Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 484, 2019 г.

А. Э. Дружинин

ГЛАДКАЯ АФФИННАЯ МОДЕЛЬ СПЕКТРА ПУЧКОВ ОСНАЩЁННЫХ СООТВЕТСТВИЙ

§1. Введение

Теория оснащённых мотивов, предложенная в неопубликованных заметках В. А. Воеводского [2] и построенная Г. А. Гаркушей и И. А. Паниным [1], даёт универсальное вычисление спектра в стабильной мотивной гомотопической категории $\mathbf{SH}(k)$, являющегося $\Omega_{\mathbb{P}^1}$ в положительных степенях мотивно-фибрантной заменой надстроичного спектра гладкого многообразия $Y \in \mathrm{Sm}_k$.

Теорема 1 (Гаркуша–Панин, Теорема 4.10 [1])**.** *Пусть k – совершенное поле, $Y \in \mathrm{Sm}_k$. Тогда морфизм спектров симплициальных пучков Нисневича с отмеченной точкой в стабильной мотивной гомотопической категории* $\mathbf{SH}(k)$

$$L_{\mathrm{nis}}L_{\mathbb{A}^1}(\mathrm{Fr}(-,Y),\mathrm{Fr}(-,Y\wedge T),\dots,\mathrm{Fr}(-,Y\wedge T^l)\dots) \\ \to \sum_T^{\infty} = (Y, Y\wedge T,\dots,Y\wedge T^l,\dots),$$

где $T = \mathbb{A}^1/(\mathbb{A}^1-0)$, является стабильной мотивной эквивалентностью, и спектр с левой стороны является поуровнево мотивно-фибрантным а также $\Omega_{\mathbb{P}^1}$-спектром в положительных степенях.

Спектр пучков

$$(\mathrm{Fr}(-,Y),\mathrm{Fr}(-,Y\wedge T),\dots,\mathrm{Fr}(-,Y\wedge T^l)\dots) \tag{1}$$

имеет явное определение и является аналогом конструкции Понтрягина для пространств петель в алгебро-геометрическом (мотивном) случае. Согласно лемме Воеводского

$$\mathrm{Fr}(X,Y\wedge T^l) = \varinjlim_{i\to\infty} \mathrm{Sh}_\bullet(X\wedge(\mathbb{P}^i/\mathbb{P}^{i-1}), Y\wedge(\mathbb{A}^{i+l}/\mathbb{A}^{i+l}-0)),$$

Ключевые слова: пространства петель, гладкие модели, стабильно мотивно фибрантные спектры, оснащённые соответствия.

где в правой части написаны пучки внутреннего hom-функтора в категории пучков Нисневича с отмеченной точкой, т.е. предпучок $\mathrm{Fr}(-, Y \wedge T^l)$ параметризует стабильные $\mathbb{P}^i/\mathbb{P}^{i-1}$-петли в относительной сфере T_Y^{i+l}. Эти петли вычисляются как явные наборы алгебро-геометрических данных, т.е. некоторые диаграммы в категории схем, и называются оснащёнными соответствиями.

В статье мы показываем для случая (квази)аффинной гладкой схемы Y, что с точностью до мотивной эквивалентности эти данные могут быть параметризованы парами (квази-аффинных) гладких инд-схем.

Теорема 2. *Пусть S – схема конечной размерности Крулля. Для всякой квази-аффинной гладкой S-схемы Y спектр предпучков* (1) *представляется последовательностью пар*

$$\begin{gathered}\Big(\sum_T^\infty Y\Big)^{\mathrm{fr}} = (F_0/E_0, \dots, F_l/E_l, \dots),\\ (F_l \times \mathbb{A}^1, E_l \times \mathbb{A}^1 \cup F_{l+1} \times (\mathbb{A}^1 - 0)) \xrightarrow{x_l} (F_{l+1}, E_{l+1}),\end{gathered} \tag{2}$$

где F_l – квази-аффинная гладкая инд-схема над S, $E_l \subset F_l$ – открытая подсхема, а x_l – морфизм пар, т.е. регулярный морфизм

$$F_l \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{e_l} F_{l+1}, e_l^{-1}(F_{l+1} \setminus E_{l+1}) \subset (F_l \setminus E_l) \times_S (1 \times S).$$

Таким образом мы получили T-спектр в категории открытых пар гладких инд-схем (2) поуровнево (нестабильно) мотивно эквивалентный спектру (1), и как следствие стабильно-мотивно-фибрантную замену в положительных степенях

$$L_{\mathrm{nis}} L_{\mathbb{A}^1}\Big(\Big(\sum_T^\infty Y\Big)^{\mathrm{fr}}\Big) \to \sum_T^\infty Y$$

для гладкой квази-аффинной схемы Y.

Главным результатом является гладкость модели, поскольку это свойство влечёт свойства подъёма, важные в мотивной теории гомотопий.

Конструкция спектра $(\sum_T^\infty Y)^{\mathrm{fr}}$ не является функториальной на категории гладких схем в строгом смысле, однако является таковой на категории гладких аффинных оснащённых схем. Категория гладких аффинных оснащённых схем является в некотором смысле мотивно-эквивалентной моделью гладких аффинных схем, и $\mathbf{SH}(S)$, построенная по категории гладких аффинных оснащённых схем, эквивалентна оригинальной. С точность до этого перехода теорему 2 можно переформулировать и усилить.

Теорема 3. *Пусть S – схема конечной размерности Крулля. Для всякой квази-аффинной гладкой оснащённой S-схемы Y спектр предпучков* (1) *естественным образом представляется спектром пар* $(F_0/E_0, \dots, F_l/E_l, \dots)$ *как и в* (2)*, но F_l – квази-аффинная гладкая оснащённая инд-схема над S, и $E_l \subset F_l$ – открытая* (*оснащённая*) *подсхема.*

Другими словами, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fr}^{\mathrm{qaSm}} \arrow[r, "\mathrm{fr}"] \arrow[d] & \mathrm{Spec}_T((\mathrm{Fr}^{qaSmOp})^{\mathrm{ind}}) \arrow[d] \\ \mathrm{Sm}_S \arrow[r] & \mathrm{Spec}_T(Pre(\mathrm{Sm})) \end{tikzcd}$$

в которой в верхней строке обозначены категория квази-аффинных гладких оснащённых схем над S и категория T-спектров квази-аффинных гладких оснащённых (*открытых*) *пар инд-схем над S, нижняя стрелка переводит схему Y в спектр* (1)*, и вертикальные стрелки индуцированы забывающим фунтором* $\mathrm{Fr}^{\mathrm{qaSm}} \to \mathrm{Sm}$ *из категории квази-аффинных гладких оснащённых схем в категорию гладких схем и функтором $SmOp \to Pre(\mathrm{Sm})$, переводящим пару схем* (Y, U), $U \subset Y$, *в представимый фактор-предпучок Y/U.*

§2. Оснащённые соответствия и схемы

Оснащенные соответствия (см. [2] и [1, §2]) введены Воеводским с целью вычислений в стабильной гомотопической категории и удовлетворяют упомянутой выше так называемой лемме Воеводского [1, prop. 3.5], по существу сами являясь вычислением внутреннего hom-пучка в категории пучков Нисневича с отмеченной точкой.

В этой статье мы построим мотивно-эквивалентную модель, представимую парами гладких инд-схем.

В этом разделе мы определим понятия оснащённых соответствий, конечных оснащённых соответствий и оснащённых схем. С терминологической точки зрения важно отметить, что то, что называется в данном ниже определении оснащёнными соответствиями, не является эквивалентным оснащённым соответствиям Воеводского, определённым в [2] и [1]. Определение оснащённых соответствий Воеводского дано ниже в определении 10, и для случая квази-аффинной схемы они мотивно-эквивалентны тому, что ниже называется конечными оснащёнными соответствиями, см. определение 7.

Определение 1. Пусть $X, Y \in \mathrm{Sch}_S$.

Назовём *оснащённым соответствием уровня* $n \in \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ *и коразмерности* $l \in \mathbb{Z}$ следующий набор данных $(Z, f_1, \ldots, f_{n+l}, w, g)$, $Z \subset \mathbb{A}^n_X$ – замкнутая подсхема, $f_i, w \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n_X)$ – регулярные функции, $g\colon Z \to Y$ – регулярное отображение,

$$Z(f_1, \ldots, f_{n+l}) = Z \amalg Z', w\big|_Z = 0, w\big|_{Z'} = 1.$$

Обозначим через $\mathrm{Fr}^l_n(X, Y)$ множество оснащённых соответствий уровня n и коразмерности l.

Назовём оснащённое соответствие $(Z, f_1, \ldots, f_{n+l}, w, g)$ *гладким*, если дифференциал вектора $(f_1, \ldots, f_{n+l})$ задает тривиализацию нормального расслоения $N_{Z/\mathbb{A}^n_S} \simeq \mathcal{O}^{n+l}_Z$ к подсхеме Z в $\mathbb{A}^n_X$.

2.1. Оснащённые схемы.

Определение 2. Назовём *аффинной оснащённой* S*-схемой* оснащённое соответствие $(Y, f_1, \ldots, f_c, w, g) \in \mathrm{Fr}^{c-n}_n(\mathrm{pt}, Y)$, такое, что $g\colon Y \to Y$ – это тождественное отображение.

Отметим, что сама схема Y и отображение g являются избыточным данным в определении оснащённого соответствия в этом случае, и будем говорить, что *аффинная оснащённая схема задана вектором функций* $(f_1, \ldots, f_c, e)$, если

$$(w^2 - w)\big|_{Z_{f_1,\ldots,f_c}} = 0, Y = Z(f_1, \ldots, f_c, w).$$

Говоря об *аффинной оснащённой* S*-схеме*

$$(Y, f_1, \ldots, f_c, w, g) \in \mathrm{Fr}^{c-n}_n(\mathrm{pt}, Y)$$

будем вместо $(Y, f_1, \ldots, f_c, w, g)$ писать кратко

$$(Y, f_1, \ldots, f_c, w) \in \mathrm{Fr}^{c-n}_n(\mathrm{pt}, Y)$$

или $(f_1, \ldots, f_c, w) \in \mathrm{Fr}^l_n(\mathrm{pt}, Y)$, поскольку g и Y однозначно восстанавливаются по $(f_1, \ldots, f_c, w)$, а именно, $Y = Z(f_1, \ldots, f_c, w)$, и

$$g\colon Z(f_1, \ldots, f_c, w) \to Y$$

– тождественное отображение.

Определение 3. Назовём *аффинной оснащённой S-схемой степени* d аффинную оснащённую S-схему $(Y, f_1, \ldots, f_c, w) \in \mathrm{Fr}_n^{c-n}(\mathrm{pt}, Y)$, такую, что $f_i = (y_i/t_\infty)\big|_{\mathbb{A}^n_S}$, $y_i \in \Gamma(\mathbb{P}^n_S, \mathcal{O}(d))$, $i = 1, \ldots, c$.

Замечание 1. Всякая аффинная оснащённая S-схема является аффинной оснащённой S-схемой степени d для всех $d > d_0$ для некоторого $d_0 \in \mathbb{Z}$.

Определение 4. Назовём *квази-аффинной оснащённой S-схемой* пару, состоящую из аффинной оснащённой схемы $(Y, f_1, \ldots, f_c, w)$ и замкнутой подсхемы $W \subset Y$.

Назовём квази-аффинную оснащённую S-схему $(Y, f_1, \ldots, f_c, w, W)$ *гладкой*, если схема $Y - W$ гладкая над S.

Определение 5. Обозначим через $\mathrm{Fr}_S^{\mathrm{affSm}}$ категорию аффинных оснащённых схем, объектами которой являются аффинные оснащённые схемы над S, а морфизмы между аффинными оснащёнными схемами заданными векторами $(f_1, \ldots, f_c, w) \in \mathrm{Fr}^l_{n_1}(\mathrm{pt}, Y)$ и $(f'_1, \ldots, f'_c, w') \in \mathrm{Fr}^l_{n_2}(\mathrm{pt}, Y')$, задаются как регулярные отображения $u\colon \mathbb{A}^{n_1} \to \mathbb{A}^{n_2}$ такие, что $u^*(f'_1, \ldots, f'_c, w') = (f_1, \ldots, f_c, w)$.

Обозначим через $\mathrm{Fr}_S^{\mathrm{qaSm}}$ категорию квази-аффинных оснащённых схем, объектами которой являются квази-аффинные оснащённые схемы над S, а морфизмы между квази-аффинными оснащёнными схемами, заданными векторами $(Y - W \subset Y, f_1, \ldots, f_c, w) \in \mathrm{Fr}^l_{n_1}(\mathrm{pt}, Y)$ и $(Y' - W' \subset Y', f'_1, \ldots, f'_c, w') \in \mathrm{Fr}^l_{n_2}(\mathrm{pt}, Y')$, задаются как регулярные отображения $u\colon \mathbb{A}^{n_1} \to \mathbb{A}^{n_2}$ такие, что $u^*(f'_1, \ldots, f'_c, w') = (f_1, \ldots, f_c, w)$, и $W_{\mathrm{red}} \subset u^{-1}(W'_{\mathrm{red}})$.

Обозначим через $(\mathrm{Fr}^{\mathrm{affSm}})^{\mathrm{ind}}$ и $(\mathrm{Fr}^{\mathrm{qaSm}})^{\mathrm{ind}}$ категории гладких аффинных (и квази-аффинных) оснащённых S-инд-схем, объектами которых являются индуктивные последовательности оснащённых схем соответствующего типа

$$(f_{1,1}, \ldots, f_{c,1}, e_1) \in \mathrm{Fr}^{c-n}_{n_1}(\mathrm{pt}, Y_1), (f_{1,2}, \ldots, f_{c,2}, e_2) \in \mathrm{Fr}^{c-n}_{n_2}(\mathrm{pt}, Y_2), \ldots,$$
$$(f_{1,i}, \ldots, f_{c,i}, e_i) \in \mathrm{Fr}^{c-n}_{n_i}(\mathrm{pt}, Y_i), \ldots, n_1 \leqslant n_2 \leqslant, \ldots, n_i \leqslant \ldots,$$

с морфизмами, заданными регулярными отображениями $\mathbb{A}^{n_i} \to \mathbb{A}^{n_{i+1}}$, являющимися замкнутыми вложениями.

Лемма 1. 1) *Пусть $Y \in \mathrm{affSm}_S$ и касательное расслоение T_Y тривиально, тогда существует гладкая аффинная оснащённая S-схема,* *заданная вектором функций* $(f_1, \ldots, f_c, w)$*, такая, что*

$$Z(f_1, \ldots, f_c, w) \simeq Y.$$

2) *Пусть* $Y \in \mathrm{affSm}_S$*, тогда существует гладкая аффинная оснащённая* S*-схема, заданная вектором функций* $(f_1, \ldots, f_c, w)$*, и морфизм* $Z(f_1, \ldots, f_c, w) \to Y$*, являющийся мотивной эквивалентностью.*

Доказательство. 1) Пусть $Y \subset \mathbb{A}^n$, $\dim Y = l$. Поскольку по предположению $T_Y \simeq \mathcal{O}_Y^l$ и $T_Y \oplus N_{Y/\mathbb{A}^n} \simeq T_{\mathbb{A}^n}\big|_Y \simeq \mathcal{O}_Y^n$, то $N_{Y/\mathbb{A}^{n+l}} \simeq N_{Y/\mathbb{A}^n}\mathcal{O}_Y^l \simeq \mathcal{O}_Y^{n+l}$. Зафиксируем тривиализацию τ нормального расслоения $N_{Y/\mathbb{A}^{n+l}} \to \mathcal{O}_Y^n$ и выберем вектор функций $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+l})$ такой, что $\mathrm{d}f = \tau$, выберем $w \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+l})$ такое, что $w\big|_Y = 0$, $w\big|_{Z(f)-Y} = 1$.

2) Пусть $Y \subset \mathbb{A}^n$ – гладкая аффинная схема. Тогда нормальное расслоение $N_{Y/\mathbb{A}^n}$ является мотивно-эквивалентной схемой с тривиальным касательным расслоением. Далее применим пункт 1 к $Y' = N_{Y/\mathbb{A}^n}$. $\square$

2.2. Конечные оснащённые соответствия.

Определение 6. Пусть $n \in \mathbb{Z}$. Обозначим $d_n^s = 3^n$, $d_n^e = (d_n^s)^n$.

Определение 7. Пусть $X \in \mathrm{Sch}_S$. Пусть $(Y, f_1, \ldots, f_c, w)$ – квазиаффинная оснащённая схема уровня n. Назовём *конечным оснащённым соответствием уровня* $r \geqslant n$ *коразмерности* $l \geqslant 0$ из X в $(Y, f_1, \ldots, f_c, w)$ оснащённое соответствие

$$(Z, \phi_1, \ldots, \phi_{r+l}, h, g) \in \mathrm{Fr}_r^l(X, Y),$$

такое, что

$$\phi_i = (s_i/t_\infty^{d_r^s})\big|_{\mathbb{A}_S^r}, \quad s_i \in \Gamma(\mathbb{P}_S^r, \mathcal{O}(d_r^s)), \ \ i = 1, \ldots, r+l;$$

$$s_i\big|_{\mathbb{P}_S^{r-1}} = t_i^{d_r^s}, \quad i = 1, \ldots, r,$$

и

$$h = (e/t_\infty^{d_r^e})\big|_{\mathbb{A}_S^r}, \quad e \in \Gamma(\mathbb{P}_S^r, \mathcal{O}(d_r^e)),$$

при этом $Z(\phi_1, \ldots, \phi_{r+l}) \subset Y \times \mathbb{A}^{r-n}$, а g является композицией канонического вложения и проекции $Z(\phi) \to Y \times \mathbb{A}^{r-n} \to Y$.

Обозначим через $\mathrm{Fr}_r^{\mathrm{fin},l}(X, Y)$ множество конечных оснащённых соответствий уровня r коразмерности l. Будем писать сокращённо

$$(Z, \phi_1, \ldots, \phi_{r+l}, h, g) = (\phi_1, \ldots, \phi_{r+l}, h) = (s_1, \ldots, s_{r+l}, e) \in \mathrm{Fr}_r^{\mathrm{fin},l}(X, Y).$$

Определение 8. Рассмотрим отображение

$$\begin{array}{lcl} \Gamma(\mathbb{P}^r_S, \mathcal{O}(d^s_n)^r \oplus \mathcal{O}(d^e_r)) & \to & \Gamma(\mathbb{P}^{r+1}_S, \mathcal{O}(d^s_{r+1})^{r+1} \oplus \mathcal{O}(d^e_{r+1})) \\ ((s_1, \ldots, s_{r+l}, e) & \mapsto & (\widehat{s}_1, \ldots, \widehat{s}_r, t_{n+1}^{d^s_{n+1}}, \widehat{s}_{r+1}, \ldots, \widehat{s}_{r+l}, \widehat{e}), \\ \widehat{s}_i & = & (s_i - t_\infty^{d^s_n}) s_i (s_i + t_\infty^{d^s_n}) \\ (t_\infty^{d^e_{n+1}} - \widehat{e}) & = & (t_\infty^{d^e_n} - e) \prod\limits_{i=1,\ldots,n} (s_i - t_\infty^{d^s_n})(s_i + t_\infty^{d^s_n}). \end{array}$$

Описанное отображение индуцирует отображения

$$\mathrm{Fr}^{\mathrm{fin},l}_r(X,Y) \to \mathrm{Fr}^{\mathrm{fin},l}_{r+1}(X,Y), n \in \mathbb{Z}.$$

Положим $\mathrm{Fr}^{\mathrm{fin},l}(X,Y) = \varinjlim\limits_r \mathrm{Fr}^{\mathrm{fin},l}_r(X,Y)$.

Определение 9. Для всякой схемы $Y \in \mathrm{Sm}_S$ обозначим через $(Y \wedge T^l)^{\mathrm{fr}}$ предпучок, сечения которого на X равны $\mathrm{Fr}^{\mathrm{fin},l}(X,Y)$.

Определим спектр $(Y^{\mathrm{fr}}, (Y \wedge T)^{\mathrm{fr}}, \ldots, (Y \wedge T^l)^{\mathrm{fr}} \ldots)$, $(Y \wedge T^l)^{\mathrm{fr}} \wedge T \to (Y \wedge T^l)^{\mathrm{fr}}\colon\ ((s_1, \ldots, s_{r+l}, e, g), \beta) \mapsto (s_1, \ldots, s_{r+l}, C_r(\beta) t_\infty^{d^s_r}, \widehat{e}, \widehat{g})$.

При этом $C_n(\beta)$ определяется правилами

$$C_j(\beta) = C_{j-1}(\beta)(C_{j-1}(\beta)^2 - 1), \quad C_0 = \beta, \quad \text{и} \quad \widehat{g} = g\big|_{Z(s_1, \ldots, s_{r+l}, e, \beta)}.$$

Для того чтобы определить $\widehat{e}$, заметим, что вследствие конструкции существует некоторое $\widehat{e}$, такое, что

$$\widehat{e}\big|_{Z(s_1, \ldots, s_{r+l}, e, \beta)} = 0 \quad \text{и} \quad \widehat{e}\big|_{Z(s_1, \ldots, s_{r+l}, C_r(\beta)) - Z(s_1, \ldots, s_{r+l}, e, \beta)} = 1.$$

Далее заметим, что поскольку требуемое $\widehat{e}$ существует для любой базовой схемы S и $X \in \mathrm{Sch}_S$, а также поскольку семейство возможных $(s_1, \ldots, s_{r+l}, e)$ при заданном S и $X = S$ параметризуется схемой над S, то требуемый выбор e может быть исполнен естественным образом.

Лемма 2. *Для всякой схемы* $Y \in \mathrm{qaSm}_S$ *имеет место мотивная эквивалентность предпучков* $(Y \wedge T^l)^{\mathrm{fr}}$ *и* $\mathrm{Fr}(-, Y \wedge T^l)$*, см. определение* 10.

Определение 10. Пусть X, Y – схемы над базовой схемой S.
(Соответствия уровня n) Определим классическое оснащённое соответствие из X в $Y \wedge T^l$ уровня n как набор данных $(Z, \phi_1, \ldots, \phi_{n+l}, g)$, $Z \subset \mathbb{A}^n_S$ – замкнутая подсхема, $\phi_i \in \mathcal{O}((\mathbb{A}^n_S)^h_Z)$, $g\colon (\mathbb{A}^n_S)^h_Z \to Y$, $Z = Z(\phi_1, \ldots, \phi_{n+l})$. Определим множество с отмеченной точкой $\mathrm{Fr}_n(X, Y \wedge T^l)$ как множество классических оснащённых соответствий

из X в Y уровня n с отмеченной точкой в соответствии, носитель которого $Z = \varnothing$.
(σ-стабилизация) Определим множество классических оснащённых соответствий из X в Y как индуктивных предел $\varinjlim_{n\to\infty} \mathrm{Fr}_n(X, Y \wedge T^l)$,

$\mathrm{Fr}_n(X, Y \wedge T^l) \to \mathrm{Fr}_n(X, Y \wedge T^l)$:

$$(Z, \phi_1, \ldots, \phi_{n+l}, g) \mapsto (Z \times 0, \phi_1, \ldots, \phi_n, t_{n+1}, \phi_{n+1}, \ldots, \phi_{n+l}, Z \times 0 \simeq Z \xrightarrow{g} Y \times \mathbb{A}^l.$$

Будем обозначать $\mathrm{Fr}_n(-, Y \wedge T^l)$ и $\mathrm{Fr}(-, Y \wedge T^l)$ предпучки, сечения которых на S-схеме X равны $\mathrm{Fr}_n(X, Y \wedge T^l)$ и $\mathrm{Fr}(X, Y \wedge T^l)$.
(Спектр) Определим T-спектр

$$(\mathrm{Fr}(-, Y), \mathrm{Fr}(-, Y \wedge T), \ldots, \mathrm{Fr}(-, Y \wedge T^l), \ldots),$$

$$\mathrm{Fr}(-, Y \wedge T^l) \wedge T \to \mathrm{Fr}(-, Y \wedge T^{l+1}): \\ ((Z, \phi_1, \ldots, \phi_{n+l}, g), c) \mapsto (Z, \phi_1, \ldots, \phi_{n+l}, c, g).$$

Замечание 2. Всякий T-спектр пучков Нисневича с отмеченной точкой определяет $(\mathbb{P}^1, \infty)$-спектр посредством морфизма представимых пучков с отмеченной точкой $(\mathbb{P}^1, \infty) \to T$.

§3. Модель спектра оснащённых соответсвий

Определение 11. Определим категорию (открытых) пар гладких схем SmOp как подкатегорию в категории стрелок Sm, объектами которой являются открытые вложения. Определим категорию $(\mathrm{SmOp})^{\mathrm{ind}}$ пар гладких инд-схем как категорию индуктивных последовательностей в SmOp. Аналогичным образом определим категории Fr^{qaSmOp}, $(Fr^{\mathrm{qaSmOp}})^{\mathrm{ind}}$ пар квази-аффинных оснащенных гладких схем и инд-схем, соответственно.

Теорема 4. *Пусть* $(Y, f_1, \ldots, f_c, w, Z)$, $Y = (Z(f_1, \ldots, f_c, w) - Z) \subset \mathbb{A}^n_S$ *– гладкая оснащённая квази-аффинная схема над* S. *Тогда предпучок* $(Y \wedge T^l)^{\mathrm{fr}}$ *представим парой гладких оснащённых квази-аффинных* S*-инд-схем естественным образом. Т.е. существует функтор* $(-)^{l,\mathrm{fr}}\colon$ $\colon Fr^{\mathrm{qaSm}} \to (Fr^{qaSmOp})^{\mathrm{ind}}$, *такой, что для любой* $Y \in Fr^{\mathrm{qaSm}}$ *образ* $(Y)^{l,\mathrm{fr}}\colon (Fr^{\mathrm{qaSm}})^{\mathrm{ind}}$ *под действием забывающего функтора*

$$(Fr^{qaSmOp})^{\mathrm{ind}} \to (SmOp)^{\mathrm{ind}}$$

в категорию пар гладких инд-схем представляет предпучок $(Y \wedge T^l)^{\mathrm{fr}}$.

3.1. Конструкция модели $(Y \wedge T^l)^{\mathrm{fr}}_r$.

Конструкция 1. Пусть $F = (Y, f_1, \dots, f_c, w, Z) = (Y, y_1, \dots, y_c, w)$ – квази-аффинная оснащённая S-схема коразмерности $l = c - n$ уровня n, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n_S)$, $y \in \Gamma(\mathbb{P}^n_S, \mathcal{O}(d))$, $f = y/t^d_\infty$.

Пусть $r \in \mathbb{Z}$, $r > n$, $r > d$. Для всякого $l \in \mathbb{Z}$ построим пару квази-аффинных оснащённых S-схем $F^{l,\mathrm{fr}}_r$ (также обозначаемую $(Y, f, w)^{l,\mathrm{fr}}_r$) уровня r и определим T-спектр $F^{\mathrm{fr}}_r = (F^{0,\mathrm{fr}}_r, \dots, F^{l,\mathrm{fr}}_r, \dots)$ (обозначаемый также $(Y, f, e)^{\mathrm{fr}}_r$).

Исполнение. Напомним обозначения $d^s_r = 3^r$, $d^e_r = (d^s_r)^r$.
(Шаг 1) Для всякого $D \in \mathbb{Z}$ и $D^b = D + d^s_r - d^e_r$ рассмотрим гомоморфизм пучков на $\mathbb{P}^r_S$

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{O}(D)^r \oplus \mathcal{O}(D^b) \oplus \mathcal{O}(d^s_r)^{r+l} \oplus \mathcal{O}(d^e_r) & \to & \mathcal{O}(d^s_r + D)\colon \\ (a_1, \dots, a_r, b), (s_1, \dots, s_r, e) & \mapsto & \sum\limits_{i=1,\dots,r+l} a_i s_i + be, \end{array}$$

и для всякого $(s, b) = (s_1, \dots, s_l, b) \in \Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(d^s_r)^{r+l} \oplus \mathcal{O}(d^e_r))$ рассмотрим индуцированный сюръективный гомоморфизм пучков на $\mathbb{P}^r_S$

$$s\colon \mathcal{O}(D)^r \oplus \mathcal{O}(D^b) \to \mathcal{I}(s)(D) + \mathcal{I}(b)(D^b).$$

Выберем $D_r \in \mathbb{Z}$, такое, что для всякого $(s, e) = (s_1, \dots, s_{r+l}, e) \in \Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(d^s_r)^{r+l} \oplus \mathcal{O}(d^e_r))$ индуцированный гомоморфизм

$$(s, e)\colon \Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(D_r)^r \oplus \mathcal{O}(D^b)) \to \Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(s)(D_r) + \mathcal{I}(b)(D^b_r)) \qquad (3)$$

сюръективный, где $D^b_r = D_r + d^s_r - d^e_r$.
(Шаг 2) Рассмотрим аффинное пространство сечений

$$\Gamma_r = \Gamma(\mathbb{P}^r_S, \mathcal{O}(D_r)^{c(r+l)} \oplus \mathcal{O}(D^b_r)^c \oplus \mathcal{O}(d^s_r)^r \oplus \mathcal{O}(d^e_r)) \oplus \Gamma(\mathbb{P}^{r-1}_S, \mathcal{O}(d^s_r)^r),$$

обозначая его точки через (A, b, s, e), где

$$A \in \mathrm{Mat}_{c\times(r+l)}(\Gamma(\mathbb{P}^r_S, \mathcal{O}(d^s_r))), \quad B \in \mathrm{Vect}_c(\Gamma(\mathbb{P}^r_S, \mathcal{O}(D^b_r))),$$
$$s \in \Gamma(\mathbb{P}^r_S, \mathcal{O}(d^s_r)^{r+l}), \quad e \in \Gamma(\mathbb{P}^r_S, \mathcal{O}(d^e_r)).$$

Определим отображение

$$eq\colon \Gamma_r \to \Gamma(\mathbb{P}^n_S, \mathcal{O}(d^s_r + D_r)) \oplus \Gamma(\mathbb{P}^{n-1}_S, \mathcal{O}(d^s_r)), :$$
$$(A, B, s, e) \mapsto (t^{D_r + d^s_r - d}_\infty y - As + Be, (s_1 - t^{d^s_r}_1)\big|_{\mathbb{P}^{r-1}_S}, \dots, (s_r - t^{d^s_r}_r)\big|_{\mathbb{P}^{r-1}_S}).$$

(Шаг 3) Рассмотрим теоретико-схемные нули $C = eq^{-1}(0) \subset \Gamma_r$. По построению эта подсхема параметризует наборы (A, B, s, e), такие, что $t^{D_r + d^s_r - d}_\infty y = As + Be$, и $s_i\big|_{\mathbb{P}^{r-1}} = t^{d^s_r}_i$, $i = 1, \dots, r$. Следовательно, вектор функций $(s_1/t_\infty^{d_r^s}, \dots, s_r/t_\infty^{d_r^s})$ задаёт конечное оснащённое соответствие из S в $Z(y) = Z(f) \subset \mathbb{A}^n_S$. Обозначим через $E \subset C$ замкнутую подсхему, S-точки которой задают соответствия из S в $Y = Z(f, w)$. Обозначим через G_Z и R замкнутые подсхемы в E, параметризующие наборы (A, B, s, e), для которых $Z(s) \cap (Z \times \mathbb{A}^{r-n}) \neq \varnothing$ и $Z(s) \cap (Y \times 0) \neq \varnothing$ соответственно.

Определим квази-аффинную оснащённую S-схему $F_r^{l,\mathrm{fr}} = (eq, v, G_Z)$, где $v \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^r_S)$, $v\big|_E = 0$, $v\big|_{C-E} = 1$. Определим квази-аффинную оснащённую S-схему $E_r^{l,\mathrm{fr}} = (eq, v, G_Z \cup R)$. Определим $(Y, f, e)_r^{l,\mathrm{fr}}$ как пару $(F_r^{l,\mathrm{fr}}/E_r^{l,\mathrm{fr}})$.

(Шаг 4) Определим T-спектр

$$(Y, f, e)_r^{\mathrm{fr}} = ((Y, f, e)_r^{0,\mathrm{fr}}, (Y, f, e)_r^{1,\mathrm{fr}}, \dots, (Y, f, e)_r^{l,\mathrm{fr}}, \dots),$$

$$(Y, f, e)_r^{l,\mathrm{fr}} \wedge T \to (Y, f, e)_r^{l+1,\mathrm{fr}} \colon ((A, B, s_1, \dots, s_{r+l}, e), \alpha) \mapsto (A, B, s_1, \dots, s_{r+l}, C_r(\alpha) t_\infty^{d_r^s}, \widehat{e}),$$

$C_j(\alpha) = C_{j-1}(\alpha)(C_{j-1}(\alpha)^2 - 1)$, $C_0(\alpha) = \alpha$, и $\widehat{e}$ определяется аналогично определению 9. □

3.2. σ-стабилизация и модель $(Y \wedge T^l)^{\mathrm{fr}}$.

Конструкция 2. Пусть $F = (Y, f, w, Z) = (Y, y, w, Z)$ – квази-аффинная оснащённая схема коразмерности c уровня n и степени d, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n_S)$, $y \in \Gamma(\mathbb{P}^n_S, \mathcal{O}(d))$, $f = y/t_\infty^d$. Пусть $r \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}$. Определим отображение $(Y, f, w)_r^{l,\mathrm{fr}} \to (Y, f, w)_{r+1}^{l,\mathrm{fr}}$.

Исполнение. Рассмотрим отображение

$$\begin{array}{lcl}
\Gamma(\mathbb{P}^r_S, \mathcal{O}(d_r^s)^{r+l} \oplus \mathcal{O}(d_r^e)) & \to & \Gamma(\mathbb{P}^{r+1}_S, \mathcal{O}(d_{r+1}^s)^{r+1+l} \oplus \mathcal{O}(d_{r+1}^e)) \\
((s_1, \dots, s_r, e) & \mapsto & (\widehat{s}_1, \dots, \widehat{s}_{r+l}, t_{r+1}^{d_{r+1+l}^s}, \widehat{e}), \\
\widehat{s}_i & = & (s_i - t_\infty^{d_r^s}) s_i (s_i + t_\infty^{d_r^s}) \\
(t_\infty^{d_{r+1}^e} - \widehat{e}) & = & (t_\infty^{d_r^e} - e) \prod\limits_{i=1,\dots,r} (s_i - t_\infty^{d_r^s})(s_i + t_\infty^{d_r^s}).
\end{array}$$

Пусть $a = (a_1, \dots, a_{r+l}) \in \Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(D_r)^{r+l})$, $b \in \Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(D_r^b))$, и рассмотрим сумму $\sum\limits_{i=1,\dots,r+l} a_i s_i + be \in \Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(D_r + d_r^s))$. Тогда $\sum\limits_i a_i s_i + be \in \Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(se)(D_r))$, и следовательно,

$$t_\infty^P(\sum_i a_i s_i + be) \in \Gamma(\mathbb{P}^{r+1}, \mathcal{I}(\widehat{s}, \widehat{e})(D_{r+1})),$$

где $P = (D_{r+1}+d^s_{r+1})-(D_r+d^s_r)$; а по сюръективности (3), существуют

$$\widehat{a} = (\widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_{r+1+l}) \in \Gamma(\mathbb{P}^{r+1}, \mathcal{O}(D_{r+1})^{r+1+l}), \widehat{b} \in \Gamma(\mathbb{P}^{r+1}_S, \mathcal{O}(D^b_r)),$$

такие, что

$$\sum_{i=1,\dots,r+1+l} \widehat{a}_i\widehat{s}_i + \widehat{b}\widehat{e} = t_\infty^{(D_{r+1}+d^s_{r+1})-(D_r+d^s_r)}\Big(\sum_i a_i s_i + be\Big).$$

Поскольку указанное утверждение универсально по отношению к S, то существует регулярное отображение

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathbb{P}^r_S,&\mathcal{O}(D_r)^{r+l} \oplus \mathcal{O}(D^b_r) \oplus \mathcal{O}(d^s_r)^{r+l} \oplus O(d^e_r))\\ &\to \Gamma(\mathbb{P}^{r+1}_S, \mathcal{O}(D_{r+1})^r \oplus \mathcal{O}(D^b_{r+1}) \oplus \mathcal{O}(d^s_{r+1})^{r^1} \oplus O(d^e_{r+1})), \quad (4)\\ (a, b, s, e) &\mapsto (\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{s}, \widehat{e}).\end{aligned}$$

Для всякой аффинной оснащённой схемы $F = (Y, f, e) = (Y, y, e)$ коразмерности $c - n$ уровня n и степени d определим отображение $(Y, f, e)^{l,\mathrm{fr}}_r \to (Y, f, e)^{l,\mathrm{fr}}_{r+1}$ как отображение, индуцированное отображением

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathbb{P}^r_S, \mathcal{O}(D_r)^{c(r+l)} \oplus \mathcal{O}(d^s_r)^{r+l}\oplus&\\ &\to \Gamma(\mathbb{P}^{r+1}_S, \mathcal{O}(D_{r+1})^{c(r+1+l)} \oplus \mathcal{O}(d^s_{r+1})^{r+1+l}\oplus\\ &\mathcal{O}(D^b_r)^c \oplus O(d^e_r))\mathcal{O}(D^b_{r+1})^c \oplus O(d^e_{r+1})), \quad (5)\\ &(A, B, s, e) \mapsto (\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{s}, \widehat{e}),\end{aligned}$$

которое индуцировано в свою очередь построенным выше отображением (4). □

Определение 12. Пусть $F = (Y, f, w, Z) = (Y, y, w, Z)$ – квази-аффинная оснащённая схема коразмерности c уровня n и степени d, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n_S)$, $y \in \Gamma(\mathbb{P}^n_S, \mathcal{O}(d))$, $f = y/t^d_\infty$. Для всякого $l \in \mathbb{Z}$ определим пару квази-аффинных оснащённых инд-схем $F^{l,\mathrm{fr}} = \varinjlim_r (Y, f, w)^{l,\mathrm{fr}}_r$, а затем определим T-спектр пар квази-аффинных оснащённых инд-схем

$$F^{\mathrm{fr}} = \varinjlim_r (Y, f, w)^{\mathrm{fr}}_r.$$

3.3. Мотивная эквивалентность и гладкость.

Предложение 1. *Пусть* $(Y, f, w, Z) \in \mathrm{Fr}^{\mathrm{qaSm}}_{n,l}$ *и* $r \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}$. *Для любой* S*-точки* $(A, B, s, e) \in (Y, f, w, Z)^{l,\mathrm{fr}}_r$ *существует* r', *такое, что при композиции с отображением*

$$(Y, f, w, Z)^{l,\mathrm{fr}} \to (Y, f, w, Z)^{l,fr}_{r'}$$

(A, B, s, e) *является* S*-гладкой точкой* $(Y, f, w, Z)^{l,\mathrm{fr}}_{r'}$.

Доказательство. S-точка $(A, B, s, e) \in (Y, f, w)^{l,\mathrm{fr}}_r$ является гладкой, если дифференциал отображения eq в точке (A, B, s, e)

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathbb{P}^r_S, \mathrm{Mat}_{c\times(r+l)}(\mathcal{O}(D_r)) \oplus \mathrm{Vect}_c(\mathcal{O}(D^b_r)) \oplus \mathcal{O}(d^s_r)^r \oplus \mathcal{O}(d^e_r))\\ \to \Gamma(\mathbb{P}^e_S, \mathcal{O}(D_r + d^s_r)^c) \oplus \Gamma(\mathbb{P}^{r-1}_S, \mathcal{O}(d^s_r)^r), \qquad (6)\\ (\mathrm{d}\, A, \mathrm{d}\, B, \mathrm{d}\, s, \mathrm{d}\, e) \mapsto (\mathrm{d}\, A \cdot s + \mathrm{d}\, B \cdot e + A\,\mathrm{d}\, s + B\,\mathrm{d}\, e, \mathrm{d}\, s\big|_{\mathbb{P}^{r-1}_S}),\end{aligned}$$

является сюръективным.

Поскольку $s_i\big|_{\mathbb{P}^r_S} = t_i^{d^s_r}$, $i = 1, \dots, r$, то $Z(s) \subset \mathbb{A}^r_S$. Также отметим, что из соотношения $t_\infty^{D_r+d^s_r-d} y = As + Be$ и линейной независимости дифференциалов функций $f_i = y_i/t^d_\infty$, $i = 1, \dot{c}$, следует, что ранг матрицы $(A, B)\big|_{Z(s)} \in \mathrm{Mat}_{c\times(r+1+l)}$ максимален и равен c, т.е. следует сюръективность отображения

$$\begin{array}{lcl}\Gamma(Z(s, e), \mathcal{O}(d^s_r)^{r+l}) & \to & \Gamma(Z(s, e), \mathcal{O}(D_r + d^s_r)^c)\\ (\mathrm{d}\, s, \mathrm{d}\, e)\big|_{Z(s,e)} & \mapsto & (A\,\mathrm{d}\, s + B\,\mathrm{d}\, e)\big|_{Z(s,e)}.\end{array}$$

Из сюръективности отображения (3) следует сюръективность (6). □

Лемма 3. *Пусть* $F = (Y, f, w, Z) = (Y, y, w, Z)$ *– квази-аффинная оснащённая схема коразмерности* c *уровня* n *и степени* d, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n_S)$, $y \in \Gamma(\mathbb{P}^n_S, \mathcal{O}(d))$, $f = y/t^d_\infty$. *Пусть* $F^{l,\mathrm{fr}} = (Y^{l,\mathrm{fr}}, f^{l,\mathrm{fr}}, w^{l,\mathrm{fr}}, Z^{l,\mathrm{fr}})$, *и рассмотрим предпучок, представимый парой инд-схем* $Y^{l,\mathrm{fr}}$. *Тогда морфизм предпучков*

$$Y^{l,\mathrm{fr}} \to (Y \wedge T^l)^{\mathrm{fr}} \colon (A, B, s, e) \mapsto (s, e)$$

является мотивной эквивалентностью.

Доказательство. Для фиксированной пары (s, e) пара (A, B) определяется как сечение когерентного пучка

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Mat}_{c\times(r+l)}(\mathcal{O}(D_r)) \oplus \mathrm{Vect}_c(\mathcal{O}(D^b_r) \to \mathcal{O}(D_r + d^s_r)).$$

Т.е. набор (A, B, s, e) определяется как сечения когерентного пучка на относительной схеме. Поскольку сечения когерентных пучков удовлетворяют свойству подъёма на аффинных схемах, то морфизм $Y^{l,\mathrm{fr}} \to (Y \wedge T^l)^{\mathrm{fr}} \colon (A, B, s, e) \mapsto (s, e)$ является тривиальным расслоением по отношению к $\mathbb{A}^1$-локальной инъективной модельной структуре на категории симплициальных предпучков с отмеченной точкой на категории аффинных схем. Следовательно, $Y^{l,\mathrm{fr}} \to (Y \wedge T^l)^{\mathrm{fr}}$ является $\mathbb{A}^1$-эквивалентностью Нисневич-локально, и значит, является мотивной эквивалентностью. $\square$

Список литературы

1. G. A. Garkusha, I. A. Panin, *Framed motives of algebraic varieties (after V. Voevodsky)*. arXiv:1409.4372 (2014).
2. V. Voevodsky, *Notes on framed correspondences*. math.ias.edu/vladimir/files/framed.pdf (2001).

Drujinin A. Smooth affine model for the framed correspondences spectrum.

The framed correspondences T-spectrum of a smooth affine scheme is a T-spectrum of Nisnevich sheaves. We construct the motivically equivalent model of the T-spectrum representable in the category of pairs of smooth affine ind-schemes in the case of a base scheme of a finite Krull dimension. In other words, the motivic spaces of $(\mathbb{P}, \infty)^{\wedge\infty}$-loops in the relative motivic sphere $\mathbb{A}^{\infty+l}_Y/(\mathbb{A}^{\infty+l}_Y - 0)$ are represented in the category of pairs of smooth affine ind-schemes. The construction in not functorial on the category of smooth affine schemes, but it is so on the category of smooth affine framed schemes, that is defined in the text.

Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
С.-Петербургский государственный
университет, 14 линия В.О., дом 29Б,
С.-Петербург 199178 Россия;
С.-Петербургское отделение
математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: andrei.druzh@gamil.com

Поступило 25 ноября 2019 г.