часть от деления r на 2.

Рассмотрим случай $s > 1$. Для описания кольца когомологий Хохшильда алгебры R_s введём следующие условия на произвольную степень t:

(1) $r = 0$, $m + 9\ell \equiv 0(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(2) $r = 0$, $m + 9\ell \equiv 1(s)$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(3) $r = 1$, $m + 9\ell \equiv 0(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(4) $r = 3$, $m + 9\ell \equiv 0(s)$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(5) $r = 4$, $m + 9\ell \equiv 1(s)$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(6) $r = 5$, $m + 9\ell \equiv 0(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$, $\operatorname{char} K = 3$;

(7) $r = 6$, $m + 9\ell \equiv 1(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$, $\operatorname{char} K = 3$;

(8) $r = 7$, $m + 9\ell \equiv 0(s)$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(9) $r = 8$, $m + 9\ell \equiv 0(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(10) $r = 8$, $m + 9\ell \equiv 1(s)$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(11) $r = 9$, $m + 9\ell \equiv 0(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(12) $r = 10$, $m + 9\ell \equiv 0(s)$, $\ell \not\vdots\, 2$, $\operatorname{char} K = 3$;

(13) $r = 11$, $m + 9\ell \equiv 0(s)$, $\ell \not\vdots\, 2$, $\operatorname{char} K = 3$;

(14) $r = 12$, $m + 9\ell \equiv 0(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(15) $r = 13$, $m + 9\ell \equiv 0(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(16) $r = 15$, $m + 9\ell \equiv 0(s)$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(17) $r = 16$, $m + 9\ell \equiv 0(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(18) $r = 16$, $m + 9\ell \equiv 1(s)$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$.

Положим

$$M_0 = \frac{s}{\text{НОД}(s,9)}, \quad M = \begin{cases} 17M_0, & \operatorname{char} K = 2 \text{ или } M_0 \,\vdots\, 2; \\ 34M_0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Замечание 3. В параграфе 3 мы покажем, что минимальный период бимодульной резольвенты R_s равен M.

Пусть $\{t_{1,i}, \ldots, t_{\alpha_i,i}\}$ – множество всех степеней t, удовлетворяющих условиям i-го пункта из списка выше, и таких, что $0 \leqslant t_{j,i} < M$ ($j = 1, \ldots, \alpha_i$). Рассмотрим множество

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{18} \left\{ X^{(i)}_{t_{j,i}} \right\}_{j=1}^{\alpha_i} \cup \{T\}$$

и на кольце многочленов $K[\mathcal{X}]$ введём градуировку такую, что

$$\begin{aligned} &\deg X^{(i)}_{t_{j,i}} = t_{j,i} \text{ для всех } i = 1, \ldots, 18 \text{ и } j = 1, \ldots, \alpha_i; \\ &\deg T = M. \end{aligned} \qquad (\circ)$$

Замечание 4. Далее мы будем часто использовать упрощённое обозначение $X^{(i)}$ для $X^{(i)}_{t_{j,i}}$, поскольку значения нижних индексов ясны из контекста.

Обозначение.

$$\widetilde{X}^{(i)} = \begin{cases} X^{(i)}, & \deg \widetilde{X}^{(i)} < \deg T; \\ TX^{(i)}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A} = K[\mathcal{X}]/I$, где I – идеал, порождённый однородными элементами, соответствующими следующим соотношениям.

$$\begin{aligned}
&X^{(3)}X^{(2)} = X^{(3)}X^{(3)} = X^{(3)}X^{(5)} = X^{(3)}X^{(6)} = 0;\\
&X^{(3)}X^{(7)} = X^{(3)}X^{(10)} = X^{(3)}X^{(11)} = X^{(3)}X^{(12)} = 0;\\
&X^{(3)}X^{(13)} = X^{(3)}X^{(15)} = X^{(3)}X^{(18)} = 0;\\
&X^{(3)}X^{(1)} = \widetilde{X}^{(3)}, \quad X^{(3)}X^{(4)} = \widetilde{X}^{(5)}, \quad X^{(3)}X^{(8)} = \widetilde{X}^{(10)};\\
&X^{(3)}X^{(9)} = \widetilde{X}^{(11)}, \quad X^{(3)}X^{(14)} = \widetilde{X}^{(15)}, \quad X^{(3)}X^{(16)} = \widetilde{X}^{(18)};\\
&X^{(3)}X^{(17)} = 3\widetilde{X}^{(2)};
\end{aligned}$$

$$X^{(4)}X^{(4)} = \begin{cases} -s\widetilde{X}^{(7)}, & \operatorname{char} K = 3, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{r1}$$

$$X^{(4)}X^{(9)} = \begin{cases} -s\widetilde{X}^{(13)}, & \operatorname{char} K = 3, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{r2}$$

$$X^{(8)}X^{(17)} = \begin{cases} s\widetilde{X}^{(7)}, & \operatorname{char} K = 3, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{r3}$$

$$X^{(9)}X^{(16)} = \begin{cases} -s\widetilde{X}^{(7)}, & \operatorname{char} K = 3, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{r4}$$

$$X^{(14)}X^{(17)} = \begin{cases} -s\widetilde{X}^{(13)}, & \operatorname{char} K = 3, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{r5}$$

Остальные соотношения опишем в виде таблиц (номера (r1)–(r5) в ячейках таблиц означают номер соотношения, в котором описано произведение соответствующих элементов).

	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(4)}$	$X^{(6)}$	$X^{(7)}$	$X^{(8)}$
$X^{(1)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(4)}$	$X^{(6)}$	$X^{(7)}$	$X^{(8)}$
$X^{(2)}$		0	0	0	0	0
$X^{(4)}$			(r1)	$-sX^{(10)}$	0	0
$X^{(6)}$				0	0	0
$X^{(7)}$					0	0
$X^{(8)}$						0

	$X^{(9)}$	$X^{(12)}$	$X^{(13)}$	$X^{(14)}$	$X^{(16)}$	$X^{(17)}$
$X^{(1)}$	$X^{(9)}$	$X^{(12)}$	$X^{(13)}$	$X^{(14)}$	$X^{(16)}$	$X^{(17)}$
$X^{(2)}$	$X^{(10)}$	0	0	0	0	$-X^{(18)}$
$X^{(4)}$	(r2)	$-sX^{(15)}$	0	$X^{(16)}$	0	0
$X^{(6)}$	$sX^{(15)}$	0	$-X^{(18)}$	$-sX^{(2)}$	0	$sX^{(5)}$
$X^{(7)}$	0	$X^{(18)}$	0	0	0	0
$X^{(8)}$	$-X^{(16)}$	$-sX^{(2)}$	0	0	0	(r3)

	$X^{(9)}$	$X^{(12)}$	$X^{(13)}$	$X^{(14)}$	$X^{(16)}$	$X^{(17)}$
$X^{(9)}$	$X^{(17)}$	$-sX^{(3)}$	0	$X^{(4)}$	(r4)	$3X^{(8)}$
$X^{(12)}$		0	$X^{(5)}$	$-X^{(6)}$	$sX^{(10)}$	$-sX^{(11)}$
$X^{(13)}$			0	$X^{(7)}$	0	0
$X^{(14)}$				$-X^{(8)}$	0	(r5)
$X^{(16)}$					0	0
$X^{(17)}$						$-3X^{(16)}$

Теорема 1. *Пусть $s > 1$, $R = R_s$ – алгебра типа E_7. Тогда алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ как градуированная K-алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{A}$.*

Рассмотрим случай $s = 1$.

Введём множество

$$\mathcal{X}'=\begin{cases}\mathcal{X}\cup\left\{X_0^{(19)},X_0^{(20)},X_0^{(21)},X_0^{(22)},X_0^{(23)},X_0^{(24)},X_0^{(25)}\right\}, & \operatorname{char}K\neq 2;\\ \mathcal{X}\cup\left\{X_0^{(20)},X_0^{(21)},X_0^{(22)},X_0^{(23)},X_0^{(24)},X_0^{(25)}\right\}, & \operatorname{char}K=2;\end{cases}$$

и на кольце многочленов $K[\mathcal{X}']$ введём градуировку такую, что

$$\deg X_{t_{j,i}}^{(i)} = t_{j,i} \text{ для всех } i = 1,\dots,18 \text{ и } j = 1,\dots,\alpha_i;$$
$$\deg T = M \text{ (аналогично } (\circ));$$
$$\deg X_0^{(i)} = 0 \text{ для всех } i = 19,\dots,25.$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}' = K[\mathcal{X}']/I'$, где идеал I' порождён однородными элементами, соответствующими соотношениям, которые уже были описаны для случая $s > 1$, а также следующим соотношениям:

$$X^{(1)}X^{(i)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(i)}, & t_1 = 0; \\ \widetilde{X}^{(2)}, & t_1 > 0,\ i \in [22, 25],\ \operatorname{char} K = 2; \\ 0, & \text{в противном случае}; \end{cases}$$

$$X^{(9)}X^{(i)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(10)}, & i \in [22, 25],\ \operatorname{char} K = 2; \\ 0, & \text{в противном случае}; \end{cases}$$

$$X^{(17)}X^{(i)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(18)}, & i \in [22, 25],\ \operatorname{char} K = 2; \\ 0, & \text{в противном случае}; \end{cases}$$

$$X^{(j)}X^{(i)} = 0, \quad j \in [2, 25] \setminus \{9, 17\}, \quad i \in [19, 25],$$

где t_1 обозначает степень элемента $X^{(1)}$.

Теорема 2. *Пусть $s = 1$, $R = R_1$ – алгебра типа E_7. Тогда алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ как градуированная K-алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{A}'$.*

Замечание 5. Из описания колец $\mathrm{HH}^*(R)$ в теоремах 1 и 2 следует, в частности, что они коммутативны.

§3. Бимодульная резольвента

Будем строить минимальную проективную бимодульную резольвенту R в следующем виде:

$$\cdots \longrightarrow Q_3 \xrightarrow{d_2} Q_2 \xrightarrow{d_1} Q_1 \xrightarrow{d_0} Q_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

Пусть Λ – обёртывающая алгебра алгебры R. Тогда R–R-бимодули можно рассматривать как левые Λ-модули.

Обозначения.

(1) Через e_i, $i \in \mathbb{Z}_{7s} = \{0, 1, \ldots, 7s - 1\}$, обозначаем идемпотенты алгебры $K[\mathcal{Q}_s]$, соответствующие вершинам колчана $\mathcal{Q}_s$.

(2) Обозначим через $P_{i,j} = R(e_i \otimes e_j)R = \Lambda(e_i \otimes e_j)$, $i, j \in \mathbb{Z}_{7s}$. Заметим, что модули $P_{i,j}$, составляют полное множество (попарно неизоморфных) неразложимых проективных Λ-модулей.

(3) Для $a \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{N}$ через $(a)_t$ обозначим наименьший неотрицательный вычет a по модулю t (в частности, $0 \leqslant (a)_t \leqslant t - 1$).

Пусть $R = R_s$. Определим автоморфизм $\sigma\colon R \to R$, действующий следующим образом:

$$\sigma(e_i) = e_{i+9n}, \quad \sigma(\gamma_i) = -\gamma_{i+9}, \quad \sigma(\alpha_i) = -\alpha_{i+9\cdot 4},$$

$$\sigma(\beta_i) = \begin{cases} \beta_{i+9\cdot 3}, & (i)_3 = 0; \\ -\beta_{i+9\cdot 3}, & (i)_3 \neq 0; \end{cases}$$

Введём вспомогательные функции $f\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ и $f\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, действующие следующим образом:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y; \\ 0, & x \neq y, \end{cases} \qquad f(x,y_1,y_2) = \begin{cases} 1, & y_1 \leqslant x \leqslant y_2; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Введём Q_r ($r \leqslant 16$). Напомним, что для степени r через m обозначаем целую часть от деления r на 2. Положим

$$Q_{2m} = \bigoplus_{r=0}^{s-1} Q'_{2m,r}, \quad 0 \leqslant m \leqslant 8,$$

$$Q_{2m+1} = \bigoplus_{r=0}^{s-1} Q'_{2m+1,r}, \quad 0 \leqslant m \leqslant 7.$$

$$Q'_{2m,r} = \left(\bigoplus_{i=0}^{f(m,2,5)} P_{b_0(r,m,i),7r}\right) \oplus \bigoplus_{j=0}^{2} \bigoplus_{i=0}^{f(m+j,4)+f(m+j,6)} P_{b_1(r,m,i,j),7r+j+1}$$
$$\oplus \bigoplus_{j=0}^{1} \bigoplus_{i=0}^{f(m+j,3,6)} P_{b_2(r,m,i,j),7r+j+4} \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{f(m,3,6)} P_{b_3(r,m,i),7r+6}\right),$$

где

$$\begin{aligned}
b_0(r,m,i) =& 7(r+m) - f(i,0)(1 - f(m,0) - f(m,6) - f(m,8));\\
b_1(r,m,i,j) =& 7(r+m) + m + 1 + j - 4f(i,0)f(m+j,4,5)\\
&- f(m+j,6)(f(i,0)+3)\\
&- 3f(m+j,7) - 8f(m+j,8,10);\\
b_2(r,m,i,j) =& 7(r+m) + m + 4 + j - 5f(m+j,2)\\
&- f(m+j,3,4)(2f(i,0)+3) - f(m+j,5)(3f(i,1)+5)\\
&- f(m+j,6)(3f(i,0)+5) - 8f(m+j,7,9);\\
b_3(r,m,i) =& 7(r+m) + 6 + f(i,0)(f(m,1)+f(m,7)) + f(i,1).
\end{aligned}$$

$$Q'_{2m+1,r} = \left(\bigoplus_{i=0}^{1+f(m,2,4)-f(m,7)} P_{b_4(r,m,i),7r}\right) \oplus \bigoplus_{j=0}^{2} P_{b_5(r,m,j),7r+j+1}$$
$$\oplus \bigoplus_{j=0}^{1} \bigoplus_{i=0}^{f(m+j,4)} P_{b_6(r,m,i,j),7r+j+4} \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{1+f(m,3,5)-f(m,0)} P_{b_7(r,m,i),7r+6}\right),$$

где

$$\begin{aligned}
b_4(r,m,i) =& 7(r+m)+m+1+3f(i,1)f(m,0,1)\\
&+f(m,2)(f(i,0)-2f(i,2))+f(m,3)(f(i,1)-2f(i,0))\\
&-2f(m,4)(f(i,1)+2f(i,2))\\
&-2f(m,5,6)(1+f(i,0))-2f(m,7);\\
b_5(r,m,j) =& 7(r+m)+m+j+2+2f(m+j,2,3)-2f(m+j,6,9);\\
b_6(r,m,i,j) =& 7(r+m)+m+j+5-2f(m+j,3)\\
&-f(m+j,4)(2+f(i,0))-3f(m+j,5)-5(f(m+j,6)\\
&+f(m+j,7))-2f(m+j,8);\\
b_7(r,m,i) =& 7(r+m+1)+m+3f(m,1,2)f(i,1)\\
&+f(m,3)(f(i,0)-2f(i,2))+f(m,4)(f(i,1)-2f(i,0))\\
&-2f(m,5)(f(i,1)+2f(i,2))\\
&-2f(m,6,7)(2f(i,0)+f(i,1)).
\end{aligned}$$

Если рассматривать элементы Q_i как векторы-столбцы, то дифференциалы описываются некоторыми матрицами (которые умножаются справа на вектор-столбец). Опишем покомпонентно матрицы дифференциалов d_0, d_1 и d_{16} (описание всех d_r для $r \leqslant 16$ можно посмотреть в [16]).

Замечание 6. Нумерацию строк и столбцов в матрицах дифференциалов всюду начинаем с нуля.

Обозначения.

(1) Через $w_{i\to j}$ обозначим путь из i-й вершины в j-ю.

(2) Для j-й колонки матрицы дифференциала обозначим через j_2 целую часть от деления j на s.

Описание d_0

$d_0 : Q_1 \to Q_0$ – матрица размера $(7s \times 8s)$.

Если $0 \leqslant j < 2s$, то

$$(d_0)_{ij} = \begin{cases} w_{7(j+m)\to 7(j+m)+1+3f(j_2,1)} \otimes e_{7j}, \quad i = j_s; \\ -e_{7(j+m)+1+3f(j_2,1)} \otimes w_{7j\to 7j+1+3f(j_2,1)}, \\ i = j + s + 2sf(j_2, 1); \\ 0, \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 5s$, то

$$(d_0)_{ij} = \begin{cases} w_{7(j+m)+j_2-1\to 7(j+m)+j_2+2f(j_2,4)} \otimes e_{7j+j_2-1}, \quad i = j - s; \\ -e_{7(j+m)+j_2+2f(j_2,4)} \otimes w_{7j+j_2-1\to 7j+j_2+2f(j_2,4)}, \\ i = j + 2sf(j_2, 4); \\ 0, \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 7s$, то

$$(d_0)_{ij} = \begin{cases} w_{7(j+m)+j_2-1\to 7(j+m)+j_2} \otimes e_{7j+j_2-1}, \quad i = j - s; \\ -e_{7(j+m)+j_2} \otimes w_{7j+j_2-1\to 7j+j_2}, \quad i = j; \\ 0, \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $7s \leqslant j < 8s$, то

$$(d_0)_{ij} = \begin{cases} -e_{7(j+m+1)} \otimes w_{7j+6\to 7(j+1)}, \quad i = (j+1)_s; \\ w_{7(j+m)+6\to 7(j+m+1)} \otimes e_{7j+6}, \quad i = j - s; \\ 0, \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Описание d_1

$d_1 : Q_2 \to Q_1$ – матрица размера $(8s \times 7s)$.

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$(d_1)_{ij} = \begin{cases} w_{7(j+m)+1+j_1+2f(j_1,3)\to 7(j+m+1)-1} \otimes w_{7j\to 7j+j_1}, \\ \qquad i = j + s(j_1 + 1 - f(j_1, 0)), \ 0 \leqslant j_1 \leqslant 4; \\ -w_{7(j+m+1)-3+j_1\to 7(j+m+1)-1} \otimes w_{7j\to 7j+j_1+3(1-f(j_1,0))}, \\ \qquad i = j + s(j_1 + 4 - 3f(j_1, 0)), \ 0 \leqslant j_1 \leqslant 3; \\ 0, \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 2s$, то

$$(d_1)_{ij} = \begin{cases} w_{7(j+m+1)+1+j_1 \to 7(j+m+1)+2} \otimes w_{7j+1\to 7(j+1)+j_1}, \\ \qquad i = (j+1)_s + 2sf(j_1,1),\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 2; \\ w_{7(j+m)+2+j_1+2f(j_1,2,3)\to 7(j+m+1)+2} \otimes w_{7j+1\to 7j+1+j_1+2f(j_1,3)}, \\ \qquad i = j + s(1+j_1+2f(j_1,3)),\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 4; \\ 0, \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 3s$, то

$$(d_1)_{ij} = \begin{cases} w_{7(j+m+1)+1+j_1 \to 7(j+m+1)+3} \otimes w_{7j+2\to 7(j+1)+j_1}, \\ \qquad i = (j+1)_s + s(j_1+1-f(j_1,0)),\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 3; \\ w_{7(j+m)+3+j_1+2f(j_1,1,2)\to 7(j+m+1)+3} \otimes w_{7j+2\to 7j+2+j_1+2f(j_1,2)}, \\ \qquad i = j + s(1+j_1+2f(j_1,2)),\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 3; \\ 0, \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 4s$, то

$$(d_1)_{ij} = \begin{cases} e_{7(j+m+1)+4} \otimes w_{7j+3\to 7(j+1)}, \quad i = s + (j+1)_s; \\ w_{7(j+m)+6\to 7(j+m+1)+4} \otimes e_{7j+3}, \quad i = j+s; \\ w_{7(j+m+1)\to 7(j+m+1)+4} \otimes w_{7j+3\to 7j+6}, \quad i = j+4s; \\ 0, \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 5s$, то

$$(d_1)_{ij} = \begin{cases} w_{7(j+m+1)+4+j_1 \to 7(j+m+1)+5} \otimes w_{7j+4\to 7(j+1)+4f(j_1,1)}, \\ \qquad i = (j+1)_s + s(1+4f(j_1,1)),\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 2; \\ w_{7(j+m)+5+j_1\to 7(j+m+1)+5} \otimes w_{7j+4\to 7j+4+j_1}, \\ \qquad i = j + s(j_1+1),\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 3; \\ 0, \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 6s$, то

$$(d_1)_{ij} = \begin{cases} e_{7(j+m+1)+1} \otimes w_{7j+5\to 7(j+1)}, \quad i = (j+1)_s; \\ w_{7(j+m)+6\to 7(j+m+1)+1} \otimes e_{7j+5}, \quad i = j+s; \\ w_{7(j+m+1)\to 7(j+m+1)+1} \otimes w_{7j+5\to 7j+6}, \quad i = j+2s; \\ 0, \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $6s \leqslant j < 7s$, то

$$(d_1)_{ij} = \begin{cases} w_{7(j+m+1)+1+j_1+2f(j_1,3,4)\to 7(j+m+2)} \otimes w_{7j+6\to 7(j+1)+j_1+2f(j_1,4)}, \\ \qquad i = (j+1)_s + s(j_1 + f(j_1,1,4) + 2f(j_1,4)),\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 5; \\ w_{7(j+m+1)\to 7(j+m+2)} \otimes e_{7j+6}, \quad i = j+s; \\ 0, \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Описание d_{16}

$d_{16} : Q_{17} \to Q_{16}$ – матрица размера $(7s \times 7s)$.

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$(d_{16})_{ij} = \begin{cases} -e_{7(j+m+1)} \otimes w_{7j\to 7(j+1)}, \quad i = (j+1)_s; \\ (-1)^{j_1} w_{7(j+m)+j_1\to 7(j+m+1)} \otimes w_{7j\to 7j+j_1}, \\ \qquad i = j + sj_1,\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 7; \\ 0, \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 2s$, то

$$(d_{16})_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j_1} w_{7(j+m+1)+j_1\to 7(j+m+1)+1} \otimes w_{7j+1\to 7(j+1)+j_1}, \\ \qquad i = (j+1)_s + sj_1,\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 2; \\ (-1)^{j_1} w_{7(j+m)+1+j_1\to 7(j+m+1)+1} \otimes w_{7j+1\to 7j+1+j_1}, \\ \qquad i = j + sj_1,\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 3; \\ -w_{7(j+m)+6\to 7(j+m+1)+1} \otimes w_{7j+1\to 7j+6}, \quad i = j+5s; \\ 0, \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 3s$, то

$$(d_{16})_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j_1+1} w_{7(j+m+1)+j_1\to 7(j+m+1)+2} \otimes w_{7j+2\to 7(j+1)+j_1}, \\ \qquad i = (j+1)_s + sj_1,\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 3; \\ (-1)^{j_1} w_{7(j+m)+2+j_1\to 7(j+m+1)+2} \otimes w_{7j+2\to 7j+2+j_1}, \\ \qquad i = j + sj_1,\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 2; \\ w_{7(j+m)+6\to 7(j+m+1)+2} \otimes w_{7j+2\to 7j+6}, \quad i = j+4s; \\ 0, \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 4s$, то

$$(d_{16})_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j_1} w_{7(j+m+1)+j_1 \to 7(j+m+1)+3} \otimes w_{7j+3\to 7(j+1)+j_1}, \\ \qquad i = (j+1)_s + sj_1,\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 4; \\ (-1)^{j_1} w_{7(j+m)+3+3j_1 \to 7(j+m+1)+3} \otimes w_{7j+3\to 7j+3+3j_1}, \\ \qquad i = j + 3sj_1,\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 2; \\ 0, \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 5s$, то

$$(d_{16})_{ij} = \begin{cases} -w_{7(j+m+1)+4j_1 \to 7(j+m+1)+4} \otimes w_{7j+4\to 7(j+1)+4j_1}, \\ \qquad i = (j+1)_s + 4sj_1,\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 2; \\ (-1)^{j_1} w_{7(j+m)+4+j_1 \to 7(j+m+1)+4} \otimes w_{7j+4\to 7j+4+j_1}, \\ \qquad i = j + sj_1,\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 3; \\ 0, \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 6s$, то

$$(d_{16})_{ij} = \begin{cases} w_{7(j+m+1) \to 7(j+m+1)+5} \otimes w_{7j+5\to 7(j+1)}, \quad i = (j+1)_s; \\ (-1)^{j_1} w_{7(j+m+1)+4+j_1 \to 7(j+m+1)+5} \otimes w_{7j+5\to 7(j+1)+4+j_1}, \\ \qquad i = (j+1)_s + s(4+j_1),\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 2; \\ (-1)^{j_1} w_{7(j+m)+5+j_1 \to 7(j+m+1)+5} \otimes w_{7j+5\to 7j+5+j_1}, \\ \qquad i = j + sj_1,\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 2; \\ 0, \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $6s \leqslant j < 7s$, то

$$(d_{16})_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j_1+1} w_{7(j+m+1)+j_1 \to 7(j+m+1)+6} \otimes w_{7j+6\to 7(j+1)+j_1}, \\ \qquad i = (j+1)_s + sj_1,\ 0 \leqslant j_1 \leqslant 7; \\ w_{7(j+m)+6 \to 7(j+m+1)+6} \otimes e_{7j+6}, \quad i = j; \\ 0, \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 3. *Пусть $R = R_s$ – алгебра типа E_7. Тогда минимальная проективная резольвента Λ-модуля R имеет вид:*

$$\cdots \longrightarrow Q_3 \xrightarrow{d_2} Q_2 \xrightarrow{d_1} Q_1 \xrightarrow{d_0} Q_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0, \qquad (+)$$

где ε – отображение умножения ($\varepsilon(a\otimes b) = ab$); Q_r ($r \leqslant 16$) описаны выше, d_r ($r \leqslant 16$) описаны в [16]; далее $Q_{17\ell+r}$, где $\ell \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant r \leqslant 16$, получается из Q_r заменой каждого прямого слагаемого $P_{i,j}$ на $P_{\sigma^\ell(i),j}$ соответственно (здесь $\sigma(i) = j$, если $\sigma(e_i) = e_j$), а дифференциал

$d_{17\ell+r}$ получается из d_r применением σ^ℓ ко всем левым компонентам тензоров из соответствующей матрицы.

Для доказательства того, что члены резольвенты Q_i имеют указанный вид, введём $P_i = Re_i$ – проективные накрытия простых R-модулей S_i, соответствующих вершинам колчана $\mathcal{Q}_s$. Найдём минимальные проективные резольвенты простых R-модулей S_i.

Обозначение. Для R-модуля M через $\Omega^m(M)$ обозначим его m-ую сизигию.

Замечание 7. В дальнейшем гомоморфизм умножения справа на путь w также обозначаем через w.

Лемма 4. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля S_{7r} имеет вид*

$$\cdots \longrightarrow P_{7(r+6)+6} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ -\beta\end{smallmatrix}\right)} P_{7(r+6)+3} \oplus P_{7(r+6)+5} \xrightarrow{(\alpha^3\ \beta^2)}$$
$$\longrightarrow P_{7(r+6)} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\gamma\alpha^2\\ -\gamma\beta^2\end{smallmatrix}\right)} P_{7(r+5)+2} \oplus P_{7(r+5)+4} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha^2\gamma & 0\\ \alpha^2 & \beta\end{smallmatrix}\right)}$$
$$\longrightarrow P_{7(r+4)+6} \oplus P_{7(r+5)} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\beta & 0\\ -\alpha & \gamma\alpha\\ -\alpha^3 & 0\end{smallmatrix}\right)} P_{7(r+4)+5} \oplus P_{7(r+4)+3} \oplus P_{7(r+4)+1} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\beta^2\gamma & \alpha^3\gamma & 0\\ \beta^2 & 0 & \alpha\end{smallmatrix}\right)}$$
$$\longrightarrow P_{7(r+3)+6} \oplus P_{7(r+4)} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha^2 & 0\\ -\beta & \gamma\beta\\ -\beta^2 & 0\end{smallmatrix}\right)} P_{7(r+3)+2} \oplus P_{7(r+3)+5} \oplus P_{7(r+3)+4} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha^2\gamma & \beta^2\gamma & 0\\ \alpha^2 & 0 & \beta\end{smallmatrix}\right)}$$
$$\longrightarrow P_{7(r+2)+6} \oplus P_{7(r+3)} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\beta^2 & 0\\ -\alpha & \gamma\alpha\\ -\alpha^3 & 0\end{smallmatrix}\right)} P_{7(r+2)+4} \oplus P_{7(r+2)+3} \oplus P_{7(r+2)+1} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\beta\gamma & \alpha^3\gamma & 0\\ \beta & 0 & \alpha\end{smallmatrix}\right)}$$
$$\longrightarrow P_{7(r+1)+6} \oplus P_{7(r+2)} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha^2 & 0\\ -\beta & \gamma\beta\end{smallmatrix}\right)} P_{7(r+1)+2} \oplus P_{7(r+1)+5} \xrightarrow{(\alpha^2\gamma\ \beta^2\gamma)}$$
$$\longrightarrow P_{7r+6} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha^3\\ -\beta^2\end{smallmatrix}\right)} P_{7r+1} \oplus P_{7r+4} \xrightarrow{(\alpha\ \beta)} P_{7r} \longrightarrow S_{7r} \longrightarrow 0.$$

При этом $\Omega^{15}(S_{7r}) \simeq S_{7(r+7)+6}$.

Лемма 5. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля S_{7r+1} имеет вид*

$$\cdots \longrightarrow P_{7r+2} \xrightarrow{\alpha} P_{7r+1} \longrightarrow S_{7r+1} \longrightarrow 0.$$

При этом $\Omega^2(S_{7r+1}) \simeq S_{7(r+1)+2}$.

Лемма 6. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля S_{7r+2} имеет вид*

$$\cdots \longrightarrow P_{7r+3} \xrightarrow{\alpha} P_{7r+2} \longrightarrow S_{7r+2} \longrightarrow 0.$$

При этом $\Omega^2(S_{7r+2}) \simeq S_{7(r+1)+3}$.

Лемма 7. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля S_{7r+3} имеет вид*

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow P_{7(r+6)+1} \xrightarrow{\alpha} P_{7(r+6)} \xrightarrow{\gamma\beta} P_{7(r+5)+5} \xrightarrow{\beta^2\gamma} P_{7(r+4)+6} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ -\beta^2\end{smallmatrix}\right)}\\ \longrightarrow P_{7(r+4)+3} \oplus P_{7(r+4)+4} \xrightarrow{(\alpha^3\ \beta)} P_{7(r+4)} \xrightarrow{\gamma\alpha^2} P_{7(r+3)+2} \xrightarrow{\alpha^2\gamma}\\ \longrightarrow P_{7(r+2)+6} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha^3\\ -\beta\end{smallmatrix}\right)} P_{7(r+2)+1} \oplus P_{7(r+2)+5} \xrightarrow{(\alpha\ \beta^2)} P_{7(r+2)} \xrightarrow{\gamma\beta^2}\\ \longrightarrow P_{7(r+1)+4} \xrightarrow{\beta\gamma} P_{7r+6} \xrightarrow{\alpha} P_{7r+3} \longrightarrow S_{7r+3} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

При этом $\Omega^{13}(S_{7r+3}) \simeq S_{7(r+7)+1}$.

Лемма 8. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля S_{7r+4} имеет вид*

$$\cdots \longrightarrow P_{7r+5} \xrightarrow{\beta} P_{7r+4} \longrightarrow S_{7r+4} \longrightarrow 0.$$

При этом $\Omega^2(S_{7r+4}) \simeq S_{7(r+1)+5}$.

Лемма 9. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля S_{7r+5} имеет вид*

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow P_{7(r+7)+4} \xrightarrow{\beta} P_{7(r+7)} \xrightarrow{\gamma\alpha} P_{7(r+6)+3} \xrightarrow{\alpha^3\gamma}\\ \longrightarrow P_{7(r+5)+6} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha^2\\ -\beta\end{smallmatrix}\right)} P_{7(r+5)+2} \oplus P_{7(r+5)+5} \xrightarrow{(\alpha^2\ \beta^2)}\\ \longrightarrow P_{7(r+5)} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\gamma\beta^2\\ -\gamma\alpha^3\end{smallmatrix}\right)} P_{7(r+4)+4} \oplus P_{7(r+4)+1} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\beta\gamma & 0\\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)}\\ \longrightarrow P_{7(r+3)+6} \oplus P_{7(r+4)} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ -\beta & \gamma\beta\end{smallmatrix}\right)} P_{7(r+3)+3} \oplus P_{7(r+3)+5} \xrightarrow{(\alpha^3\gamma\ \beta^2\gamma)}\\ \longrightarrow P_{7(r+2)+6} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\alpha^2\\ -\beta^2\end{smallmatrix}\right)} P_{7(r+2)+2} \oplus P_{7(r+2)+4} \xrightarrow{(\alpha^2\ \beta)} P_{7(r+2)} \xrightarrow{\gamma\alpha^3}\\ \longrightarrow P_{7(r+1)+1} \xrightarrow{\alpha\gamma} P_{7r+6} \xrightarrow{\beta} P_{7r+5} \longrightarrow S_{7r+5} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

При этом $\Omega^{15}(S_{7r+5}) \simeq S_{7(r+8)+4}$.

Лемма 10. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля* S_{7r+6} *имеет вид*

$$\cdots \longrightarrow P_{7r+7} \xrightarrow{\gamma} P_{7r+6} \longrightarrow S_{7r+6} \longrightarrow 0.$$

При этом $\Omega^2(S_{7r+6}) \simeq S_{7(r+2)}$.

Доказательство. Доказательства лемм состоят из прямой проверки точности указанных последовательностей и не представляют труда. □

Нам потребуется лемма Хаппеля (см. [14]), уточнённая в [3]:

Лемма 11 (Happel)**.** *Пусть*

$$\cdots \to Q_m \to Q_{m-1} \to \cdots \to Q_1 \to Q_0 \to R \to 0$$

– минимальная проективная бимодульная резольвента R. *Тогда*

$$Q_m \cong \bigoplus_{i,j} P_{i,j}^{\dim \operatorname{Ext}_R^m(S_j,S_i)}.$$

Доказательство теоремы 3. То, что элементы Q_i имеют указанный вид, непосредственно следует из лемм $4-10$ и леммы Хаппеля.

Как доказано в [15], для доказательства точности последовательности (+) в членах Q_m ($m \leqslant 16$) достаточно показать, что $d_m d_{m+1} = 0$. Это соотношение проверяется прямыми вычислениями произведений соответствующих матриц.

Из точности в члене Q_{17} следует, что $\Omega^{17}({}_\Lambda R) \simeq {}_1R_\sigma$, где $\Omega^{17}({}_\Lambda R) = \mathrm{Im} d_{16}$ – 17-я сизигия модуля R, а ${}_1R_\sigma$ – скрученный бимодуль. Следовательно, в членах Q_t ($t > 17$) точность также имеет место. □

Напомним, что для R-бимодуля M *скрученным бимодулем* назовем линейное пространство M, на котором левое и правое действия алгебры R (обозначаемые звездочкой) заданы следующим образом:

$$r * m * s = \lambda(r) \cdot m \cdot \mu(s) \text{ для } r, s \in R \text{ и } m \in M,$$

где λ, μ – некоторые автоморфизмы алгебры R. Такой скрученный бимодуль обозначаем через ${}_\lambda M_\mu$.

Следствие 12. *Имеет место изоморфизм* $\Omega^{17}({}_\Lambda R) \simeq {}_1R_\sigma$.

Предложение 13. *Автоморфизм* σ *имеет конечный порядок, причём*

(1) *если* $\operatorname{char} K = 2$, *то порядок* σ *равен* $\frac{s}{\text{НОД}(s,9)}$;

(2) *если* $\operatorname{char} K \neq 2$, *то порядок* σ *равен* $\frac{s}{\text{НОД}(s,9)}$, *если* $\frac{s}{\text{НОД}(s,9)}$ *чётно, и* $\frac{2s}{\text{НОД}(s,9)}$ *в противном случае.*

Предложение 14. *Минимальный период бимодульной резольвенты* R *равен* $17 \operatorname{ord} \sigma$.

§4. Аддитивная структура алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$

Предложение 15 (Размерности групп гомоморфизмов, $s > 1$)**.** *Пусть* $s > 1$ *и* $R = R_s$ *– алгебра типа* E_7. *Далее,* $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ℓ *– целая часть, а* r *– остаток от деления* t *на* 17.

(1) *Если* $r \in \{0, 8, 16\}$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 7s, & m + 9\ell \equiv 0(s) \text{ или } m + 9\ell \equiv 1(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(2) *Если* $r \in \{1, 15\}$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 8s, & m + 9\ell \equiv 0(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(3) *Если* $r = 2$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 4s, & m + 9\ell \equiv 0(s); \\ s, & m + 9\ell \equiv 1(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(4) *Если* $r \in \{3, 13\}$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 9s, & m + 9\ell \equiv 0(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(5) *Если* $r = 4$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 3s, & m + 9\ell \equiv 0(s); \\ 5s, & m + 9\ell \equiv 1(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(6) *Если* $r \in \{5, 11\}$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 10s, & m + 9\ell \equiv 0(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(7) *Если* $r = 6$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 5s, & m + 9\ell \equiv 0(s); \\ 7s, & m + 9\ell \equiv 1(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(8) *Если* $r \in \{7, 9\}$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 12s, & m + 9\ell \equiv 0(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(9) *Если* $r = 10$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 7s, & m + 9\ell \equiv 0(s); \\ 5s, & m + 9\ell \equiv 1(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(10) *Если* $r = 12$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} 5s, & m + 9\ell \equiv 0(s); \\ 3s, & m + 9\ell \equiv 1(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(11) *Если* $r = 14$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \begin{cases} s, & m + 9\ell \equiv 0(s); \\ 4s, & m + 9\ell \equiv 1(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Размерность $\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(P_{i,j}, R)$ равна количеству линейно независимых ненулевых путей колчана $\mathcal{Q}_s$, ведущих из j-ой вершины в i-ую, и доказательство состоит в последовательном рассмотрении случаев $r = 0$, $r = 1$ и т. д. □

Предложение 16 (Размерности групп гомоморфизмов, $s = 1$). *Пусть* $R = R_1$ *– алгебра типа* E_7. *Далее,* $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ℓ *– целая часть, а* r *– остаток от деления* t *на* 17.

(1) *Если* $r \in \{0, 8, 16\}$, *то* $\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = 14$.
(2) *Если* $r \in \{1, 4, 12, 15\}$, *то* $\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = 8$.
(3) *Если* $r \in \{2, 14\}$, *то* $\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = 5$.
(4) *Если* $r \in \{3, 13\}$, *то* $\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = 9$.
(5) *Если* $r \in \{5, 11\}$, *то* $\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = 10$.

(6) *Если* $r \in \{6, 7, 9, 10\}$, *то* $\dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = 12$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предложения 15. □

Предложение 17 (Размерности групп кограниц)**.** *Пусть* $R = R_s$ – *алгебра типа* E_7, *и пусть*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_0, R) \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_1, R) \xrightarrow{\delta^1} \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_2, R) \xrightarrow{\delta^2} \dots \qquad (\times)$$

комплекс, полученный применением функтора $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, R)$ *к минимальной проективной бимодульной резольвенте* $(+)$ *алгебры* R.

Рассмотрим группы кограниц $\mathrm{Im}\delta^t$ *комплекса* $(\times)$. *Пусть* ℓ – *целая часть, а* r – *остаток от деления* t *на* 17, m – *целая часть от деления* r *на* 2. *Тогда*:

(*1*) *Если* $r \in \{0, 7, 8, 15, 16\}$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^s = \begin{cases} 7s - 1, & m + 9\ell \equiv 0(s),\ \ell + m \,\vdots\, 2 \text{ или } \mathrm{char}\, K = 2; \\ 7s, & m + 9\ell \equiv 0(s),\ \ell + m \,\not\vdots\, 2,\ \mathrm{char}\, K \neq 2; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(*2*) *Если* $r \in \{1, 14\}$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^s = \begin{cases} s, & m + 9\ell \equiv 0(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(*3*) *Если* $r \in \{2, 13\}$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^s = \begin{cases} 4s, & m + 9\ell \equiv 0(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(*4*) *Если* $r \in \{3, 12\}$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^s = \begin{cases} 5s - 1, & m + 9\ell \equiv 0(s),\ \ell + m \,\vdots\, 2 \text{ или } \mathrm{char}\, K = 2; \\ 5s, & m + 9\ell \equiv 0(s),\ \ell + m \,\not\vdots\, 2,\ \mathrm{char}\, K \neq 2; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(*5*) *Если* $r \in \{4, 11\}$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^s = \begin{cases} 3s, & m + 9\ell \equiv 0(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(*6*) *Если* $r \in \{5, 10\}$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^s = \begin{cases} 7s-1, & m+9\ell \equiv 0(s),\ \ell+m \,\vdots\, 2 \text{ и } \mathrm{char}\, K = 3; \\ 7s, & m+9\ell \equiv 0(s),\ \ell+m \,\not\vdots\, 2 \text{ или } \mathrm{char}\, K \neq 3; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(*7*) *Если* $r \in \{6, 9\}$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^s = \begin{cases} 5s, & m+9\ell \equiv 0(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Доказательство техническое и состоит в построении матриц образа, исходя из описания матриц дифференциалов, и последующем вычислении ранга матрицы образа. □

Теорема 18 (Аддитивная структура, $s > 1$)**.** *Пусть* $s > 1$ *и* $R = R_s$ *– алгебра типа* E_7. *Далее,* $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ℓ *– целая часть, а* r *– остаток от деления* t *на* 17, m *– целая часть от деления* r *на* 2. *Тогда* $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 1$, *если выполнено одно из следующих условий*:

(1) $r \in \{0, 1, 3, 7, 8, 9, 12, 13, 15, 16\}$, $m + 9\ell \equiv 0(s)$,

$\ell + m \,\vdots\, 2$ *или* $\mathrm{char}\, K = 2$;

(2) $r \in \{0, 4, 8, 16\}$, $m + 9\ell \equiv 1(s)$, $\ell + m \,\not\vdots\, 2$ *или* $\mathrm{char}\, K = 2$;

(3) $r = 6$, $m + 9\ell \equiv 1(s)$, $\ell + m \,\not\vdots\, 2$, $\mathrm{char}\, K = 3$;

(4) $r \in \{5, 10, 11\}$, $m + 9\ell \equiv 0(s)$, $\ell + m \,\vdots\, 2$, $\mathrm{char}\, K = 3$.

Во всех остальных случаях $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 0$.

Доказательство. Так как $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = \dim_K \mathrm{Ker}\delta^t - \dim_K \mathrm{Im}\delta^{t-1}$, а $\dim_K \mathrm{Ker}\delta^t = \dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_t, R) - \dim_K \mathrm{Im}\delta^t$, утверждения теоремы легко выводится из предложений 15 – 17. □

Теорема 19 (Аддитивная структура, $s = 1$)**.** *Пусть* $R = R_1$ *– алгебра типа* E_7. *Далее,* $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ℓ *– целая часть, а* r *– остаток от деления* t *на* 17.

(*а*) $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 8$, *если* $t = 0$.

(*б*) $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 2$, *если* $t > 0$, $r \in \{0, 8, 16\}$, $\mathrm{char}\, K = 2$.

(*в*) $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 1$, *если выполнено одно из следующих условий*:

(1) $r \in \{0, 8, 16\}$, $t > 0$, $\mathrm{char}\, K \neq 2$;

(2) $r \in \{1, 3, 7, 9, 12, 13, 15\}$, $\ell + m \,\vdots\, 2$ *или* $\mathrm{char}\, K = 2$;

(3) $r = 4$, $\ell + m \not\vdots\, 2$ *или* $\operatorname{char} K = 2$;

(4) $r = 6$, $\ell + m \not\vdots\, 2$, $\operatorname{char} K = 3$;

(5) $r \in \{5, 10, 11\}$, $\ell + m \,\vdots\, 2$, $\operatorname{char} K = 3$.

(*г*) *Во всех остальных случаях* $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 0$.

§5. Образующие алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$

Для $s > 1$ введём множество образующих $Y_t^{(1)}$, $Y_t^{(2)}$, $\ldots Y_t^{(18)}$, таких что $\deg Y_t^{(i)} = t$, $0 \leqslant t < 17 \operatorname{ord} \sigma$ и t удовлетворяет условиям (i)-го пункта (см. список в §2). Для $s = 1$ введём множество образующих $Y_t^{(1)}$, $Y_t^{(2)}$, $\ldots Y_t^{(25)}$, таких что $\deg Y_t^{(i)} = t$, $0 \leqslant t < 17 \operatorname{ord} \sigma$ и t удовлетворяет условиям (i)-го пункта списков (см. §2). Для образующей $Q_t \to R$ опишем отображение $Q_t \to Q_0$ в виде матрицы. Соответствующая образующая будет композицией этого отображения с отображением умножения $Q_t \to Q_0 \xrightarrow{\varepsilon} R$.

Обозначение. Для степени t элемента из множества образующих представим t в виде $t = 17\ell + r$ $(0 \leqslant r \leqslant 16)$.

(1) $Y_t^{(1)}$ – матрица размера $(7s \times 7s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{7j+j_2} \otimes e_{7j+j_2}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(2) $Y_t^{(2)}$ – матрица размера $(7s \times 7s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{0,0} = w_{0\to 7} \otimes e_0.$$

(3) $Y_t^{(3)}$ – матрица размера $(7s \times 8s)$ с двумя ненулевыми элементами:

$$y_{0,0} = w_{0\to 1} \otimes e_0 \text{ and } y_{0,s} = w_{0\to 4} \otimes e_0.$$

(4) $Y_t^{(4)}$ – матрица размера $(7s \times 9s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{7j\to 7j+2} \otimes e_{7j}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{7j \to 7j+5} \otimes e_{7j}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 4s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $4s \leqslant j < 5s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{7j+3 \to 7(j+1)} \otimes e_{7j+3}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 7s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $7s \leqslant j < 8s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{7j+6 \to 7(j+1)+1} \otimes e_{7j+6}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(5) $Y_t^{(5)}$ – матрица размера $(7s \times 10s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{0,0} = w_{0 \to 6} \otimes e_0.$$

(6) $Y_t^{(6)}$ – матрица размера $(7s \times 10s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{7j \to 7j+4} \otimes e_{7j}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{7j \to 7j+3} \otimes e_{7j}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 6s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $6s \leqslant j < 7s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{7j+4 \to 7(j+1)} \otimes e_{7j+4}, & i = j - 2s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $7s \leqslant j < 8s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{7j+5 \to 7j+6} \otimes e_{7j+5}, & i = j - 2s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $8s \leqslant j < 9s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $9s \leqslant j < 10s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{7j+6\to 7(j+1)+5} \otimes e_{7j+6}, & i = j - 3s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(7) $Y_t^{(7)}$ – матрица размера $(7s \times 12s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{6s,10s} = w_{7j+6\to 7(j+1)+6} \otimes e_{7j+6}.$$

(8) $Y_t^{(8)}$ – матрица размера $(7s \times 12s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < 2s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $2s \leqslant j < 3s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{7j\to 7j+4} \otimes e_{7j}, & i = j - 2s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 7s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $7s \leqslant j < 8s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{7j+5\to 7j+6} \otimes e_{7j+5}, & i = j - 2s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $8s \leqslant j < 9s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $9s \leqslant j < 10s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{7j+6\to 7(j+1)+4} \otimes e_{7j+6}, & i = j - 3s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $10s \leqslant j < 12s$, то $y_{ij} = 0$.

(9) $Y_t^{(9)}$ – матрица размера $(7s \times 13s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $s \leqslant j < 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{7j} \otimes e_{7j}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 3s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -e_{7j+1} \otimes e_{7j+1}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 4s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $4s \leqslant j < 5s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -e_{7j+2} \otimes e_{7j+2}, & i = j - 2s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 6s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -e_{7j+3} \otimes e_{7j+3}, & i = j - 2s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $6s \leqslant j < 8s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $8s \leqslant j < 9s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{7j+4 \to 7j+5} \otimes e_{7j+4}, & i = j - 4s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $9s \leqslant j < 11s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $11s \leqslant j < 12s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{7j+6} \otimes e_{7j+6}, & i = j - 5s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $12s \leqslant j < 13s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{7j+6 \to 7(j+1)} \otimes e_{7j+6}, & i = j - 6s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(10) $Y_t^{(10)}$ – матрица размера $(7s \times 13s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{0,0} = -w_{0 \to 6} \otimes e_0.$$

(11) $Y_t^{(11)}$ – матрица размера $(7s \times 12s)$ с тремя ненулевыми элементами:

$$y_{0,0} = w_{0 \to 5} \otimes e_0, \quad y_{0,2s} = w_{0 \to 1} \otimes e_0,$$

$$y_{j-4s,10s+(-1)_s} = w_{7j+6 \to 7(j+1)+5} \otimes e_{7j+6}.$$

(12) $Y_t^{(12)}$ – матрица размера $(7s \times 12s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $s \leqslant j < 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{7j} \otimes e_{7j}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 3s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{7j+1\to 7j+2} \otimes e_{7j+1}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 4s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{7j+2\to 7j+3} \otimes e_{7j+2}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 6s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $6s \leqslant j < 7s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{7j+4} \otimes e_{7j+4}, & i = j - 2s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $7s \leqslant j < 9s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $9s \leqslant j < 10s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{7j+5} \otimes e_{7j+5}, & i = j - 4s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $10s \leqslant j < 11s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{7j+6} \otimes e_{7j+6}, & i = j - 4s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $11s \leqslant j < 12s$, то $y_{ij} = 0$.

(13) $Y_t^{(13)}$ – матрица размера $(7s \times 10s)$ с двумя ненулевыми элементами:

$$y_{s,2s} = w_{1\to 7} \otimes e_1 \text{ and } y_{4s,5s} = w_{7j+4\to 7j+7} \otimes e_{7j+4}.$$

(14) $Y_t^{(14)}$ – матрица размера $(7s \times 10s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{7j} \otimes e_{7j}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{7j+1\to 7j+3} \otimes e_{7j+1}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 6s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $6s \leqslant j < 7s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{7j+4\to 7j+5} \otimes e_{7j+4}, & i = j - 2s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $7s \leqslant j < 8s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $8s \leqslant j < 9s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{7j+6} \otimes e_{7j+6}, & i = j - 2s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $9s \leqslant j < 10s$, то $y_{ij} = 0$.

(15) $Y_t^{(15)}$ – матрица размера $(7s \times 9s)$ с двумя ненулевыми элементами:

$$y_{0,0} = w_{0\to 3} \otimes e_0 \text{ and } y_{0,s} = w_{0\to 5} \otimes e_0.$$

(16) $Y_t^{(16)}$ – матрица размера $(7s \times 8s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{7j\to 7j+6} \otimes e_{7j}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 4s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $4s \leqslant j < 5s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{7j+4\to 7(j+1)} \otimes e_{7j+4}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 6s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{7j+5\to 7(j+1)+4} \otimes e_{7j+5}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $6s \leqslant j < 7s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $7s \leqslant j < 8s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{7j+6\to 7(j+1)+5} \otimes e_{7j+6}, & i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(17) $Y_t^{(17)}$ – матрица размера $(7s \times 7s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < 4s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{7j+j_2} \otimes e_{7j+j_2}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 6s$, то $y_{ij} = 0$.
Если $6s \leqslant j < 7s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{7j+6} \otimes e_{7j+6}, & i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(18) $Y_t^{(18)}$ – матрица размера $(7s \times 7s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{0,0} = -w_{0\to 7} \otimes e_0.$$

(19) $Y_t^{(19)}$ – матрица размера $(7s \times 7s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{0,0} = w_{0\to 7} \otimes e_0.$$

(20) $Y_t^{(20)}$ – матрица размера $(7s \times 7s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{4s,4s} = w_{4\to 11} \otimes e_4.$$

(21) $Y_t^{(21)}$ – матрица размера $(7s \times 7s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{5s,5s} = w_{5\to 12} \otimes e_5.$$

(22) $Y_t^{(22)}$ – матрица размера $(7s \times 7s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{3s,3s} = w_{3\to 10} \otimes e_3.$$

(23) $Y_t^{(23)}$ – матрица размера $(7s \times 7s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{s,s} = w_{1\to 8} \otimes e_1.$$

(24) $Y_t^{(24)}$ – матрица размера $(7s \times 7s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{2s,2s} = w_{2\to 9} \otimes e_2.$$

(25) $Y_t^{(25)}$ – матрица размера $(7s \times 7s)$ с единственным ненулевым элементом:

$$y_{6s,6s} = w_{6\to 13} \otimes e_6.$$

§6. Произведения в $\mathrm{HH}^*(R)$

Пусть $Q_\bullet \to R$ – минимальная проективная бимодульная резольвента алгебры R, построенная в параграфе 3. Любой коцикл $f \in \mathrm{Ker}\delta^s$ поднимается (однозначно с точностью до гомотопии) до цепного отображения комплексов $\{\varphi_i : Q_{s+i} \to Q_i\}_{i \geqslant 0}$. Гомоморфизм φ_i назовём *i-м сдвигом* коцикла f и будем обозначать через $\Omega^i(f)$. Для коциклов $f_1 \in \mathrm{Ker}\delta^{s_1}$ и $f_2 \in \mathrm{Ker}\delta^{s_2}$ имеем

$$\mathrm{cl} f_2 \cdot \mathrm{cl} f_1 = \mathrm{cl}(\Omega^0(f_2)\Omega^{s_2}(f_1)). \qquad (*)$$

Описания Ω-сдвигов образующих элементов $Y_t^{(i)}$ громоздкие и не включены в данную статью. С ними можно ознакомиться в препринте [16]. Из описания элементов $Y_t^{(i)}$ и их Ω-сдвигов мы можем найти произведения элементов, пользуясь формулой $(*)$. Произведения всех элементов, кроме $Y^{(5)}$, $Y^{(10)}$, $Y^{(11)}$, $Y^{(15)}$ и $Y^{(18)}$, находятся путём прямых вычислений (более подробно см. [16]). Завершает описание произведений следующая лемма.

Лемма 20.

(а) *Пусть $Y^{(5)}$ – произвольный элемент соответствующего типа из множества образующих. Тогда существуют элементы $Y^{(3)}$ и $Y^{(4)}$ такие, что $Y^{(5)} = Y^{(3)}Y^{(4)}$.*

(б) *Пусть $Y^{(10)}$ – произвольный элемент соответствующего типа из множества образующих. Тогда существуют элементы $Y^{(3)}$ и $Y^{(8)}$ такие, что $Y^{(10)} = Y^{(3)}Y^{(8)}$.*

(в) *Пусть $Y^{(11)}$ – произвольный элемент соответствующего типа из множества образующих. Тогда существуют элементы $Y^{(3)}$ и $Y^{(9)}$ такие, что $Y^{(11)} = Y^{(3)}Y^{(9)}$.*

(г) *Пусть $Y^{(15)}$ – произвольный элемент соответствующего типа из множества образующих. Тогда существуют элементы $Y^{(3)}$ и $Y^{(14)}$ такие, что $Y^{(15)} = Y^{(3)}Y^{(14)}$.*

(д) *Пусть $Y^{(18)}$ – произвольный элемент соответствующего типа из множества образующих. Тогда существуют элементы $Y^{(3)}$ и $Y^{(16)}$ такие, что $Y^{(18)} = Y^{(3)}Y^{(16)}$.*

Доказательство. Степень 1 есть степень типа 3, для любого s. Остается использовать соотношения для типа (3). $\square$

Используя образующие $Y^{(i)}$ в качестве элементов $X^{(i)}$, введённых в §3, получаем искомое описание структуры кольца когомологий Хохшильда.

Список литературы

1. C. Riedtmann, *Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück.* — Comment. Math. Helv. **55** (1980), 199–224.
2. K. Erdmann, T. Holm, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n.* — Forum Math. **11** (1999), 177–201.
3. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **321** (2005), 36–66.
4. М. А. Качалова, *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 173–200.
5. М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **388** (2011), 210–246.
6. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **343** (2007), 121–182.
7. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **365** (2009), 63–121.
8. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* III. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **386** (2011), 100–128.
9. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда нестандартных самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 48–99.
10. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* IV. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **388** (2011), 100–118.
11. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* V. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **394** (2011), 140–173.
12. М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа E_6.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **423** (2014), 205–243.
13. М. А. Качалова, *Кольцо когомологий Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа E_6.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **478** (2019), 128–171.
14. D. Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras.* — Lect. Notes Math. (1989), 1404, 108–126.
15. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, С. О. Иванов, *О построении бимодульных резольвент с помощью леммы Хаппеля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **375** (2010), 61–70.
16. M. Kachalova, *Hochschild cohomology ring for self-injective algebras of tree class E_7.* — `https://arxiv.org/abs/1910.03043`.

Kachalova M. A. Hochschild cohomology ring for self-injective algebras of tree class E_7.

The Hochschild cohomology ring for self-injective algebras of tree class E_7 with finite representation type was described in terms of generators and relations.

ООО Яндекс.Технологии,
ул. Льва Толстого 16, 119021 Москва, Россия
E-mail: mashakachalova@mail.ru

Поступило 24 октября 2019 г.