Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 483, 2019 г.

В. Г. Фоменко

ОПРЕДЕЛЕНИЕ БЫСТРОЙ СКОРОСТИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ТИПА ЛАМЕ

Посвящается юбилею Михаила Игоревича Белишева

§1. Введение

О работе. В работе [1] решена обратная задача восстановления скоростей быстрых (p-) и медленных (s-) волн в модельной системе типа Ламе по динамическим граничным данным (оператору реакции). Решение основывалось на разделении граничных управлений на два класса: управления из первого класса инициируют только p-волны, управления из второго класса – только s-волны. Разделение было возможно вследствие представления волновых полей внутри области в виде суммы потенциальной и соленоидалной составляющих. Поскольку в полной системе Ламе (с переменной плотностью и младшими членами) подобное представление не имеет силы, не представляется возможным обобщить указанное решение. Позже, в статье [2], та же задача для системы типа Ламе была решена без указанного разделения управлений, однако, решение является теоретически довольно сложным и имеет мало шансов на численную реализацию.

В настоящей работе предлагается схема решения обратной задачи, использующая установленную в [3] возможность концентрации волн в *шапочках* (малых областях) на концах p- и s-лучей[1]. С идейной точки зрения это решение проще и наглядней, и имеет шансы на численную реализацию. Поскольку оно также не использует разделение управлений, с ним связаны надежды на прогресс в задаче для полной системы Ламе[2].

Ключевые слова: обратные задачи, система типа Ламе.

[1]Краткое изложение см. в [4].

[2]Однако, в отличие от решения [2], пока таким способом удается восстановить только быструю скорость.

Предложенная схема, как и предыдущие, является версией метода граничного управления (BC-метод, М. И. Белишев, 1986)[3], использующего свойства управляемости динамических систем для решения обратных задач[4].

Отметим, что на сегодняшний день в классе рассматриваемых многомерных обратных задач BC-метод является единственным подходом, который позволяет восстанавливать скорости оптимальным по времени образом: глубина восстановления пропорциональна времени наблюдения на границе. Это свойство наиболее актуально в геофизических приложениях, поскольку именно оно позволяет восстанавливать парметры среды в реальном времени.

Основной результат. Рассматривается динамическая система типа Ламе, в которой имеются волновые моды двух типов (p-волны и s-волны), а скорости мод c_p и c_s зависят от точки, причем всюду $c_p > c_s$. Плотность в области предполагается постоянной ($\rho = 1$).

Главный результат работы – восстановление скорости c_p в приграничной (регулярной) зоне по оператору реакции на глубину, соответствующую времени наблюдения.

§2. Геометрия

2.1. Метрики. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ есть ограниченная область с гладкой[5] границей Γ. В $\overline{\Omega}$ заданы две гладкие функции (*скорости*) $c_\alpha = c_\alpha(x)$ (здесь и далее везде $\alpha = p, s$), такие, что $0 < c_s < c_p$. Они определяют в $\overline{\Omega}$ конформно-евклидовы метрики

$$ds_\alpha^2 := \frac{|dx|^2}{c_\alpha^2}\,, \tag{2.1}$$

где $|dx|$ – евклидов элемент длины в $\mathbb{R}^3$. Через $\tau_\alpha(x, y)$ обозначим расстояния в этих метриках. Величины $T_\alpha^* := \max_{\Omega} \tau_\alpha(\,\cdot\,, \Gamma)$ назовем *временами заполнения.*

Для подмножества $A \subset \overline{\Omega}$ определим его *метрические окрестности*

$$\Omega_\alpha^r[A] := \left\{ x \in \overline{\Omega} \;\middle|\; \tau_\alpha(x, A) < r \right\}, \qquad r > 0 \tag{2.2}$$

[3]См. [5] и обзор [6].

[4]Для полной системы Ламе эти свойства установлены в [7].

[5]Всюду в работе, применительно к поверхностям, функциям, полям и т.д., *гладкий* означает C^∞-гладкий.

и обозначим через $\Omega^r_\alpha := \Omega^r_\alpha[\Gamma]$ окрестности границы (приграничные слои "толщины" r). Из соотношения скоростей следует

$$\tau_p(x,y) < \tau_s(x,y),\ \Omega^r_s[A] \subset \Omega^r_p[A]$$

для любых $x, y \in \overline{\Omega}$ $(x \neq y)$ и $r > 0$. Термин "времена заполнения" проясняется равенствами $T^*_\alpha = \inf\{r > 0 \mid \Omega^r_\alpha = \overline{\Omega}\}$.

Для $A \subset \overline{\Omega}$ определим эквидистантные поверхности

$$\Gamma^r_\alpha[A] := \left\{x \in \overline{\Omega} \mid \tau_\alpha(x, A) = r\right\}, \qquad r > 0$$

и обозначим через $\Gamma^r_\alpha := \Gamma^r_\alpha[\Gamma]$ эквидистанты границы.

2.2. Регулярная зона. Точке $x \in \overline{\Omega}$ сопоставим множества $\gamma_\alpha(x) := \{\gamma \in \Gamma \mid \tau_\alpha(x,\gamma) = \tau_\alpha(x,\Gamma)\}$ ближайших точек границы. Как известно, при достаточно малом $r > 0$ для любого $x \in \Omega^r_\alpha$ каждое из множеств $\gamma_\alpha(x)$ состоит из одной точки, а система полугеодезических (лучевых) координат с базой Γ регулярна в Ω^r_α. Пусть $T^{\rm reg}_\alpha$ – точные верхние грани тех r, при которых такая регулярность имеет место. Приграничные слои $\Omega^{T^{\rm reg}_\alpha}$ мы называем *регулярными зонами* соответствующих метрик.

Определим $T^{\rm reg} := \min\{T^{\rm reg}_p, T^{\rm reg}_s\}$ и общую регулярную зону $\Omega^{T^{\rm reg}} := \Omega^{T^{\rm reg}}_p$. Все дальнейшие рассмотрения мы проводим в этой общей регулярной зоне.

2.3. Шапочки. Пусть $\sigma \subset \Gamma$ есть (малое) замкнутое подмножество с гладкой границей. Как пример, укажем "круги"

$$D^r_\alpha[\gamma] := \{\gamma' \in \Gamma \,|\, \tau_\alpha(\gamma', \gamma) \leqslant r\}$$

с малым $r > 0$.

Фиксируем положительное $T < T^*_\alpha$ и (малое) $\varepsilon > 0$. *Шапочками* мы называем множества вида

$$\omega^{T,\varepsilon}_\alpha[\sigma] := (\overline{\Omega^T_\alpha} \setminus \Omega^{T-\varepsilon}_\alpha) \cap \overline{\Omega^T_\alpha[\sigma]}. \tag{2.3}$$

Для любой из метрик их типичный вид в регулярной зоне (при $T < T^{\rm reg}$) иллюстрирует рис. 1, на котором опущен индекс α в обозначении шапочек, эквидистант и т.д.[6]

Пунктиром указаны "вертикальные" лучи (геодезические метрики (2.1)), исходящие из точек σ внутрь Ω по нормали к Γ). Сама шапочка затенена.

[6]Рисунки и часть определений заимствованы из [3].

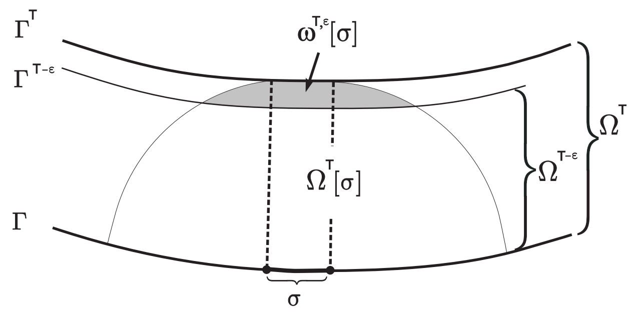

Рис. 1. Шапочка.

Отметим свойство монотонности: $\omega_\alpha^{\xi,\varepsilon'}[\sigma_{\varepsilon'}(\gamma)] \subset \omega_\alpha^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)]$ при $\varepsilon' < \varepsilon$. Введем множество

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \omega_\alpha^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)] := \bigcap_{0<\varepsilon<\xi} \overline{\omega}_\alpha^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)]\,.$$

Пусть точка $x_\alpha(\gamma,\xi)$ – конец отрезка длины ξ соответствующего луча, исходящего из $\gamma \in \Gamma$ по нормали к Γ. Следующий результат описывает поведение шапочек при $\varepsilon \to 0$ (см. [8, Lemma 1]).

Предложение 2.1. *При временах $\xi < T^{\mathrm{reg}}$ справедливо равенство*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \omega_\alpha^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)] = x_\alpha(\gamma,\xi)\,, \qquad \alpha = p, s\,. \tag{2.4}$$

Оно показывает, что при $\varepsilon \to 0$ шапочка $\omega_\alpha^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)]$ стягивается к точке $x_\alpha(\gamma,\xi)$, расположенной на конце соответствующего луча, исходящего из точки γ по нормали к границе Γ.

Шапочки – инструмент решения ряда обратных задач: см. [8–11].

2.4. Области влияния. В дальнейшем переменная $t \geqslant 0$ играет роль времени. Фиксируем $T > 0$ и обозначим через

$$Q^T := \Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^4\,, \qquad \Sigma^T := \Gamma \times [0,T]$$

пространственно-временной цилиндр и его боковую поверхность.

Для точки $(x_0,t_0) \in \overline{Q^T} = \overline{\Omega} \times [0,T]$ определим *конусы влияния*

$$K_\alpha^T[(x_0,t_0)] := \left\{(x,t) \in \overline{Q^T} \mid \tau_\alpha(x,x_0) \leqslant t - t_0\right\}.$$

Для $B \subset \overline{Q^T}$ подобласть

$$K_\alpha^T[B] := \overline{\bigcup_{(x_0,t_0)\in B} K_\alpha^T[(x_0,t_0)]} \tag{2.5}$$

называется *областью влияния* множества B.

Выбрав $\sigma \subset \Gamma$, обозначим

$$\Sigma_\sigma^T := \overline{\sigma} \times [0,T]\,.$$

Из определений видно, что сечение $t=\xi$ области влияния $K_\alpha^T[\Sigma_\sigma^T]$ совпадает с ξ-окрестностью σ в Ω:

$$\left\{x \in \overline{\Omega} \mid (x,\xi) \in K_\alpha^T[\Sigma_\sigma^T]\right\} = \overline{\Omega_\alpha^\xi[\sigma]}\,, \qquad 0<\xi\leqslant T. \tag{2.6}$$

Определим подмножества

$$\Xi_\alpha^T[\sigma] := \Sigma^T \cap K_\alpha^T[\Sigma_\sigma^T] \tag{2.7}$$

боковой поверхности цилиндра.

На иллюстрации (рис. 2): множеству σ соответствует отрезок $\{7,8\}$; части Σ_σ^T боковой поверхности Σ^T соответствует четырехугольник $\{7,8,3,2\}$; окрестность $\Omega_\alpha^T[\sigma]$ ограничена контуром $\{1,2,3,4,5,6,1\}$; множество $\Xi_\alpha^T[\sigma]$ на Σ^T ограничивает контур $\{1,7,8,4,3,2,1\}$.

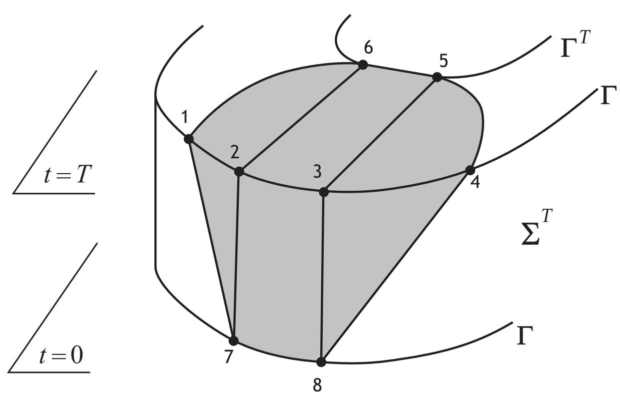

Рис. 2. Области влияния.

С системой типа Ламе будет связаны две метрики вида (2.1), определяемых скоростями волновых мод c_p и c_s, причем $c_p > c_s$ всюду в $\overline{\Omega}$. На рис. 3 (3a) показана картина окрестностей в регулярной зоне. Шапочки $\omega_p^{T,\varepsilon}[\sigma]$ и $\omega_s^{T,\varepsilon}[\sigma]$ затенены.

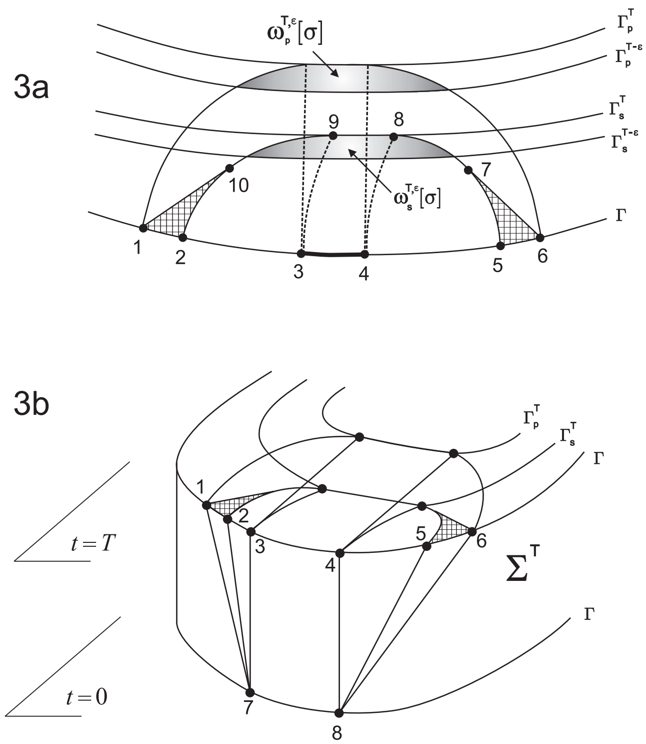

Рис. 3. Пара метрик.

Пара метрик определяет подобласть в Ω вида

$$\Lambda_{ps}^T[\sigma] := \left\{x \in \Omega \,\middle|\, (x,T) \in K_s^T[\Xi_p^T[\sigma]]\right\} \supset \Omega_s^T[\sigma] \tag{2.8}$$

(на рис. 3 (3a) ограничена контуром $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,1\}$). Ее часть $\Lambda_{ps}^T[\sigma]\backslash\Omega_s^T[\sigma]$ в динамике соответствует зоне, в которой присутствуют так называемые *боковые волны* (указана штриховкой). При достаточно малом ε эта часть отделена от шапочки $\omega_s^{T,\varepsilon}[\sigma]$ положительным расстоянием [3].

Рис. 3 (3b) иллюстрирует геометрию областей влияния для пары метрик. Области $\Xi^T_p[\sigma]$ и $\Xi^T_s[\sigma]$ ограничены контурами

$$\{1,7,8,6,5,4,3,2,1\} \quad \text{и} \quad \{2,7,8,5,4,3,2\}$$

соответственно.

§3. Функции и поля

Рассматриваются следующие множества вещественных числовых и векторных ($\mathbb{R}^3$-значных) фунций. Последние называем полями.

Пространство $\mathcal{H}$. Основную роль играет пространство полей

$$\mathcal{H} := L_2(\Omega;\mathbb{R}^3)$$

со скалярным произведением

$$(y,v)_{\mathcal{H}} := \int\limits_{\Omega} y(x)\cdot v(x)\,dx\,;$$

где "$\cdot$" – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$. Для измеримого $A\subset\Omega$ определим подпространство

$$\mathcal{H}[A] := \left\{y\in\mathcal{H}\;\middle|\;\operatorname{supp} y\subset\overline{A}\right\}.$$

Через $H^1(\Omega)$ обозначим соболевское пространство $W^1_2(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \left(\int\limits_{\Omega}\left(u^2(x)+|\nabla u(x)|^2\right)\,dx\right)^{1/2}.$$

Вектор $a\in\mathbb{R}^3$ в точке границы раскладывается в сумму

$$a = a_\nu + a_\theta = a^\nu\,\nu + a_\theta, \tag{3.1}$$

где ν – евклидова внешняя единичная нормаль к Γ, $a^\nu = a\cdot\nu$; a_ν, a_θ суть нормальная и касательная компоненты. Этому разложению мы сопоставляем запись

$$a = \begin{pmatrix} a^\nu \\ a_\theta \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

В пространстве $\mathcal{H}$ выделим подпространства:

(1) *соленоидальных полей*

$$\mathcal{J} := \{y\in\mathcal{H}\mid \operatorname{div} y = 0 \text{ в } \Omega,\ y_\nu = 0 \text{ на } \Gamma\} \tag{3.3}$$

(операция div понимается в смысле распределений); множество гладких полей $\mathcal{J}\cap C^\infty(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3)$ плотно в $\mathcal{J}$;

(2) *потенциальных полей*

$$\mathcal{G} := \{h \in \mathcal{H} \mid h = \nabla\varphi,\ \varphi \in H^1(\Omega)\}; \tag{3.4}$$

множество гладких полей $\mathcal{G} \cap C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ плотно в $\mathcal{G}$.

Подпространства $\mathcal{J}$ и $\mathcal{G}$, состоящие из полей, локализованных в A, обозначаем, соответственно, $\mathcal{J}[A]$ и $\mathcal{G}[A]$.

Справедливо равенство (разложение Вейля)

$$\mathcal{H} = \mathcal{J} \oplus \mathcal{G}$$

(см. [12–14]).

Пространство $\mathcal{F}^T$. Определим пространство $\mathcal{F}^T := L_2(\Sigma^T; \mathbb{R}^3)$ со скалярным произведением

$$(f, g)_{\mathcal{F}^T} := \int\limits_{\Sigma^T} f(\gamma, t) \cdot g(\gamma, t)\, d\Gamma\, dt\,,$$

где $d\Gamma$ – евклидов элемент площади на Γ. Класс гладких полей

$$\mathcal{M}^T := \left\{f \in C^\infty(\Sigma^T; \mathbb{R}^3) \mid \operatorname{supp} f \subset \Gamma \times (0, T]\right\}$$

плотен в $\mathcal{F}^T$. Отметим, что поля из $\mathcal{M}^T$ аннулируются вблизи $t = 0$.

Подмножеству $B \subset \Sigma^T$ сопоставим подпространство

$$\mathcal{F}^T[B] := \left\{f \in \mathcal{F}^T \mid \operatorname{supp} f \subset \overline{B}\right\},$$

содержащее[7] плотное множество гладких полей $\mathcal{M}^T[B]{:=}\mathcal{M}^T{\cap}\mathcal{F}^T[B]$.

Введем скалярное и векторное пространства

$$\mathcal{F}^T_p := L_2(\Sigma^T), \quad \mathcal{F}^T_s := \left\{f \in \mathcal{F}^T \mid (\nu \cdot f)|_\Gamma = 0\right\}.$$

Их подпространства $\mathcal{F}^T_\alpha[B]$ ($\alpha = p, s$) состоят из элементов с носителями в $\overline{B}$.

Подпространства

$$\mathcal{M}^T_p[B] := \left\{f \in C^\infty(\Sigma^T) \mid \operatorname{supp} f \subset \Gamma \times (0, T]\right\} \cap \mathcal{F}^T_p[B]\,,$$

$$\mathcal{M}^T_s[B] := \mathcal{M}^T \cap \mathcal{F}^T_s[B]$$

суть гладкие функции и поля, аннулирующиеся вблизи $t = 0$.

В соответствии с (3.2), запишем:

$$\mathcal{F}^T = \begin{pmatrix} \mathcal{F}^T_p \\ \mathcal{F}^T_s \end{pmatrix}.$$

[7]В случае, если мера границы подмножества B равна нулю на Σ^T.

§4. Система типа Ламе

4.1. Начально-краевая задача. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с гладкой границей Γ. Фиксируем $T \in (0, \infty)$. Обозначим $\varkappa := c_p^2$, $\mu := c_s^2$.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$u_{tt} = \nabla \varkappa \operatorname{div} u - \operatorname{rot} \mu \operatorname{rot} u \quad \text{в } Q^T, \tag{4.1}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \overline{\Omega}, \tag{4.2}$$

$$u = f \quad \text{на } \Sigma^T, \tag{4.3}$$

с гладкими переменными коэффициентами $\mu = \mu(x) > 0$, $\varkappa = \varkappa(x) > 0$ в $\overline{\Omega}$; отметим, что $\varkappa = \lambda + 2\mu$ (λ и μ – стандартные коэффициенты Ламе). Эту систему мы называем *системой типа Ламе* и обозначаем символом α^T. Уравнение (4.1) получается из полного уравнения Ламе[8], описывающего распространение волн в упругой среде, удержанием старших (по порядку дифференцирования) членов; кроме того, полагаем плотность в области $\rho = 1$ [1]. Заметим, что основные свойства полной системы (регулярность решений, управляемость) [7] остаются верными и для системы типа Ламе [3].

$\mathbb{R}^3$-значная функция $f = f(\gamma, t)$ называется *граничным управлением* (Дирихле). Она описывает смещения точек границы, инициирующие волновой процесс в Ω. Решение $u = u^f(x, t)$ (*волна*) есть $\mathbb{R}^3$-значная функция, описывающая смещения точек среды в Ω. Для управлений класса $\mathcal{M}^T$ задача (4.1)–(4.3) имеет единственное классическое гладкое решение u^f.

Отображение $f \mapsto u^f$ непрерывно из $\mathcal{F}^T$ в $L_2\left((0,T); L_2(\Omega; \mathbb{R}^3)\right)$ [7]. Следовательно, оно расширяется с $\mathcal{M}^T$ на управления из $\mathcal{F}^T$ по непрерывности. Под (обобщенным) решением задачи (4.1)–(4.3) для управлений этого класса мы подразумеваем образ f при действии этого расширения.

---

[8] В [15] показано, что в инвариантной (бескоординатной) форме уравнение Ламе может быть записано в виде: $\rho u_{tt} = Lu$;

$$L := \nabla(\lambda + 2\mu) \operatorname{div} - \operatorname{rot} \mu \operatorname{rot} + 2\left([\nabla\mu \times \operatorname{rot}] + [\nabla\mu \times \operatorname{rot}]^* + H_\mu - q\right), \tag{4.4}$$

где оператор $[...]^*$ – сопряженный по Лагранжу, H_μ – оператор умножения на матрицу-функцию вторых производных $(H_\mu)_{ik} = \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_i \partial x_k}$, q – оператор умножения на функцию $q = \Delta\mu$.

4.2. Конечность области влияния. Функции

$$c_p = \sqrt{\varkappa}, \qquad c_s = \sqrt{\mu}$$

$(0 < c_s < c_p)$ имеют смысл скоростей продольной (быстрой) и поперечной (медленнной) мод соответственно. Скорости определяют две конформно-евклидовы метрики $d\tau_\alpha^2 := \frac{|dx|^2}{c_\alpha^2}$ $(\alpha = p, s)$ в $\overline{\Omega}$. Каждая из них задает свои расстояния, окрестности, геодезические, области влияния и т.д.

Уравнение типа Ламе является гиперболическим и имеет два семейства характеристик $\chi_\alpha(x,t) = \mathrm{const}$ в Q^T, определяемых уравнениями $\left(\frac{\partial\chi_\alpha}{\partial t}\right)^2 - c_\alpha^2\,|\nabla\chi|^2 = 0\,.$

По гиперболичности задачи (4.1)–(4.3) имеем известное соотношение

$$\operatorname{supp} u^f \;\subset\; K_p^T[\operatorname{supp} f]\,, \tag{4.5}$$

о котором говорят как о *принципе конечности области влияния.* Оно показывает, что волны в системе типа Ламе распространяются со скоростью, не превышающей скорости быстрой моды c_p.

Пусть $\sigma \subset \Gamma$ и пусть $f \in \mathcal{F}^T[\Sigma_\sigma^T]$, т.е. управление f действует с σ. С учетом (2.6) из соотношения (4.5) следует

$$\operatorname{supp} u^f(\,\cdot\,,t) \;\subset\; \overline{\Omega_p^t[\sigma]}, \qquad t > 0\,. \tag{4.6}$$

4.3. Динамическая система типа Ламе. Здесь и далее мы рассматриваем задачу (4.1)–(4.3) как динамическую систему, обозначаемую через α^T, и снабжаем ее атрибутами теории управления – пространствами и операторами.

Пространство управлений $\mathcal{F}^T$ называется *внешним пространством* системы α^T. Решение u^f интерпретируется как *траектория* системы, а $u^f(\,\cdot\,,t)$ – ее *состояние* в момент времени t. Пространство $\mathcal{H}$ называется *внутренним.* По свойству L_2-регулярности решений (см. конец раздела 4.1) все волны $u^f(\,\cdot\,,t)$ суть его элементы.

Согласно (4.6), соотношение $f \in \mathcal{F}^T[\Sigma_\sigma^T]$ влечет $u^f(\,\cdot\,,t) \in \mathcal{H}[\Omega_p^t[\sigma]]$ при всех $0 < t \leqslant T$, т.е. вся траектория u^f системы α^T не покидает подпространства $\mathcal{H}[\Omega_p^T[\sigma]]$.

4.4. Оператор реакции. Обозначим через $\mathbf{H}^k(\Omega)$ векторные соболевские классы с нормой[9]

$$||u||_{\mathbf{H}^k(\Omega)} := \left(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant k} ||D^\alpha u||^2_{\mathcal{H}}\right)^{1/2}.$$

На полях класса $\mathbf{H}^2(\Omega)$ введем оператор

$$L := \nabla\varkappa\mathrm{div}\, - \mathrm{rot}\,\mu\mathrm{rot}\,,$$

определяющий эволюцию системы α^T. Интегрированием по частям для гладких u и v устанавливается равенство (формула Грина):

$$\Big(Lu, v\Big)_{\mathcal{H}} - \Big(u, Lv\Big)_{\mathcal{H}} = \int\limits_\Gamma \begin{pmatrix} \varkappa\,\mathrm{div}\,u \\ \mu\,\mathrm{rot}\,u\times\nu \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v^\nu \\ v_\theta\end{pmatrix} d\Gamma$$

$$-\int\limits_\Gamma \begin{pmatrix} u^\nu \\ u_\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \varkappa\mathrm{div}\,v \\ \mu\,\mathrm{rot}\,v\times\nu \end{pmatrix} d\Gamma = \Big(Nu, Dv\Big)_{L_2(\Gamma;\,\mathbb{R}^3)} - \Big(Du, Nv\Big)_{L_2(\Gamma;\,\mathbb{R}^3)};$$

мы воспользовались соглашением о записи (3.1)–(3.2) и обозначили

$$Du := \begin{pmatrix} u^\nu \\ u_\theta\end{pmatrix}, \qquad Nu := \begin{pmatrix} \varkappa\,\mathrm{div}\,u \\ \mu\,\mathrm{rot}\,u\times\nu \end{pmatrix} \quad \text{на } \Gamma. \tag{4.7}$$

Соответствие “вход–выход” в динамической системе α^T описывается *оператором реакции* $R^T\colon \mathcal{F}^T\to\mathcal{F}^T$, $\mathrm{Dom}\,R^T = \mathcal{M}^T$:

$$R^T f := Nu^f \qquad \text{на } \Sigma^T\,, \tag{4.8}$$

где N – оператор (Неймана), определяемый второй формулой в (4.7). Оператор реакции корректно определен в силу замечания в конце раздела 4.1.

Действие R^T на управление $f = \begin{pmatrix} f^\nu \\ f_\theta\end{pmatrix}$, в соответствии с определением (4.8) и соглашением о записи (3.1)–(3.2), можно представить в виде [1][10]:

$$R^T f := \begin{pmatrix} \varkappa\,\mathrm{div}\,u^f \\ \mu\,\mathrm{rot}\,u^f\times\nu \end{pmatrix} \quad \text{на } \Sigma^T. \tag{4.9}$$

---

[9] $D^\alpha u := \dfrac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial^{\alpha_1}x_1\partial^{\alpha_2}x_2\partial^{\alpha_3}x_3}$, $D^0 u := u$; $|\alpha| := \sum_{i=1}^3 \alpha_i$ (α_i – целые неотрицательные числа).

[10] Для полной системы Ламе вид оператора реакции в подобной записи установлен в [15].

В [1] установлено, что

$$\mathrm{Ker} R^T = 0, \qquad \mathrm{Ran} R^T = \mathcal{M}^T\,. \tag{4.10}$$

Оператор реакции адекватен информации, которой располагает внешний наблюдатель, проводящий измерения на границе и изучающий систему по ее отклику на воздействие управлений.

4.5. Постановка обратной задачи. Постановка *динамической обратной задачи* такова. По оператору реакции R^{2T}, заданному при фиксированном $T > 0$, и известным функциям на границе $c_\alpha|_\Gamma$, $\frac{\partial c_\alpha}{\partial \nu}\big|_\Gamma$ (ν – внешняя единичная нормаль к Γ; $\alpha = p, s$) требуется определить скорости волн: c_p в области Ω_p^T и c_s в области Ω_s^T.

Тот факт, что в постановке используется R^{2T} (а не R^T), адекватен свойству конечности области влияния данных $[1, 5, 16]$. С физической точки зрения, удвоение времени наблюдения имеет ту же причину, что и в эхолокации. Волна, инициированная в момент $t = 0$ на границе и зондирующая среду, продвигается вглубь Ω с конечной скоростью и за время T проходит приграничный слой "толщины" T. Она порождает отраженные волны, возвращающиеся (с той же скоростью) к границе и несущие информацию о среде. Волны, отраженные от неоднородностей, наиболее удаленных от границы, успеют вернуться к ней не раньше, чем через $2T$ единиц времени. Поэтому, для получения информации о *всем* слое, временной интервал наблюдений на границе, в течение которого регистрируются отраженные волны, должен быть не меньше, чем $[0, 2T]$.

Задача будет решена только в части восстановления быстрой скорости c_p в области Ω_p^T при дополнительном предположении $T < T^{\mathrm{reg}}$, т.е. в регулярной зоне.

4.6. Управляемость. В системе α^T множество состояний (волн)

$$\mathcal{U}[\Sigma^T] := \{u^f(\,\cdot\,, T) \mid f \in \mathcal{M}^T[\Sigma^T]\}$$

называется *достижимым* (с границы Γ за время $t = T$). Согласно (4.6), имеем вложение

$$\mathcal{U}[\Sigma^T] \subset \mathcal{H}[\Omega_p^T], \qquad T > 0\,. \tag{4.11}$$

Свойства достижимых множеств и характер вложений типа (4.11) суть центральные вопросы теории граничного управления. Приведем результат такого рода, установленный в [7] для полного уравнения Ламе[11] с использованием фундаментальной теоремы о единственности продолжения решения через нехарактеристическую поверхность [17].

Пусть X_s^T есть (ортогональный) проектор в $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}[\Omega_s^T]$. Его действие сводится к срезке векторных полей на подобласть Ω_s^T:

$$X_s^T\, y \,=\, \begin{cases} y & \text{в } \ \Omega_s^T, \\ 0 & \text{в } \ \Omega \backslash \Omega_s^T \end{cases} \quad .$$

Справедливо соотношение

$$\overline{X_s^T\, \mathcal{U}[\Sigma^T]} = \,\mathcal{H}[\Omega_s^T]\,, \qquad\qquad T>0 \tag{4.12}$$

(замыкание – в метрике $\mathcal{H}$).

Из (4.12) следует, что любое векторное поле $y \in L_2\left(\Omega_s^T; \mathbb{R}^3\right)$, локализованное в подобласти, захваченной медленной модой, может быть аппроксимировано (с любой точностью) волной $u^f(\,\cdot\,,T)$ при надлежащем выборе управления $f \in \mathcal{M}^T[\Sigma^T]$. В теории управления это свойство трактуется как *приближенная граничная управляемость* системы α^T в области Ω_s^T.

К финальному моменту $t=T$ волны, инициированные управлениями $f \in \mathcal{F}^T[\Sigma^T]$, заполняют область Ω_p^T, содержащую подобласть Ω_s^T. Соотношение (4.12), грубо говоря, означает, что форма волны $u^f(\,\cdot\,,T)$ в Ω_s^T может быть любой. В то же время, это заведомо не так в подобласти $\Omega_p^T \backslash \Omega_s^T$ [3, 7].

4.7. Достижимые множества системы α^T. В системе (4.1)–(4.3) рассмотрим достижимые множества

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^T &:= \mathcal{U}[\Sigma^T] = \left\{u^f(\,\cdot\,,T) \,\middle|\, f \in \mathcal{M}^T[\Sigma^T]\right\}\,, \\ \mathcal{U}^{T-\varepsilon} &:= \mathcal{U}[\Gamma \times [\varepsilon, T]] = \left\{u^f(\,\cdot\,,T) \,\middle|\, f \in \mathcal{M}^T[\Sigma^T],\ f\big|_{\Gamma\times[0,\varepsilon]} = 0\right\}\,, \\ \mathcal{U}[\Xi_p^T[\sigma]] &= \left\{u^f(\,\cdot\,,T) \,\middle|\, f \in \mathcal{M}^T[\Xi_p^T[\sigma]]\right\}\,. \end{aligned}$$

Отметим, что в силу (4.5) поля из $\mathcal{U}^{T-\varepsilon}$, образованные запаздывающими управлениями, локализованы в $\overline{\Omega_p^{T-\varepsilon}}$.

[11] Результат верен также и для системы типа Ламе: см. [1, 3].

Напомним, что $\mathcal{G}[\dots] \subset \mathcal{G}$ и $\mathcal{J}[\dots] \subset \mathcal{J}$ суть подпространства потенциальных и соленоидальных полей, локализованных в соответствующих подобластях.

Следствием установленного в [1] разделения системы α^T на две подсистемы (акустическую и максвелловскую) являются следующие представления достижимого подпространства (см. [3]):

$$\overline{\mathcal{U}^T} = \mathcal{J}[\Omega_s^T] + \mathcal{G}[\Omega_p^T]^{12}; \tag{4.13}$$

$$\overline{\mathcal{U}^T} = \mathcal{H}[\Omega_s^T] \oplus \Big\{ y \in \mathcal{H}[\Omega_p^T] \;\Big|\; \operatorname{supp} y \subset \overline{\Omega_p^T} \backslash \Omega_s^T,\ y|_{\Omega_p^T \backslash \Omega_s^T} = \nabla\varphi : \varphi \in H^1(\Omega_p^T \backslash \Omega_s^T),\ \varphi|_{\Gamma_p^T} = 0 \Big\}. \tag{4.14}$$

Последнее представление проясняет структуру подпространства $\overline{\mathcal{U}^T}$ в подобласти $\Omega_p^T \backslash \Omega_s^T$. Подобное описание для полной системы Ламе неизвестно, что создает проблемы в соответствующей обратной задаче [3, 8].

4.8. Разделение шапочек. Предположим, что, имея дело с системой типа Ламе, мы воспроизводим все шаги "скалярной" процедуры [10], приводящей к локализации волн в шапочке. Основываясь на представлении (4.14), в [3] показано, что в векторном случае (в системе α^T) образуются две шапочки: по одной на концах p- и s-лучей. В каждой из них локализуются соответствующие моды: в p-шапочке – потенциальные поля, а в s-шапочке – соленоидальные. Этот результат был доказан в [3] как *теорема о разделении шапочек* в системе типа Ламе.

Теорема 4.1. *Фиксируем положительное $T < T^{\rm reg}$; пусть $\sigma \subset \Gamma$ есть замкнутое односвязное множество с кусочно-гладкой границей; $\varepsilon > 0$ выбирается малым настолько, чтобы $(\Lambda_{ps}^T[\sigma] \backslash \Omega_s^T[\sigma]) \cap \omega_s^{T,\varepsilon}[\sigma] = \varnothing$[13]. При этих предположениях справедливо соотношение*[14]

$$(\overline{\mathcal{U}}^T \ominus \overline{\mathcal{U}}^{T-\varepsilon}) \cap \overline{\mathcal{U}[\Xi_p^T[\sigma]]} = \mathcal{G}[\omega_p^{T,\varepsilon}[\sigma]] \oplus \mathcal{J}[\omega_s^{T,\varepsilon}[\sigma]]\,. \tag{4.15}$$

[12] Заметим, что слагаемые в правой части равенства имеют ненулевое пересечение.

[13] Подобласть $\Lambda_{ps}^T[\sigma] \subset \Omega$ определена формулой (2.8).

[14] Шапочки $\omega_p^{T,\varepsilon}[\sigma]$, $\omega_s^{T,\varepsilon}[\sigma]$ определены формулой (2.3).

В дальнейшем это сотношение будет играть ключевую роль в решении обратной задачи.

4.9. Полугеодезические координаты. Ниже мы рассматриваем объекты (скорость, эйконал, геодезические, нормали, расходимости, волновые фронты), относящиеся только к быстрой метрике

$$ds_p^2 = \frac{|dx|^2}{c_p^2} \tag{4.16}$$

и, упрощая обозначения, опускаем нижний индекс “p” у всех величин. Таким образом, быстрая скорость будет обозначаться $c := c_p$, расстояние между точками области x, y $\tau(x,y) := \tau_p(x,y)$, *эйконал* $\tau(x) := \tau_p(x,\Gamma)$, эквидистанты границы $\Gamma^r := \Gamma^r_p$ и т.д. Отметим, что в динамике эйконал $\tau(x)$ в точке x есть время пробега быстрых волн от границы Γ к этой точке, а его поверхности уровня Γ^τ соответствуют волновым фронтам.

Фиксируем $T : 0 < T < T^{\mathrm{reg}}$. Каждой точке x регулярной зоны $\Omega^T := \Omega^T_p$ отвечает единственная ближайшая к ней точка границы $\gamma(x)$: $\tau(x,\gamma(x)) = \tau(x)$. Пару $(\gamma(x),\tau(x)) =: i(x)$ называют *полугеодезическими координатами* (п.г.к.) точки x с базой Γ, а множество

$$\Theta^T := i(\Omega^T) \tag{4.17}$$

– *выкройкой* подобласти Ω^T.

Соглашение 4.1. (об обозначениях)

(1) *Через $x(\gamma,\tau)$ обозначается точка регулярной зоны, имеющая п.г.к. γ,τ;*

(2) *если φ есть скалярная или векторозначная функция на Ω^T, то тем же символом φ мы обозначаем функцию $\varphi\circ i^{-1}$, определенную на Θ^T (так что $\varphi(\gamma,\tau) := \varphi(x(\gamma,\tau))$); если ψ задана на Θ^T, то тем же символом ψ обозначается функция $\psi\circ i$ на Ω^T (так что $\psi(x) := \psi(\gamma(x),\tau(x))$);*

(3) *запись $\varphi(x) = \psi(\gamma,\tau)$ подразумевает два равенства: $\varphi(x(\gamma,\tau)) = \psi(\gamma,\tau)$ на Θ^T и $\varphi(x) = \psi(\gamma(x),\tau(x))$ в Ω^T.*

Возьмем $x \in \Omega^T$ и выберем локальные координаты $\tilde\gamma^1$, $\tilde\gamma^2$ в окрестности $\sigma \subset \Gamma$ точки $\gamma(x)$. Функции $\tilde\gamma^\alpha(\cdot) := \tilde\gamma^\alpha(\gamma(\cdot))$, $\alpha = 1,2$; $\tau = \tau(\cdot)$ образуют систему полугеодезических координат на содержащем x множестве (трубке)

$$B^T_\sigma := \{x' \in \Omega^T \,|\, \gamma(x') \in \sigma, \quad 0 \leqslant \tau(x') < T\}. \tag{4.18}$$

В системе полугеодезических координат евклидовы элементы длины и объема имеют известный вид[15]

$$|dx|^2 = g_{\alpha\beta}d\gamma^\alpha d\gamma^\beta + c^2 d\tau^2;\ dx = cJd\gamma^1 d\gamma^2 d\tau = cd\Gamma^\tau d\tau = c\frac{J}{J_0}d\Gamma d\tau\,, \tag{4.19}$$

где $J(\gamma,\tau) := (\det\{g_{\alpha\beta}\})^{\frac{1}{2}}$, $J_0(\gamma,\tau) := J(\gamma,0)$, $d\Gamma^\tau$ и $d\Gamma$ – евклидовы элементы поверхности на Γ^τ и Γ. Элемент длины быстрой метрики в п.г.к. имеет вид

$$ds^2 = h_{\alpha\beta}d\gamma^\alpha d\gamma^\beta + d\tau^2\,; \tag{4.20}$$

сравнивая (4.19) с (4.20) и учитывая (4.16), получаем

$$h_{\alpha\beta} = \frac{1}{c^2}g_{\alpha\beta}\,. \tag{4.21}$$

4.10. Восстановление скорости по тензору h. Здесь подготавливается один из шагов схемы решения обратной задачи. Пусть $T < T^{\rm reg}$. В этом случае, выкройка (4.17) подобласти Ω^T есть $\Theta^T = \Gamma\times[0,T]$. Отображение $i:\Omega^T\to\Theta^T$ индуцирует на выкройке две метрики (два тензора) g и h такие, что i^{-1} есть изометрия (Θ^T,g) на Ω^T с евклидовой метрикой и изометрия (Θ^T,h) на Ω^T с быстрой метрикой[16]. По (4.16) метрики g и h конформно-эквивалентны: $h = c^{-2}g$. Предположим, что нам известен тензор h на Θ^T. Имеет место следующая теорема, доказанная в [16].

Теорема 4.2. *Тензор $h = h(\gamma,\tau)$ на выкройке $\Theta^T = \Gamma\times[0,T)$ и значения c и $\frac{\partial c}{\partial\nu}$ на Γ единственным образом определяют скорость $c(x)$ в Ω^T.*

Отметим, что доказательство этой теоремы в [16] состоит из нескольких этапов. Сначала по тензору $h = h(\gamma,\tau)$ на выкройке $\Theta^T = \Gamma\times[0,T)$ и значениям c и $\frac{\partial c}{\partial\nu}$ определяется скорость $c = c(\gamma,\tau)$ на Θ^T. Решение на этом этапе сводится к частному случаю *задачи Ямабе*[17] и, по-существу, сводится к решению задачи Коши для некоторого эллиптического уравнения в частных производных[18]. Далее по скорости

[15] Здесь и далее в этом пункте суммирование по повторяющимся индексам $\alpha,\beta = 1,2$.

[16] Мы обоначаем пересаженные тензоры теми же буквами g и h.

[17] Найти множитель c такой, чтобы конформная деформация $c^2h = g$ обладала предписанной постоянной (в данном случае нулевой) скалярной кривизной.

[18] Задача нахождения конформно-евклидовой метрики по ее полугеодезической копии имеет и альтернативное решение, основанное на векторных конформных

$c = c(\gamma, \tau)$ на выкройке Θ^T находится конформно-евклидова метрика: $g = c^2 h$. Наконец, устанавливается, что тензор g определяет соответствие $i^{-1}\colon \Theta^T \to \Omega^T$, которое позволяет однозначно восстановить скорость $c(x)$ в Ω^T.

§5. Локализация волн в шапочках и восстановление быстрой скорости

В этом разделе предложена процедура нахождения быстрой скорости в системе типа Ламе по динамическим граничным данным (оператору реакции), использующая локализацию волн на концах p- и s-лучей и теорему 4.1 о *разделении шапочек*[19]. Как и схема из [2], она не использует разделения управлений на два класса (см. Введение) но, в отличие от нее, является идейно проще и наглядней и, возможно, лучше подходит для численной реализации (в той части, в которой определяется тензор h на выкройке). Заметим, что пока таким способом удается восстановить только быструю скорость c_p в регулярной зоне Ω^T_p; вопрос о нахождении этим способом c_s остается открытым.

5.1. Оператор управления системы α^T. С динамической системой типа Ламе α^T (4.1)–(4.3) связан *оператор управления* W^T, реализующий соответствие “вход-состояние” $W^T\colon \mathcal{F}^T \to \mathcal{H}^T$, $\operatorname{Dom} W^T = \mathcal{M}^T$

$$W^T f = u^f(\,\cdot\,, T). \tag{5.1}$$

Он непрерывен, а при временах $T < T^*$ инъективен [7, 8]

$$\operatorname{Ker} W^T = \{0\}. \tag{5.2}$$

Напомним определение достижимого множества системы типа Ламе α^T

$$\mathcal{U}^T := \mathcal{U}[\Sigma^T] = \left\{u^f(\,\cdot\,, T) \,\middle|\, f \in \mathcal{M}^T[\Sigma^T]\right\};$$

сравнивая это определение с (5.1), видим, что $\mathcal{U}^T = \operatorname{Ran} W^T = W^T \mathcal{F}^T$.

полях Киллинга; этот подход в трехмерном случае приводит к задаче Коши для системы *обыкновенных* дифференциальных уравнений, что должно давать преимущество с точки зрения устойчивости (см. [18]).

[19] См. [3].

5.2. Связывающий оператор системы α^T. Оператор $C^T\colon \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$, $\operatorname{Dom} C^T = \mathcal{M}^T$

$$C^T := \left(W^T\right)^* W^T . \tag{5.3}$$

называется *связывающим оператором* системы α^T. Это непрерывный неотрицательный в $\mathcal{F}^T$ оператор, такой, что

$$\left(C^T f, g\right)_{\mathcal{F}^T} = \left(W^T f, W^T g\right)_{\mathcal{H}^T} = \left(u^f(\,\cdot\,, T), u^g(\,\cdot\,, T)\right)_{\mathcal{H}^T} . \tag{5.4}$$

Таким образом, C^T связывает скалярные произведения внешнего и внутреннего пространств динамической системы. Поскольку ядра W^T и C^T совпадают, в силу (5.2), имеем

$$\operatorname{Ker} C^T = \{0\},\ T < T^* , \tag{5.5}$$

т.е. при временах, меньших времени заполнения области Ω волнами, идущими от границы, связывающий оператор инъективен.

Ключевая роль связывающего оператора определяется тем, что он явно выражается через оператор реакции. Введем оператор нечетного продолжения $S^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^{2T}$,

$$(S^T f)(\cdot, t) := \begin{cases} f(\,\cdot\,, t), & 0 \leqslant t < T; \\ -f(\,\cdot\,, 2T - t), & T \leqslant t \leqslant 2T; \end{cases}$$

и оператор интегрирования $J^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \to \mathcal{F}^{2T}$

$$(J^{2T} f)(\,\cdot\,, t) := \int\limits_0^t f(\cdot, s)\, ds , \quad 0 \leqslant t \leqslant 2T.$$

Обозначим $\mathcal{M}^{T,0} := \{f \in \mathcal{M}^T \mid S^T f \in \mathcal{M}^{2T}\}$; отметим включение $S^T \mathcal{M}^{T,0} \subset \operatorname{Dom} R^{2T}$ и равенство

$$\left(\left(S^T\right)^* f\right)(\cdot, t) = f(\,\cdot\,, t) - f(\,\cdot\,, 2T - t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2T.$$

Лемма 5.1. *На полях класса $\mathcal{M}^{T,0}$ справедливо представление*

$$C^T = \frac{1}{2}(S^T)^* J^{2T} R^{2T} S^T. \tag{5.6}$$

Доказательство вполне аналогично представленному в [7]. Из (5.6) видно, что для нахождения C^T достаточно располагать значениями R^{2T} лишь на $S^T \mathcal{M}^{T,0}$.

5.3. Модель системы α^T. Будем говорить, что гильбертово пространство $\widetilde{\mathcal{U}}^T$, оператор

$$\widetilde{W}^T : \mathcal{F}^T \to \widetilde{\mathcal{U}}^T$$

и унитарный оператор $\widetilde{U}^T : \widetilde{\mathcal{U}}^T \to \overline{\mathcal{U}}^T$ составляют *модель*

$$\widetilde{\alpha}^T := \left\{\widetilde{\mathcal{U}}^T, \widetilde{W}^T, \widetilde{U}^T\right\}$$

системы α^T, если

$$W^T = \widetilde{U}^T \widetilde{W}^T . \tag{5.7}$$

Оператор $\widetilde{W}^T$ назовем *модельным оператором управления.* Во внешнем пространстве $\mathcal{F}^T$ рассмотрим семейство подпространств

$$\mathcal{F}^{T,\xi} := \{f \in \mathcal{F}^T \mid f(\cdot, t) = 0,\, 0 \leqslant t < T - \xi\}, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant T, \tag{5.8}$$

образованных *запаздывающими управлениями*

$$(\mathcal{F}^{T,0} = \{0\},\, \mathcal{F}^{T,T} = \mathcal{F}^T).$$

Им отвечает семейство множеств

$$\mathcal{U}^\xi := W^T \mathcal{F}^{T,\xi} = \{u^f(\cdot, \xi) \mid f \in \mathcal{F}^T\}, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant T,$$

образованных состояниями системы α^T, достижимыми к моменту $t = \xi$. Последнее равенство в определении $\mathcal{U}^\xi$ следует из стационарности системы α^T. Стационарность приводит также к тому, что выполнено свойство управляемости (4.12) (с заменой T на ξ).

Множества

$$\widetilde{\mathcal{U}}^\xi := \widetilde{W}^T \mathcal{F}^{T,\xi} \subset \widetilde{\mathcal{U}}^T, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant T$$

играют в модели роль достижимых множеств.

Оператор управления W^T, как и всякий замкнутый оператор, допускает полярное разложение (см., например, [19])

$$W^T = V^T |W^T|, \tag{5.9}$$

в котором $|W^T| \colon \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$ есть неотрицательный квадратный корень из оператора $\left(W^T\right)^* W^T$

$$|W^T| := \left[\left(W^T\right)^* W^T\right]^{\frac{1}{2}},$$

а V^T – изометрия $\operatorname{Ran} |W^T|$ на $\operatorname{Ran} W^T$.

Из определения связывающего оператора (5.3) следует, что

$$|W^T| := \left(C^T\right)^{\frac{1}{2}},$$

а значит, в силу леммы 5.1, *модуль* $|W^T|$ оператора управления определяется оператором реакции R^{2T}.

Ядра операторов $\left(C^T\right)^{\frac{1}{2}}$ и C^T совпадают, поэтому, в силу (5.5), при $T < T^*$

$$\mathrm{Ker}\,\left(C^T\right)^{\frac{1}{2}} = \{0\}\,;$$

из этого следует, что

$$\overline{\mathrm{Ran}\,|W^T|} = \overline{\mathrm{Ran}\,(C^T)^{\frac{1}{2}}} = \mathcal{F}^T \ominus \mathrm{Ker}\,\left(C^T\right)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{F}^T\,. \tag{5.10}$$

Отсюда видно, что изометрию V^T можно расширить до унитарного оператора из $\mathcal{F}^T$ на подпространство $\overline{\mathcal{U}}^T = \overline{\mathrm{Ran}\,W^T}$; за расширением сохраним обозначение V^T.

Из рассмотрений заключаем, что набор $\left\{\mathcal{F}^T, |W^T|, V^T\right\} =: |\alpha^T|$ является моделью системы α^T. Достижимые множества в этой модели суть

$$|\mathcal{U}|^\xi := |W^T|\mathcal{F}^{T,\xi} = \left(C^T\right)^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}^{T,\xi}\,, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant T\,,$$

т.е. определяются данными обратной задачи (оператором реакции R^{2T}). Определим соответствующие достижимые подпространства в этой модели

$$\overline{|\mathcal{U}|}^\xi := \overline{|W^T|\mathcal{F}^{T,\xi}} = \left(V^T\right)^*\overline{\mathcal{U}}^\xi \tag{5.11}$$

(замыкание в $\mathcal{F}^T$). Последнеее равенство следует из (5.10) и унитарности $V^T\colon \mathcal{F}^T \to \overline{U}^T$. Аналогично, для произвольного ε $(0 < \varepsilon < \xi)$

$$\overline{|\mathcal{U}|}^{\xi-\varepsilon} = \left(V^T\right)^*\overline{\mathcal{U}}^{\xi-\varepsilon} \tag{5.12}$$

($\mathcal{U}^{\xi-\varepsilon} := W^T\mathcal{F}^{T,\xi-\varepsilon}$).

Пусть $\sigma \subset \Gamma$ – связное подмножество границы; обозначим

$$\Xi_p^{T,\xi}[\sigma] := \Sigma^T \cap K_p^T[\overline{\sigma} \times [T-\xi, T]]\,^{20}.$$

Определим достижимое множество

$$\mathcal{U}[\Xi_p^{T,\xi}[\sigma]] := W^T\mathcal{F}^T[\Xi_p^{T,\xi}[\sigma]]\,;$$

соответствующее достижимое множество в модели $|\alpha^T|$

$$|\mathcal{U}|[\Xi_p^{T,\xi}[\sigma]] := |W^T|\mathcal{F}^T[\Xi_p^{T,\xi}[\sigma]] \tag{5.13}$$

и подпространство

$$\overline{|\mathcal{U}|[\Xi_p^{T,\xi}[\sigma]]} = \left(V^T\right)^*\overline{\mathcal{U}[\Xi_p^{T,\xi}[\sigma]]}\,.$$

[20]Область влияния $K_p^T[...]$ определена формулой (2.5).

Выберем произвольную точку границы $\gamma' \in \Gamma$ и (малое) $\varepsilon > 0$. Пусть $\sigma_\varepsilon(\gamma') := \{\gamma \in \Gamma \mid d(\gamma', \gamma) \leqslant \varepsilon\}$ (d – евклидово расстояние на Γ). Определим достижимое множество из волн, порожденных управлениями, действующих с $\sigma_\varepsilon(\gamma')$ за время t $(0 \leqslant t \leqslant T)$

$$\mathcal{U}^t[\sigma_\varepsilon(\gamma')] := \left\{u^f(\,\cdot\,, T) \,\middle|\, f \in \mathcal{F}^T\,,\ \operatorname{supp} f \subset \sigma_\varepsilon(\gamma') \times [T-t, T]\right\}; \quad (5.14)$$

соответствующее достижимое множество в модели $|\alpha^T|$ будет

$$|\mathcal{U}|^t[\sigma_\varepsilon(\gamma')] := |W^T|\mathcal{F}^T[\sigma_\varepsilon(\gamma') \times [T-t, T]] \quad (5.15)$$

и подпространство

$$\overline{|\mathcal{U}|}^{\,t}[\sigma_\varepsilon(\gamma')] = \left(V^T\right)^* \overline{\mathcal{U}}^{\,t}[\sigma_\varepsilon(\gamma')]. \quad (5.16)$$

5.4. Модельные шапочки. Выберем произвольную точку $\gamma \in \Gamma$, положительное $T < T^{\mathrm{reg}}$ и (малое) $\varepsilon > 0$.

Обозначим достижимое подпространство системы α^T

$$w_p^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)] := (\overline{\mathcal{U}}^{\xi} \ominus \overline{\mathcal{U}}^{\xi-\varepsilon}) \cap \overline{\mathcal{U}[\Xi_p^{T,\xi}[\sigma_\varepsilon(\gamma)]]},$$

состоящего из волн, инициированных запаздывающими управлениями (время задержки $T - \xi$). Как следствие стационарности системы типа Ламе, получаем аналог теоремы 4.1 о разделении шапочек

$$w_p^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)] \,=\, \mathcal{G}[\omega_p^{\xi,\,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)]] \oplus \mathcal{J}[\omega_s^{\xi,\,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)]]\,,$$

где $G[\omega_p^{\xi,\,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)]],\ J[\omega_s^{\xi,\,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)]]$ – подпространства потенциальных и соленоидальных полей, локализованных в соответствующих шапочках.

Далее, определим достижимое подпространство в модели $|\alpha^T|$

$$\overline{|w|}_p^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)] \,:=\, (\overline{|\mathcal{U}|}^{\xi} \ominus \overline{|\mathcal{U}|}^{\xi-\varepsilon}) \cap \overline{|\mathcal{U}|[\Xi_p^{T,\xi}[\sigma_\varepsilon(\gamma)]]}\,. \quad (5.17)$$

Следствием унитарности оператора V^T и соотношений (5.11)–(5.13) является равенство

$$\overline{|w|}_p^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)] \,=\, \left(V^T\right)^* w_p^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)]\,.$$

Из этого равенства, унитарности V^T и (5.16) следует

$$\overline{|w|}_p^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)] \cap \overline{|\mathcal{U}|}^{t}[\sigma_\varepsilon(\gamma')] \,=\, \left(V^T\right)^* \left(w_p^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)] \cap \overline{\mathcal{U}}^{t}[\sigma_\varepsilon(\gamma')]\right)^{21}.$$

В результате мы приходим к следующему предложению.

[21] Достижимое множество $\mathcal{U}^t[\sigma_\varepsilon(\gamma')]$ определено формулой (5.14).

Предложение 5.1.

$$\overline{|w|}_p^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)] \cap \overline{|\mathcal{U}|}^t[\sigma_\varepsilon(\gamma')] \neq \{0\} \iff w_p^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)] \cap \overline{\mathcal{U}}^t[\sigma_\varepsilon(\gamma')] \neq \{0\}\,.$$

5.5. Время пробега быстрых волн от точки границы до точки области. Фиксируем положительное $T < T^{\rm reg}$; пусть γ, γ' – две различные точки границы Γ, $x_\alpha(\gamma,\xi)$ $(\alpha = p, s)$ – точка области Ω, расположенная на конце соответствующего луча, выходящего из γ по нормали к границе $(0 \leqslant \xi \leqslant T)$; $\Omega^t_\alpha[\gamma']$ – метрическая окрестность[22] точки γ' в соответствующей метрике. Выберем (малое) $\varepsilon > 0$. Обозначим время пробега p- или s- волн от точки γ' до соответствующей шапочки $\omega^{\xi,\varepsilon}_\alpha[\sigma_\varepsilon(\gamma)]$ через $\tau_\alpha(\gamma', \omega^{\xi,\varepsilon}_\alpha[\sigma_\varepsilon(\gamma)])$. Легко видеть, что

$$\tau_\alpha(\gamma', \omega^{\xi,\varepsilon}_\alpha[\sigma_\varepsilon(\gamma)]) = \inf\left\{t > 0 \;\middle|\; \omega^{\xi,\varepsilon}_\alpha[\sigma_\varepsilon(\gamma)] \cap \overline{\Omega}^t_\alpha[\gamma'] \neq \varnothing\right\}\,.$$

Имеет место следующее утверждение: существует такое $\delta > \varepsilon$, достаточно близкое к ε, что для любой точки границы $\gamma' \in \sigma_\delta(\gamma) \setminus \sigma_\varepsilon(\gamma)$ выполнено

$$\tau_p(\gamma', \omega^{\xi,\varepsilon}_p[\sigma_\varepsilon(\gamma)]) < \tau_s(\gamma', \omega^{\xi,\varepsilon}_s[\sigma_\varepsilon(\gamma)])\,.$$

Действительно, полагая $\delta := d(\gamma,\gamma')$[23] и пользуясь общими свойствами p- и s- расстояний и тем, что $c_p > c_s$, можно установить, что при малых $\delta - \varepsilon > 0$

$$\tau_s(\gamma', \omega^{\xi,\varepsilon}_s[\sigma_\varepsilon(\gamma)]) = \tau_p(\gamma', \omega^{\xi,\varepsilon}_p[\sigma_\varepsilon(\gamma)]) + \beta(\gamma,\xi,\varepsilon,\delta)\,,$$

где $\beta(\gamma,\xi,\varepsilon,\delta)$ – некоторая положительная функция, допускающую оценку: $\beta(\gamma,\xi,\varepsilon,\delta) = o(\delta-\varepsilon)$ при $\delta \to \varepsilon$.

Пусть

$$\mathcal{U}^t_s[\sigma_{\varepsilon'}(\gamma')] := X_{\Omega^T_s[\sigma_{\varepsilon'}(\gamma')]}\mathcal{U}^t[\sigma_{\varepsilon'}(\gamma')]\,^{24}.$$

Тогда, при тех же предположениях, указанное утверждение равносильно следующему: при достаточно малых $\varepsilon' > 0$, таких, что $\sigma_{\varepsilon'}(\gamma') \subset \sigma_\delta(\gamma) \setminus \sigma_\varepsilon(\gamma)$, с ростом t достижимое множество $\mathcal{U}^t[\sigma_{\varepsilon'}(\gamma')]$ будет иметь непустое пересечение с шапочкой $\omega^{\xi,\varepsilon}_p[\sigma_\varepsilon(\gamma)]$ *раньше*, чем множество $\mathcal{U}^t_s[\sigma_{\varepsilon'}(\gamma')]$ – с шапочкой $\omega^{\xi,\varepsilon}_s[\sigma_\varepsilon(\gamma)]$.

Обратим внимание, что в динамике фронт p- волны, порожденный источниками, локализованнными в $\sigma_{\varepsilon'}(\gamma')$, зацепит медленную шапочку $\omega^{\xi,\varepsilon}_s[\sigma_\varepsilon(\gamma)]$, разумеется, раньше, чем он зацепит быструю шапочку

[22] Метрические окрестности определены формулой (2.2).

[23] d – евклидово расстояние на Γ.

[24] Проектор $X_{\Omega^T_s}$ определен формулой (4.12).

$\omega_p^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)]$, но наблюдатель, построивший модель $|\alpha^T|$ по оператору реакции R^{2T}, этого "не увидит". Это – следствие того, что волновое поле между быстрым и медленным фронтом волны, является, как видно из (4.14), потенциальным, а оно ортогонально соленоидальному (по теореме 4.1 о разделении шапочек) полю, локализованному в медленной шапочке $\omega_s^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)]$. Указанное обстоятельство и является тем препятствием к восстановлению медленной скорости c_s, преодолеть которое до сих пор не удалось.

Вспомним теперь, что, согласно (2.4), при $\varepsilon \to 0$ шапочка $\omega_\alpha^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)]$ стягивается к соответствующей точке $x_\alpha(\gamma,\xi)$ $(\alpha = p, s)$, а окрестность $\sigma_{\varepsilon'}(\gamma')$ при $\varepsilon' \to 0$ – к точке $\gamma' \in \Gamma$. Пользуясь этими свойствами и непрерывностью расстояния, представим время пробега быстрых волн от точки γ' до точки $x_p(\gamma,\xi)$ в виде

$$\tau_p(\gamma', x_p(\gamma,\xi)) = \lim_{\varepsilon\to 0} \inf \left\{ t > 0 \;\middle|\; \omega_p^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)] \cap \overline{\Omega}_p^t[\sigma_\varepsilon(\gamma')] \neq \varnothing \right\}.$$

Далее, поскольку $\operatorname{supp} \mathcal{U}^t[\sigma_\varepsilon(\gamma')] = \overline{\Omega}_p^t[\sigma_\varepsilon(\gamma')]$, то

$$\omega_p^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)] \cap \overline{\Omega}_p^t[\sigma_\varepsilon(\gamma')] \neq \varnothing \iff w_p^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)] \cap \overline{\mathcal{U}}^t[\sigma_\varepsilon(\gamma')] \neq \{0\}.$$

Сравнивая этот результат с предложением 5.1, придходим к представлению, которое используется ниже при решении обратной задачи.

Лемма 5.2.

$$\tau_p(\gamma', x_p(\gamma,\xi)) = \lim_{\varepsilon\to 0} \inf \left\{ t > 0 \;\middle|\; \overline{|w|}_p^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)] \cap \overline{|\mathcal{U}|}^t[\sigma_\varepsilon(\gamma')] \neq \{0\} \right\}. \quad (5.18)$$

Отметим, что, в силу (5.15) и (5.17), его правая часть определяется модулем $|W|^T$ оператора управления, а значит, оператором реакции R^{2T}.

5.6. Восстановление быстрой скорости. Схема восстановления быстрой скорости в регулярной зоне опирается на теорему 4.1 о разделении шапочек и состоит из следующих шагов.

1. По оператору реакции R^{2T} построим *модель* $|\alpha|^T$ системы типа Ламе. В этой модели по известному оператору $|W|^T$ найдем *изометрические копии* достижимых множеств $w_p^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)]$ и $\mathcal{U}^t[\sigma_\varepsilon(\gamma')]$, т.е. множества $|w|_p^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)]$ и $|\mathcal{U}|^t[\sigma_\varepsilon(\gamma')]$ [25]

[25]Выбрав точку $\gamma \in \Gamma$ и (малое) $\varepsilon > 0$, в качестве γ' можно взять любую точку из $\sigma_\delta(\gamma) \setminus \sigma_\varepsilon(\gamma) \subset \Gamma$ (δ – произвольное число: $\varepsilon < \delta < \delta_1$, где δ_1 зависит, вообще говоря, от γ и ε).

2. Зафиксировав γ' и уменьшая $\varepsilon > 0$, добьемся, чтобы $\sigma_\varepsilon(\gamma) \cap \sigma_\varepsilon(\gamma') = \varnothing$. Варьируя t от ξ до 0 и контролируя выполнение равенства

$$\overline{|w|}_p^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)] \cap \overline{|\mathcal{U}|}^t[\sigma_\varepsilon(\gamma')] = \{0\}\,,$$

найдем точную нижнюю грань тех t, при которых оно нарушается. В динамике, в ситуации исходной динамической системы, она равна времени, при котором фронт волны, порожденной управлениями, действующими из окрестности $\sigma_\varepsilon(\gamma')$, впервые касается быстрой шапочки $\omega_p^{\xi,\varepsilon}[\sigma_\varepsilon(\gamma)]$.

3. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и пользуясь леммой 5.2, найдем расстояние в быстрой метрике от точки границы γ' (из достаточно малой проколотой окрестности точки γ) до точки области $x_p(\gamma, \xi)$.

4. Выбирая три различных точки ${\gamma'}_1, {\gamma'}_2, {\gamma'}_3$ из малой проколотой окрестности точки γ, найдем три величины (функции от γ и ξ):

$$\tau_p({\gamma'}_1, \gamma, \xi)\,, \tau_p({\gamma'}_2, \gamma, \xi)\,, \tau_p({\gamma'}_3, \gamma, \xi)\,,$$

которые позволяют восстановить тензор $\{h_{\alpha\beta}(\gamma, \xi)\}$ быстрой метрики в окрестности точки $(\gamma, \xi) \in \Theta^T$ $(T < T^{\mathrm{reg}})$ (см. [11]).

5. По тензору $\{h_{\alpha\beta}\}$ найдем связь полугеодезических и декартовых координат и определим скорость $c_p(x)$ в регулярной зоне $\Omega_p^T \subset \Omega$ (теорема 4.2).

Динамическая обратная задача по восстановлению быстрой скорости в регулярной зоне решена.

Автор благодарен М. И. Белишеву за полезные консультации.

Список литературы

1. M. I. Belishev, *Dynamical inverse problem for a Lame type system.* — J. Inverse and Ill-Posed Problems **14**, No. 8 (2006), 751–766.
2. В. Г. Фоменко, *Динамическая обратная задача для системы типа Ламе (BC-метод).* — Зап. научн. семин. ПОМИ **426** (2014), 218–259.
3. М. И. Белишев, В. Г. Фоменко, *О достижимых множествах динамической системы типа Ламе.* — Пробл. мат. анализа **70** (2013), 57–70.
4. В. Г. Фоменко, *Динамическая обратная задача для системы типа Ламе (BC-метод).* Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Изд-во *Адмирал*, СПб, 2016, 16 с.
5. М. И. Белишев, А. С. Благовещенский, *Динамические обратные задачи теории волн*, СПб., Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1999.

6. М. И. Белишев, *Граничное управление и томография римановых многообразий (BC-метод).* — Успехи матем. наук **72**, No. 4 (436) (2017), 3–66.
7. M. I. Belishev, I. Lasiecka, *The dynamical Lame system: regularity of solutions, boundary controllability and boundary data continuation.* J. ESAIM: Control, Optimisation and Calculues of Variations, **8** (2002), 143–167.
8. M. I. Belishev, *Recent progress in the boundary control method.* — Inverse Problems **23**, No. 5 (2007), R1–R67.
9. М. И. Белишев, *О реконструкции риманова многообразия по граничным данным: теория и план численного эксперимента.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **380** (2010), 8–30.
10. М. И. Белишев, *Определение расстояний до виртуального источника по динамическим граничным данным.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **393** (2011), 29–45.
11. M. I. Belishev, M. N. Demchenko, *Time-optimal reconstruction of Riemannian manifold via boundary electromagnetic measurements.* — J. Inverse and Ill–Posed Problems **19**, No. 2 (2011), 167–188.
12. Э. Б. Быховский, Н. В. Смирнов, *Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа.* — Тр. Матем. ин-та АН СССР **59** (1960), 5–36.
13. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* Москва, Наука, 1970.
14. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, *О принципе линеаризации и инвариантных многообразиях для задачи магнитогидродинамики.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **38** (1973), 46–93.
15. В. Г. Фоменко, *Оператор реакции системы Ламэ.* — Сложные системы и процессы **1**(17) (2010), 13–18.
16. М. И. Белишев, А. К. Гласман, *Динамическая обратная задача для системы Максвелла: восстановление скорости в регулярной зоне (BC-метод).* — Алгебра и анализ **12**, No. 2 (2000), 131–187.
17. M. Eller, V. Isakov, G. Nakamura, D. Tataru, *Uniqueness and stability in the Cauchy problem for Maxwell's and elasticity systems.* Nonlinear PDE and Applications, Eds. D.Cioranescu, J-L. Lions, College de France Seminar **14**, 329–349. *Studies in Mathematics and its applications*, 31, North-Holland, Elsevier Science, 2002.
18. L. Pestov, G. Uhlmann, H. Zhou, *An inverse kinematic problem with internal sources.* — Inverse Problems **31**, No. 5 055006 (2015).
19. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, ЛГУ, Л, 1980.

Fomenko V.G. Determination of fast velocity in a Lame type dynamical system.

In the paper, for a Lame-type system, the inverse problem on recovering the fast wave velocity from the boundary dynamical data (the response operator) is solved. The velocity is determined in the near-boundary domain, the depth of determination being proportional to the observation time. We use the BC-method, which is an approach to inverse problems based on their connections with boundary control theory.

Мелитопольский государственный
педагогический университет
им. Богдана Хмельницкого,
ул. Гетьманская, д. 20,
г. Мелитополь, 72300, Украина
E-mail: fomenkovova@mail.ru

Поступило 22 октября 2019 г.