Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 484, 2019 г.

А. И. Генералов, А. С. Миронов

О ВЛОЖЕНИЯХ СВОБОДНОЙ ГРУППЫ В ГРУППУ БЕСКОНЕЧНЫХ УНИТРЕУГОЛЬНЫХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МАТРИЦ

В данной работе приводятся примеры свободных групп ранга 2, являющихся подгруппами группы бесконечных унитреугольных целочисленных матриц $UT(\infty, \mathbb{Z})$. Доказательство их свободности проводится с помощью пинг-понг леммы. Один из наших примеров является модификацией примера, приведенного В. Голубовским в [1].

Определение 1. *Матрица* $U = [U_{ij}]_{i,j=1}^{\infty} \in UT(\infty, \mathbb{Z})$ *называется* ***конечно-полосной****, если существует такое* $s \in \mathbb{N}$*, что* $U_{ij} = 0$ *для всех* i, j *таких, что* $j - i \geqslant s$.

Определение 2. *Матрица* $U = [U_{ij}]_{i,j=1}^{\infty} \in UT(\infty, \mathbb{Z})$ *называется* ***периодической****, если существует такое* $t \in \mathbb{N}$*, что матрица* $U' = [U_{ij}]_{i,j=t+1}^{\infty}$ *(после соответствующей перенумерации индексов) совпадает с* U*, а любое такое* t *называем периодом матрицы* U.

Ясно, что произведение двух конечно-полосных матриц есть конечно-полосная матрица и что произведение двух матриц с периодом t также имеет период t.

Обозначим через $UT_b(\infty, \mathbb{Z})$ подгруппу в $UT(\infty, \mathbb{Z})$, состоящую из всех конечно-полосных матриц, чьи обратные также конечно-полосны, а через $UT_{pb}(t, \infty, \mathbb{Z})$ обозначим подгруппу в $UT_b(\infty, \mathbb{Z})$, состоящую из всех конечно-полосных матриц периода t.

Мы рассмотрим действия таких групп на определенные подмодули в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Для фиксированного $t \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ введем обозначение

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}(t) := \{v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid v_n = v_{n+t} \text{ для всех } n\}.$$

На $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ естественным образом вводится действие группы $UT_b(\infty, \mathbb{Z})$ посредством "бесконечного матричного умножения" вектора-столбца $v = (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ на матрицу $U \in UT_b(\infty, \mathbb{Z})$ слева. Конечная-полосность U гарантирует корректность этого определения. Более того, таким же

Ключевые слова: группа бесконечных унитреугольных целочисленных матриц, свободная группа, пинг-понг лемма.

Первый из авторов благодарит грант РФФИ 17-01-00258 за поддержку.

образом вводится действие группы $UT_{pb}(t,\infty,\mathbb{Z})$ на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}(t)$ (действие $UT_{pb}(t,\infty,\mathbb{Z})$ на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ уже введено, и остается увидеть, что элемент из $UT_{pb}(t,\infty,\mathbb{Z})$ не выведет никакой вектор, принадлежащий подмодулю $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}(t)$, за его пределы).

Через I_t обозначаем единичную матрицу порядка t, через $e_{ij}\in\mathbb{Z}^{t\times t}$ обозначаем матричные единицы (т.е. в e_{ij} на позиции (i,j) стоит единица, а остальные ее элементы нулевые).

Теорема 1. *Пусть $a,b\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1,-1\}$, и пусть $M' := I_t + ae_{ij}\in\mathbb{Z}^{t\times t}$, где $1\leqslant i<j\leqslant t$. Для $\ell := t+i-j+1$ рассмотрим матрицу $M'' := I_t + be_{1\ell}$. Пусть H – подгруппа группы $UT_{pb}(t,\infty,\mathbb{Z})$, порожденная матрицами*

$$A := \operatorname{diag}(M',M',M',\dots),$$
$$B := \operatorname{diag}(I_{j-1},M'',M'',M'',\dots).$$

Тогда H изоморфна свободной группе ранга 2.

Доказательство. Мы используем ранее введенное действие группы $UT_{pb}(t,\infty,\mathbb{Z})$ на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}(t)$. Рассмотрим следующие два подмножества X_1, $X_2\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}(t)$:

$$\begin{aligned} X_1 := \{v=(v_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}(t)\ \mid\ & |v_i|<|v_j| \\ & \text{и } v_k=0 \ \text{ для } k\in\{1,\dots,t\}\setminus\{i,j\}\ \},\\ X_2 := \{v=(v_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}(t)\ \mid\ & |v_i|>|v_j| \\ & \text{и } v_k=0 \ \text{ для } k\in\{1,\dots,t\}\setminus\{i,j\}\ \}.\end{aligned}$$

Ясно, что $X_1\not\subset X_2$. Чтобы применить пинг-понг лемму, требуется доказать, что для любого целого $m\neq 0$ и для любых $v\in X_1$, $w\in X_2$ верно, что $A^m v\in X_2$ и $B^m w\in X_1$.

Пусть $v\in X_1$, $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Введем обозначение $v' := A^m v = (v'_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}(t)$. Так как $|v_i|<|v_j|$, то

$$|v'_i| = |v_i + amv_j| > |(a|m|-1)v_j| \geqslant |v_j| = |v'_j|,$$

и, следовательно, $v'\in X_2$. Если же $v\in X_2$, $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, то для $v' := B^m v$ получаем:

$$v'_j = v_j + bmv_{\ell+j-1} = v_j + bmv_{t+i} = v_j + bmv_i.$$

Теперь аналогично предыдущему доказывается, что $|v'_j|>|v'_i|$, т.е. $v'\in X_1$. Применяя пинг-понг лемму, получаем, что H – свободная группа со свободными образующими A,B. □

Следствие 1. *Пусть* $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, -1\}$*, и пусть*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}, A = \operatorname{diag}(M, M, M, \cdots), B = \operatorname{diag}(1, M, M, \cdots).$$

Тогда подгруппа группы $UT_{pb}(2, \infty, \mathbb{Z})$*, порожденная матрицами* A *и* B*, изоморфна свободной группе ранга* 2.

Замечание 1. Пример свободной группы из следствия 1 является модификацией примера в [1], где доказательство соответствующего результата не использует пинг-понг лемму, но является также достаточно элементарным.

Следующее утверждение доставляет еще один пример использования теоремы 1.

Следствие 2. *Пусть* $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, -1\}$*,* $t \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$*, и пусть*

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, M'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & b \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{t\times t},$$
$$A = \operatorname{diag}(M', M', M', \cdots), B = \operatorname{diag}(1, M'', M'', \cdots).$$

Тогда подгруппа группы $UT_{pb}(t, \infty, \mathbb{Z})$*, порожденная матрицами* A *и* B*, изоморфна свободной группе ранга* 2.

Список литературы

1. W. Hołubowski, *Free subgroups of the group of infinite unitriangular matrices.* — Int. J. Algebra and Comput. **13**, No. 1 (2003), 81–86.

Generalov A. I., Mironov A. S. On embedings of the free group into the group of infinite unitriangular matrices.

With the help of the ping-pong lemma we prove that some 2-generated subgroups of the group of infinite unitriangular integer matrices are tree.

Some of these examples are similar to the celebrated examples by W. Hołubowski (2003).

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `ageneralov@gmail.com`
E-mail: `st063750@student.spbu.ru`

Поступило 9 сентября 2019 г.