Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 484, 2019 г.

А. И. Генералов

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБР ДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА. V

§1. Введение

В работах [1–17] были вычислены алгебры Йонеды для некоторых серий алгебр диэдрального или полудиэдрального типа из классификации К. Эрдман [18]. Настоящая статья продолжает этот цикл работ. Напомним, что наряду с диаграммным методом Бенсона–Карлсона [19], использованным, например, в [1–3, 5, 10, 12, 15], мы часто используем также подход работы [4]. Его существо составляет то, что на основе некоторых эмпирических наблюдений мы выдвигаем гипотезы о строении минимальных проективных резольвент простых модулей, и после их обоснования считываем "когомологическую информацию" с найденных резольвент, что приводит к описанию алгебр Йонеды рассматриваемых алгебр.

В настоящей работе мы, используя подход из [4], даём описание алгебры Йонеды для некоторой серии локальных алгебр, представленной в классификации К. Эрдман [18]).

Отметим, что техника работы [4] была применена также для вычисления алгебры когомологий Хохшильда большого числа семейств конечномерных алгебр, а также целочисленных групповых колец диэдральных и полудиэдральных групп; см. работу [21] и цитированную в ней литературу.

§2. Формулировка основных результатов

Пусть R – конечномерная алгебра над полем K. Все рассматриваемые модули – левые. Через

$$\mathcal{E}(M)=\bigoplus_{m\geqslant 0}\operatorname{Ext}^m_R(M,M)$$

обозначим Ext-алгебру R-модуля M. Если R – базисная K-алгебра с радикалом Джекобсона $J(R)$, то Ext-алгебра $\mathcal{E}(R/J(R))$ называется

Ключевые слова: алгебра Йонеды, алгебры диэдрального типа.
Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 17-01-00258).

алгеброй Йонеды алгебры R и обозначается через $\mathcal{Y}(R)$. В дальнейшем предполагаем, что поле K алгебраически замкнуто.

Определим алгебры $R_{m,n} := K[X,Y]/J$, где $m,n \in \mathbb{N}$, $m \geqslant n \geqslant 2$, $m+n > 4$, а идеал J порождён элементами

$$XY, \ \ X^m - Y^n.$$

Образы элементов X, Y при каноническом отображении из $K[X,Y]$ в R обозначаем через x и y соответственно. Поскольку алгебра $R_{m,n}$ локальная, то сейчас $\mathcal{Y}(R_{m,n})$ – это Ext-алгебра единственного простого $R_{m,n}$-модуля S.

Для описания алгебры Йонеды $\mathcal{Y}(R_{m,n})$ мы построим некоторые градуированные алгебры. Введём на свободной K-алгебре $K\langle u_1, u_2, v\rangle$ градуировку такую, что

$$\deg u_1 = \deg u_2 = 1, \quad \deg v = 2,$$

а затем определим алгебру $\mathcal{E} := K\langle u_1, u_2, v\rangle/I$, где идеал I порождён следующими (однородными) элементами

$$u_1 v - v u_1, \ \ u_2 v - v u_2, \ \ u_1^2, \ \ u_2^2. \tag{2.1}$$

На алгебре $\mathcal{E}$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой алгебры $K\langle u_1, u_2, v\rangle$.

Кроме того, определим алгебру $\mathcal{E}' := K\langle u_1, u_2\rangle/I'$, где $K\langle u_1, u_2\rangle$ рассматривается с градуировкой такой, что $\deg u_1 = \deg u_2 = 1$, а идеал I' порождён элементами

$$u_1 u_2^2 - u_2^2 u_1, u_1^2;$$

кроме того, алгебра $\mathcal{E}'$ рассматривается с соответствующей индуцированной градуировкой.

Теорема 2.1. *Пусть $R = R_{m,n}$, где $m,n \in \mathbb{N}$, $m \geqslant n \geqslant 2$, $m+n > 4$. Если $n > 2$, то алгебра Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ алгебры R как градуированная алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{E}$. Если $n = 2$, то $\mathcal{Y}(R) \simeq \mathcal{E}'$ как градуированные алгебры.*

§3. Резольвента

Пусть $R = R_{m,n}$, $m,n \in \mathbb{N}$, $m \geqslant n \geqslant 2$, $m+n > 4$. Ясно, что $\dim_K R = m+n$, а K-базисом для R служит множество

$$\{1\} \cup \{x^i\}_{i=1}^m \cup \{y^j\}_{j=1}^{n-1}.$$

Гомоморфизм $w^*\colon R \to R$ правого умножения на элемент $w \in R$ мы будем для простоты также обозначать через w.

Рассмотрим следующий бикомплекс $B_{\bullet\bullet}$, расположенный в первой четверти плоскости (т.е. строки и столбцы занумерованы числами $0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{tikzcd}
\arrow[d, "x"'] & \cdots \arrow[d, "y"'] & \cdots \arrow[d, "x"'] & \cdots \arrow[d, "y"'] & \cdots \arrow[d, "x^{m-1}"'] & \cdots \\
R \arrow[d, "y"'] & R \arrow[l, "-y^{n-1}"'] \arrow[d, "x"'] & R \arrow[l, "-x^{m-1}"'] \arrow[d, "y"'] & R \arrow[l, "-y^{n-1}"'] \arrow[d, "x^{m-1}"'] & R \arrow[l, "-x"'] \arrow[d, "y^{n-1}"'] & \dots \arrow[l, "-y"'] \\
R \arrow[d, "x"'] & R \arrow[l, "x^{m-1}"'] \arrow[d, "y"'] & R \arrow[l, "y^{n-1}"'] \arrow[d, "x^{m-1}"'] & R \arrow[l, "x"'] \arrow[d, "y^{n-1}"'] & R \arrow[l, "y"'] \arrow[d, "x^{m-1}"'] & \dots \arrow[l, "x"'] \\
R \arrow[d, "y"'] & R \arrow[l, "-y^{n-1}"'] \arrow[d, "x^{m-1}"'] & R \arrow[l, "-x"'] \arrow[d, "y^{n-1}"'] & R \arrow[l, "-y"'] \arrow[d, "x^{m-1}"'] & R \arrow[l, "-x"'] \arrow[d, "y^{n-1}"'] & \dots \arrow[l, "-y"'] \\
R & R \arrow[l, "x"'] & R \arrow[l, "y"'] & R \arrow[l, "x"'] & R \arrow[l, "y"'] & \dots \arrow[l, "x"']
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Предложение 3.1. *Тотализация*

$$\mathrm{Tot}(B_{\bullet\bullet}) =: Q_\bullet = (Q_t, d_t\colon Q_{t+1} \to Q_t)_{t \geqslant 0}$$

бикомплекса $B_{\bullet\bullet}$ из (3.1) *представляет собой минимальную проективную резольвенту простого R-модуля S.*

Доказательство. Ацикличность комплекса $\mathrm{Tot}(B_{\bullet\bullet}) \to S \to 0$ проверяется прямыми вычислениями. □

Замечание 3.2. Для доказательства предложения 3.1 можно также рассмотреть спектральную последовательность бикомплекса (3.1) и доказать, что второй лист этой спектральной последовательности вырождается (ср. [17, доказательство предложения 2.1]).

Следствие 3.3. $\dim_K \mathrm{Ext}_R^t(S, S) = t + 1$.

Замечание 3.4. По построению комплекса $Q_\bullet$ имеем $Q_t = \bigoplus\limits_{i+j=t} B_{ij}$; мы в дальнейшем будем использовать упорядочение прямых слагаемых в этом разложении по возрастанию второго индекса j.

§4. Образующие для алгебры Йонеды

Пусть по-прежнему $R = R_{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geqslant n \geqslant 2$, $m + n > 4$. В этом разделе мы укажем (конечное) множество образующих алгебры Йонеды

$$\mathcal{Y}(R) = \mathcal{E}(R/J(R)) = \bigoplus_{t \geqslant 0} \mathrm{Ext}_R^t(S, S).$$

Напомним следующую интерпретацию произведения Йонеды в алгебре $\mathcal{Y}(R)$ (в применении к рассматриваемой серии локальных алгебр; – ср. [17]). Пусть $Q_\bullet(S)$ – минимальная проективная резольвента простого R-модуля S. Ввиду изоморфизма

$$\mathrm{Ext}_R^t(S, S) \simeq \mathrm{Hom}_R(\Omega^t(S), S)$$

любой элемент $f \in \mathrm{Ext}_R^t(S, S)$ можно представить соответствующим гомоморфизмом $\widetilde{f}\colon \Omega^m(S) \to S$. При этом $\widetilde{f}$ продолжается до цепного отображения $\{\varphi_l\colon Q_{t+l} \to Q_l\}_{l \geqslant 0}$. В свою очередь $\widehat{f} = \varphi_0$ однозначно определяет гомоморфизм $\widetilde{f}$. Гомоморфизм φ_i назовем i-ой трансляцией элемента f и будем обозначать через $\mathrm{T}^i(f)$ или $\mathrm{T}^i(\widehat{f})$. Тогда произведение Йонеды элементов $f \in \mathrm{Ext}_R^t(S, S)$ и $g \in \mathrm{Ext}_R^s(S, S)$ определяется отображением

$$(g \cdot f)\widehat{\ } = \widehat{g} \cdot \mathrm{T}^s(\widehat{f}). \tag{4.1}$$

Введём в рассмотрение следующие однородные элементы алгебры $\mathcal{Y}(R)$:

$$\begin{aligned} \widehat{u}_1 &= (1\,,\,0)\colon Q_1 = R^2 \to R, &\qquad u_1 &\in \mathrm{Ext}_R^1(S, S);\\ \widehat{u}_2 &= (0\,,\,1)\colon Q_1 = R^2 \to R, &\qquad u_2 &\in \mathrm{Ext}_R^1(S, S);\\ \widehat{v} &= (0,\,1\,,\,0)\colon Q_2 = R^3 \to R, &\qquad v &\in \mathrm{Ext}_R^2(S, S). \end{aligned}$$

Предложение 4.1. *В качестве трансляций* (*подходящих порядков*) *элементов u_1, u_2, v можно взять следующие отображения:*

$$\mathrm{T}^1(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & x^{m-2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{T}^2(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -y^{n-2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

при $n > 2$;

$$\mathrm{T}^2(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

при $n = 2$;
наконец,

$$\mathrm{T}^1(v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство предложения состоит в прямой проверке коммутативности некоторых квадратов (соответствующих цепным отображениям между резольвентами). □

Предложение 4.2. (а) *Если* $n > 2$, *то для элементов* u_1, u_2, v *алгебры* $\mathcal{Y}(R)$ *выполняются соотношения*

$$u_1^2 = u_2^2 = 0, \ \ u_1 v = v u_1, \ \ u_2 v = v u_2.$$

(б) *Если* $n = 2$, *то в алгебре* $\mathcal{Y}(R)$ *выполняются соотношения*

$$u_1^2 = 0, \ \ u_1 u_2^2 = u_2^2 u_1.$$

Доказательство. Доказательство проводится на основе формулы (4.1) с помощью простых вычислений с использованием формул из предложения 4.1. Мы предоставляем читателю проведение подробных вычислений. □

Предложение 4.3. (а) *Пусть* $n > 2$. *Как* K*-линейные пространства приведенные ниже* Ext*-группы имеют следующие базисы:*

$$\mathrm{Ext}^1_R(S,S) = \langle u_1, u_2 \rangle, \quad \mathrm{Ext}^2_R(S,S) = \langle u_2 u_1, v, u_1 u_2 \rangle,$$
$$\mathrm{Ext}^3_R(S,S) = \langle u_1 u_2 u_1, u_1 v, u_2 v, u_2 u_1 u_2 \rangle.$$

(а) *Пусть* $n = 2$. *Тогда*

$$\mathrm{Ext}^1_R(S,S) = \langle u_1, u_2 \rangle, \quad \mathrm{Ext}^2_R(S,S) = \langle u_2 u_1, u_2^2, u_1 u_2 \rangle,$$
$$\mathrm{Ext}^3_R(S,S) = \langle u_1 u_2 u_1, u_1 u_2^2, u_2^3, u_2 u_1 u_2 \rangle.$$

Доказательство. Требуемые равенства следуют непосредственно из определений элементов u_1, u_2, v, а также вычислений их произведений с использованием подходящих трансляций этих элементов (ср. доказательство предложения 4.2). Детали вычислений мы предоставляем провести читателю. $\square$

Предложение 4.4. (а) *Пусть $n > 2$. Тогда множество $\{1, u_1, u_2, v\}$ порождает алгебру Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ как K-алгебру.*

(б) *Пусть $n = 2$. Тогда множество $\{1, u_1, u_2\}$ порождает алгебру Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ как K-алгебру.*

Доказательство. Поскольку

$$\mathrm{Ext}_R^t(S, S) \simeq \mathrm{Hom}_R(Q_t, S),$$

то любому однородному элементу алгебры Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ соответствует некоторое отображение $f\colon Q_t = \bigoplus\limits_{i+j=t} B_{ij} \to S$. Используя предложение 4.3 и следствие 3.3, можем считать, что $t > 3$. Индукцией по t докажем, что f представляется в виде суммы произведений элементов меньших степеней.

Можно считать, что $f(B_{t-j,j}) \neq 0$ ровно для одного значения j. В зависимости от "локальной" конфигурации бикомплекса (3.1), в которую включается модуль $B_{t-j,j}$, мы будем строить коммутативные квадраты вида

$$\begin{array}{ccc} Q_{t+1} & \xrightarrow{d_t} & Q_t \\ {\scriptstyle\varphi_1}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi_0}\downarrow \\ Q_{\ell+1} & \xrightarrow{d_\ell} & Q_\ell \end{array}\quad, \tag{4.2}$$

такие, что $\ell < t$ и $\mathrm{Ker}\,\varphi_0 \subset \mathrm{Ker}\, f$. Тогда найдется гомоморфизм $f'\colon Q_\ell \longrightarrow S$, для которого $f'\varphi_0 = f$. При этом, используя то, что R – QF-алгебра, получаем: $\varphi_0 = \mathrm{T}^\ell(\tilde\varphi)$ для некоторого $\tilde\varphi\colon Q_{t-\ell} \longrightarrow S$, и остаётся применить индуктивное предположение к f' и $\tilde\varphi$.

Заметим, что матрица дифференциала d_{2s}, $s \geqslant 2$, имеет следующий блочный вид, соответствующий разложению

$$Q_t = R \oplus Q_{t-2} \oplus R, \tag{4.3}$$

$$d_{2s} = \left(\begin{array}{c|c|c} x & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \widetilde{d}_{2s-2} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} & y \end{array}\right), \tag{4.4}$$

где $\widetilde{d}_{2s-2} = C_1 \cdot d_{2s-2} \cdot C_2$, а

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \operatorname{diag}(-1, 1, \ldots, 1, -1) \in M_{2s-1}(R), \\ C_2 &= \operatorname{diag}(1, -1, \ldots, 1, -1) \in M_{2s}(R). \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Аналогично для дифференциалов d_{2s+1}, $s \geqslant 1$, получаем

$$d_{2s+1} = \left(\begin{array}{c|c|c} y & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \widetilde{d}_{2s-1} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} & x \end{array}\right), \tag{4.6}$$

где $\widetilde{d}_{2s-1} = D_1 \cdot d_{2s-1} \cdot D_2$, а

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= \operatorname{diag}(-1, 1, \ldots, -1, 1) \in M_{2s}(R), \\ D_2 &= \operatorname{diag}(1, -1, \ldots, -1, 1) \in M_{2s+1}(R). \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Предположим сначала, что $1 \leqslant j \leqslant 2s-1$. Если $t = 2s$, $s \geqslant 2$, то мы строим диаграмму вида (4.2), в которой $\ell = 2s-2$, в качестве φ_0 берём композицию проекции на прямое слагаемое $Q_{2s} \to Q_{2s-2}$ (см. разложение (4.3)) и автоморфизма модуля Q_{2s-2} с матрицей C_1 (из (4.5)), а в качестве φ_1 берём композицию проекции на прямое слагаемое $Q_{2s+1} \to Q_{2s-1}$ (см. разложение (4.3)) и автоморфизма модуля Q_{2s-1} с матрицей C_2. Аналогично для нечетного $t = 2s+1$, $s \geqslant 1$, имеется диаграмма (4.2), в которой $\ell = 2s-1$, в качестве φ_0 берём композицию проекции на прямое слагаемое $Q_{2s+1} \to Q_{2s-1}$ и автоморфизма модуля Q_{2s-1} с матрицей D_1 (см. (4.5)), а в качестве φ_1 берём композицию проекции на прямое слагаемое $Q_{2s+2} \to Q_{2s}$ и автоморфизма модуля Q_{2s-1} с матрицей D_2.

Теперь рассмотрим случай, когда $j = 0$. Конфигурации в бикомплексе (3.1), в которые включается модуль $B_{t,0}$, имеют вид:

$$\text{(I)}\quad \begin{array}{ccc} R & & \\ {\scriptstyle y^{n-1}}\big\downarrow & & \\ R & \xleftarrow{\;x\;} & R; \end{array} \qquad\qquad \text{(II)}\quad \begin{array}{ccc} R & & \\ {\scriptstyle x^{m-1}}\big\downarrow & & \\ R & \xleftarrow{\;y\;} & R \end{array}$$

(на диаграммах изображаются все стрелки, входящие в соответствующий модуль $B_{t,0}$).

а) Предположим, что имеет место конфигурация I, и тогда $t = 2s$ чётно (при этом $s \geqslant 2$). Рассмотрим сначала случай, когда $n > 2$. Тогда мы строим диаграмму вида (4.2), в которой $\ell = 2$, в качестве φ_0 берём проекцию модуля Q_t на первые два прямых слагаемых $B_{t,0} \oplus B_{t-1,1} \simeq B_{2,0} \oplus B_{1,1}$, а в качестве φ_1 берём композицию проекции модуля Q_{t+1} на первые три прямых слагаемых $B_{m+1,0} \oplus B_{m,1} \oplus B_{m-1,2} \simeq B_{3,0} \oplus B_{2,1} \oplus B_{1,2}$ и отображения, определяемого матрицей $\operatorname{diag}(1, 1, y^{n-2})$.

Если же $n = 2$, то строится диаграмма (4.2), в которой $\ell = 2s - 2$, в качестве φ_0 берём композицию проекции модуля Q_{2s} на первые $s + 1$ прямых слагаемых $\bigoplus_{j=0}^{s} B_{2s-j,j} \simeq X := \bigoplus_{j=0}^{s} B_{2s-2-j,j}$ и эндоморфизма модуля X с матрицей $\operatorname{diag}(1, 1, \dots, 1, x^{m-2})$, а в качестве φ_1 берём проекцию модуля Q_{2s+1} на первые $s + 1$ прямых слагаемых $\bigoplus_{j=0}^{s} B_{2s+1-j,j}$.

б) Теперь рассмотрим конфигурацию II; тогда $t = 2s + 1$ нечётно ($s \geqslant 2$). Снова предположим сначала, что $n > 2$. Тогда строится квадрат (4.2), в котором $\ell = 1$, в качестве φ_0 берём композицию проекции модуля Q_{2s+1} на первые два прямых слагаемых $B_{2s+1,0} \oplus B_{2s,1} \simeq X := B_{1,0} \oplus B_{0,1}$ и эндоморфизма модуля X, определяемого матрицей $\operatorname{diag}(1, y^{n-2})$, а в качестве φ_1 берём проекцию модуля Q_{2s+2} на первые два прямых слагаемых $B_{2s+2,0} \oplus B_{2s+1,1} \simeq B_{2,0} \oplus B_{1,1}$.

В случае, когда $n = 2$, мы строим квадрат (4.2), в котором $\ell = 2s - 1$, в качестве φ_0 берём проекцию модуля Q_{2s+1} на первые $s + 1$ прямых слагаемых, а в качестве φ_1 берём композицию проекции модуля Q_{2s+2} на первые $s+2$ прямых слагаемых $\bigoplus_{j=0}^{s} B_{2s+2-j,j} \simeq Y := \bigoplus_{j=0}^{s} B_{2s-j,j}$ и эндоморфизма модуля Y с матрицей $\operatorname{diag}(1, 1, \dots, 1, x^{m-2})$.

Наконец, для $j = t$ (т.е. когда $f(B_{0,t}) \neq 0$), надо провести рассуждения, аналогичные использованным нами при $j = 0$. □

§5. Окончание доказательства теоремы 2.1

Пусть $R = R_{m,n}$. Мы подробно рассмотрим случай, когда $n > 2$; для $n = 2$ в соответствующих рассуждениях потребуются лишь незначительные изменения. Пусть $\mathcal{E} = K[u_1, u_2, v]/I$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 2. Из предложений 4.2 и 4.4 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{Y}(R)$, переводящий канонические образующие алгебры $\mathcal{E}$ в соответствующие образующие алгебры $\mathcal{Y}(R)$, введённые в начале раздела 4. Пусть $\mathcal{E} = \bigoplus_{t\geqslant 0} \mathcal{E}^t$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{E}$ на однородные прямые слагаемые. Теперь следующее утверждение завершает доказательство теоремы 2.1.

Предложение 5.1. *Для любого* $t \geqslant 0 \quad \dim_K \mathcal{E}^t = t+1$.

Доказательство. Будем предполагать, что $t > 0$. Ввиду определяющих соотношений алгебры $\mathcal{E}$ (см.(2.1)) любой моном $f \in \mathcal{E}$ представляется в виде

$$f = u_1^{\varepsilon_1} u_2 u_1 u_2 \dots u_1 u_2^{\varepsilon_2} v^k, \tag{5.1}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, 1\}$. Отсюда легко следует, что $\mathcal{E}^{2s}$, $s \geqslant 1$, порождается множеством

$$\{(u_1u_2)^{s-j} v^j\}_{j=0}^{s} \cup \{(u_2u_1)^{s-j} v^j\}_{j=0}^{s-1},$$

а $\mathcal{E}^{2s+1}$, $s \geqslant 0$, порождается множеством

$$\{(u_1u_2)^{s-j} u_1 v^j\}_{j=0}^{s} \cup \{(u_2u_1)^{s-j} u_2 v^j\}_{j=0}^{s-1}.$$

Для любого t получаем, что $\dim_K \mathcal{E}^t \leqslant t+1$. Поскольку существует сюръективное линейное отображение $\mathcal{E}^t \longrightarrow \mathcal{Y}(R)^t = \mathrm{Ext}_R^t(S, S)$, то выполняется требуемое равенство.

Если $n = 2$ (т.е. $R = R_{m,2}$), то имеется сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{Y}(R)$, где $\mathcal{E}'$ определена в разделе 2, и мы, слегка модифицируя предыдущее рассуждение (а именно, вместо v используя u_2^2), можем доказать, что и в этом случае $\dim_K (\mathcal{E}')^t = t+1$. □

Список литературы

1. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа*, I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 139–162.
2. О. И. Балашов, А. И. Генералов, *Алгебры Йонеды для одного класса диэдральных алгебр.* — Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Вып. 3, No 15 (1999), 3–10.
3. О. И. Балашов, А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа*, II. — Алгебра и анализ **13**, No. 1 (2001), 3–25.
4. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа,* I. — Алгебра и анализ **13**, No. 4 (2001), 54–85.
5. N. V. Kosmatov, *Cohomology of algebras of dihedral type: automatic calculation.* — В кн.: Международн. алг. конф., посв. памяти З. И. Боревича. С.-Пб., 17–23 сент. (2002), 115–116.
6. М. А. Антипов, А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа*, II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 9–36.
7. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа*, IV: серия $D(2\mathcal{B})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 76–89.

8. А. И. Генералов, Е. А. Осиюк, *Когомологии алгебр диэдрального типа*, III: серия $D(2\mathcal{A})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 113–133.
9. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа*, III: серия $SD(3\mathcal{K})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **305** (2003), 84–100.
10. A. I. Generalov, N. V. Kosmatov, *Computation of the Yoneda algebras of dihedral type.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **305** (2003), 101–120.
11. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа,* IV. — Зап. научн. семин. ПОМИ **319** (2004), 81–116.
12. А. И. Генералов, Н. В. Косматов, *Проективные резольвенты и алгебры Йонеды для алгебр диэдрального типа: серия* $D(3\mathcal{Q})$. — Фунд. и прикл. матем. **10** (2004), вып. 4, 65–89.
13. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа,* V. — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 131–154.
14. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа,* VI. — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 183–198.
15. A. Generalov, N. Kosmatov, *Projective rersolutions and Yoneda algebras for algebras of dihedral type.* — Algebras and Represent. Theory **10**, No. 3, 241–256.
16. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа,* VII. Локальные алгебры. — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 130–142.
17. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа,* VIII. — Зап. научн. семин. ПОМИ **394** (2011), 194–208.
18. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras.* — Lecture Notes in Math. Vol. 1428. Berlin; Heidelberg, 1990.
19. D. J. Benson, J. F. Carlson, *Diagrammatic methods for modular representations and cohomology.* — Commun. in Algebra **15**, No. 1/2 (1987), 53–121.
20. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* I: *серия* $D(3\mathcal{K})$ *в характеристике* 2. — Алгебра и анализ **16** (2004), вып. 6, 53–122.
21. А. И. Генералов, А. В. Семенов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* IV: *алгебра когомологий для исключительных локальных алгебр.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **478** (2019), 32–77.

Generalov A. I. Cohomology of algebras of dihedral type. V.

The Yoneda algebras are described in terms of generators and relations for a family of local algebras of dihedral type (from the famous K. Erdmann's list).

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28,
Петродворец,
198504 С.-Петербург, Россия
E-mail: ageneralov@gmail.com

Поступило 6 ноября 2019 г.