

В. Г. Фарафонов, В. И. Устимов, В. Б. Ильин

## СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СФЕРОИДАЛЬНЫМИ ГАРМОНИКАМИ И ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕЛЕЯ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ НЕСОФОКУСНЫХ СФЕРОИДОВ

### ВВЕДЕНИЕ

При анализе рассеяния света малыми несферическими частицами наиболее часто используется эллипсоидальная и, в частности, сфероидальная модель как для однородных [1, 2], так и неоднородных рассеивателей [3]. Такой подход предполагает замену исходных частиц на “эквивалентные” эллипсоиды или сфероиды. Сфероидальные гармоники уравнения Лапласа применяются при решении электростатической задачи с последующим построением приближения Релея для осесимметричных однородных [4], а также многослойных частиц [5]. В настоящее время хорошо известно приближение Релея для софокусных двухслойных [6] и многослойных эллипсоидов [7], а также сфероидов [5], поверхности слоев которых являются координатными в единой сфероидальной системе. Для несофокусных многослойных частиц решение электростатической задачи значительно сложнее. Применение единого сферического базиса показало, что подобный подход имеет принципиальные ограничения. Для двухслойных сфероидов ограничение накладывается только на степень асферичности внешней поверхности  $a_1/b_1 < \sqrt{2} + 1$ , где  $a_1$  и  $b_1$  ее полуоси [8]. В общем случае многослойного сфероида достаточно жесткое условие накладывается на все оболочки, за исключением ядра [9]. При полном учете геометрии задачи для несофокусных сфероидов следует использовать подходящие сфероидальные системы и соответствующие гармоники в окрестности каждой из поверхностей оболочек и ядра [10]. Таким образом, для каждого слоя с несофокусными границами возникает необходимость

---

*Ключевые слова:* сфероидальные гармоники, уравнение Лапласа, несофокусные сфероиды, электростатика, приближение Релея.

Часть исследований, представленных ниже, была поддержана в 2019 г. грантом ГУАП и грантом РФФИ 18-52-52006.

использовать соотношения между решениями уравнения Лапласа, записанного в разных сфероидальных системах (соответствующих внешней и внутренней границе слоя).

В данной работе подробно рассматриваются соотношения между сфероидальными и сферическими гармониками уравнения Лапласа (пп. 1.1 и 1.2). На основе этого выводятся новые соотношения, связывающие сфероидальные гармоники в двух разных сфероидальных системах координат, имеющих общее начало и общую ось вращения. В п. 1.3 обсуждается область применимости полученных формул, в частности, сходимость бесконечных рядов для гармоник 2-го рода (п. 1.3). В п. 1.4 приведены некоторые результаты численных расчетов, которые полностью подтверждают результаты теоретического анализа как для гармоник 1-го рода, так и для гармоник 2-го рода. В частности, рассмотрена связь между сплюснутыми и вытянутыми сфероидальными гармониками 1-го и 2-го родов.

Во второй части статьи показано, как полученные соотношения между сфероидальными гармониками позволяют впервые получить точное и приближенные решения электростатической задачи для многослойных сфероидов с несофокусными границами слоев. Электростатическая задача и ее связь с рассеянием света частицами, малыми по сравнению с длиной волны излучения, рассмотрены в п. 2.1. Точные решения электростатической задачи для двухслойного и многослойного сфероидов даны в пп. 2.2 и 2.3, соответственно. В п. 2.4 на основе точного решения предложены приближенные решения данной задачи. В п. 2.5 приведены результаты численных расчетов, показывающие высокую точность построенных приближений.

## §1. ВЫВОД И АНАЛИЗ СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ СФЕРОИДАЛЬНЫМИ ГАРМОНИКАМИ

**1.1. Сфероидальные и сферические гармоники.** Ниже будут рассматриваться две сфероидальные системы координат  $(\xi_1, \eta_1, \varphi)$  и  $(\xi_2, \eta_2, \varphi)$ , которые имеют общую ось вращения и центр (начало координат), но разные фокусы, что приводит к общему для систем азимутальному углу  $\varphi$ . Связь любой сфероидальной системы координат с

декартовой системой  $(x, y, z)$ , ось  $z$  которой совпадает с осью симметрии сфероидальной системы, можно записать следующим образом [11]:

$$\begin{aligned} x &= \frac{d_i}{2} [(\xi_i^2 - f_i)(1 - \eta_i^2)]^{1/2} \cos \varphi, \\ y &= \frac{d_i}{2} [(\xi_i^2 - f_i)(1 - \eta_i^2)]^{1/2} \sin \varphi, \\ z &= \frac{d_i}{2} \xi_i \eta_i, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $d_i$  – фокусное расстояние. Параметр  $f_i = 1$  для вытянутых сфероидальных координат, при этом  $\xi_i \in [1, \infty)$ ,  $\eta_i \in [-1, 1]$  и  $\varphi \in [0, 2\pi)$  и  $f_i = -1$  для сплюснутых сфероидальных координат, при этом  $\xi_i \in [0, \infty)$ ,  $\eta_i \in [-1, 1]$  и  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Координатными поверхностями в сфероидальной системе являются вытянутые или сплюснутые софокусные сфероиды и двуполостные или однополостные гиперboloиды соответственно. Отметим, что вытянутые сфероидальные координаты возникают при вращении вокруг большой оси софокусных эллипсов и гипербол, а сплюснутые – при вращении вокруг малой оси этих фигур.

Во всех координатных системах уравнение координатных поверхностей (сфероидов) имеет вид

$$\xi_j = \xi_j^0. \quad (2)$$

Обозначим большие и меньшие полуоси сфероидов в первой системе через  $a_1$  и  $b_1$ , а во второй –  $a_2$  и  $b_2$ . Для двух софокусных сфероидальных систем имеет место равенство

$$a_1^2 - b_1^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a_2^2 - b_2^2, \quad (3)$$

при этом все координатные сфероиды являются либо вытянутыми, либо сплюснутыми. В общем случае несофокусных систем одна из них может быть вытянутой, а другая – сплюснутой.

Введем общую сферическую систему координат  $(r, \theta, \varphi)$ , которая связана с декартовой системой  $(x, y, z)$  стандартным образом:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases} \quad (4)$$

Уравнение Лапласа

$$\Delta \Phi = 0 \quad (5)$$

может быть решено разделением переменных как в сферической системе (4), так и в вытянутой или сплюснутой сфероидальных системах (1). Соответствующие решения (гармоники) можно записать следующим образом [12]:

в сферической системе

$$\begin{aligned} \Upsilon_{ml}^{(1)}(\vec{r}) &= r^l \\ \Upsilon_{ml}^{(2)}(\vec{r}) &= \frac{1}{2l+1} r^{-(l+1)} v_{ml}(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

$$v_{ml}(\theta, \varphi) = \begin{aligned} &v_{mle}(\theta, \varphi) = \bar{P}_l^m(\cos \theta) \sqrt{\frac{2 - \delta_m^0}{2\pi}} \cos m\varphi, \\ &v_{mlo}(\theta, \varphi) = \bar{P}_l^m(\cos \theta) \sqrt{\frac{2 - \delta_m^0}{2\pi}} \sin m\varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

в вытянутой сфероидальной системе

$$\begin{aligned} \Psi_{ml}^{(1)}(\vec{r}) &= \Psi_{ml}^{(1)}(\xi, \eta, \varphi) = \left(\frac{d}{2}\right)^l P_l^m(\xi) \\ \Psi_{ml}^{(2)}(\vec{r}) &= \Psi_{ml}^{(2)}(\xi, \eta, \varphi) = \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left(\frac{d}{2}\right)^{-(l+1)} Q_l^m(\xi) \end{aligned} \quad \psi_{ml}(\eta, \varphi),$$

$$\begin{aligned} \psi_{ml}(\eta, \varphi) &= \begin{aligned} &\psi_{mle}(\eta, \varphi) = \bar{P}_l^m(\eta) \sqrt{\frac{2 - \delta_m^0}{2\pi}} \cos m\varphi, \\ &\psi_{mlo}(\eta, \varphi) = \bar{P}_l^m(\eta) \sqrt{\frac{2 - \delta_m^0}{2\pi}} \sin m\varphi, \end{aligned} \end{aligned} \quad (7)$$

в сплюснутой сфероидальной системе

$$\begin{aligned} \Psi_{ml}^{(1)}(\vec{r}) &= \Psi_{ml}^{(1)}(\xi, \eta, \varphi) = \left(\frac{-id}{2}\right)^l P_l^m(i\xi) \\ \Psi_{ml}^{(2)}(\vec{r}) &= \Psi_{ml}^{(2)}(\xi, \eta, \varphi) = \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left(\frac{-id}{2}\right)^{-(l+1)} Q_l^m(i\xi) \end{aligned} \quad \psi_{ml}(\eta, \varphi),$$

$$\begin{aligned} \psi_{ml}(\eta, \varphi) &= \begin{aligned} &\psi_{mle}(\eta, \varphi) = \bar{P}_l^m(\eta) \sqrt{\frac{2 - \delta_m^0}{2\pi}} \cos m\varphi, \\ &\psi_{mlo}(\eta, \varphi) = \bar{P}_l^m(\eta) \sqrt{\frac{2 - \delta_m^0}{2\pi}} \sin m\varphi, \end{aligned} \end{aligned} \quad (8)$$

где  $n \geq m \geq 0$  – неотрицательные целые числа, символ Кронеккера  $\delta_m^0 = 1$  или  $0$ , когда  $m = 0$  и  $m \neq 0$  соответственно,  $P_l^m(\eta)$  – присоединенные функции Лежандра 1-го рода, и соответствующие нормированные функции равны

$$\bar{P}_l^m(\eta) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}} P_l^m(\eta) = N_{ml}^{-1} P_l^m(\eta). \quad (9)$$

Угловые функции  $\psi_{ml}$  образуют полную ортонормированную систему в пространстве  $L_2(\Omega)$  с квадратичной метрикой:

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \psi_{mn}(\eta, \varphi) \psi_{\mu\nu}(\eta, \varphi) d\eta d\varphi = \delta_m^\mu \delta_n^\nu, \quad (10)$$

т.е. на поверхности любого координатного сфероида  $\Omega$ . Сферические угловые функции (6) также образуют полную ортонормированную систему в пространстве  $L_2(\Omega)$  с квадратичной метрикой (10) на любой координатной сфере при замене  $\eta \rightarrow \cos \theta$ .

Для функций, зависящих от угловой координаты  $\eta$ , вторые линейно независимые решения  $Q_l^m(\eta)$  не рассматриваются, так как они имеют особенности при  $\eta = \pm 1$  и не подходят по физическим соображениям. Для функций, зависящих от радиальных координат, используется следующее определение, отличающееся постоянным множителем от указанного в [12]:

$$P_l^m(\xi) = (\xi^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_l(\xi)}{d\xi^m}, \quad Q_l^m(\xi) = (\xi^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_l(\xi)}{d\xi^m}. \quad (11)$$

Заметим, что функции 2-го рода стремятся к нулю на бесконечности и имеют особенность на фокусном отрезке для вытянутых или фокусном круге для сплюснутых функций.

Ниже приводятся несколько первых сферических и сфероидальных гармоник:

$$\begin{aligned} \Upsilon_{00}^{(1)} &= \sqrt{1/4\pi}, \quad \Upsilon_{01}^{(1)} = \sqrt{3/4\pi} r \cos \theta = \sqrt{3/4\pi} z, \\ \Upsilon_{02}^{(1)} &= \sqrt{5/16\pi} r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) = \sqrt{5/16\pi} (3z^2 - r^2), \\ \Upsilon_{03}^{(1)} &= \sqrt{7/16\pi} r^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) = \sqrt{7/16\pi} (5z^3 - 3zr^2), \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{11}^{(1)} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} r \sin \theta \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \rho \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}, \\ \Upsilon_{12}^{(1)} &= 3\sqrt{\frac{15}{4\pi}} r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} = 3\sqrt{\frac{15}{4\pi}} \rho z \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}, \\ \Upsilon_{13}^{(1)} &= \sqrt{\frac{21}{32\pi}} r^3 \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} = \sqrt{\frac{21}{32\pi}} \rho (5z^2 - r^2) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}, \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{00}^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi} r}, \quad \Upsilon_{01}^{(2)} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{12\pi} r^2} = \frac{z}{\sqrt{12\pi} r^3}, \\ \Upsilon_{02}^{(2)} &= \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{\sqrt{80\pi} r^3} = \frac{3z^2 - r^2}{\sqrt{80\pi} r^5}, \\ \Upsilon_{03}^{(2)} &= \frac{5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta}{\sqrt{112\pi} r^4} = \frac{z(5z^2 - 3r^2)}{\sqrt{112\pi} r^7}, \dots, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{11}^{(2)} &= \sqrt{\frac{1}{12\pi}} \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} = \sqrt{\frac{1}{12\pi}} \frac{\rho}{r^3} \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}, \\
\Upsilon_{12}^{(2)} &= \sqrt{\frac{3}{20\pi}} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^3} \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} = \sqrt{\frac{3}{20\pi}} \frac{\rho z}{r^5} \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}, \\
\Upsilon_{13}^{(2)} &= \sqrt{\frac{3}{224\pi}} \frac{\sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1)}{r^4} \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} = \sqrt{\frac{3}{224\pi}} \frac{\rho(5z^2 - r^2)}{r^7} \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}, \dots
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{00}^{(1)} &= \sqrt{1/4\pi}, \quad \Psi_{01}^{(1)} = \sqrt{3/4\pi} (d/2)\xi\eta = \sqrt{3/4\pi} z, \\
\Psi_{02}^{(1)} &= \sqrt{5/64\pi} (d/2)^2 (3\xi^2 - 1) (3\eta^2 - 1) \\
&= \sqrt{5/64\pi} (9z^2 - 3r^2 - 2(d/2)^2),
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{03}^{(1)} &= \sqrt{7/64\pi} (d/2)^3 (5\xi^3 - 3\xi) (5\eta^2 - 3\eta) \\
&= \sqrt{7/64\pi} (25z^3 - 15zr^2 - 6z(d/2)^2), \dots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{11}^{(1)} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} (d/2) \sqrt{\xi^2 - 1} \sqrt{1 - \eta^2} \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \rho \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}, \\
\Psi_{12}^{(1)} &= 3\sqrt{\frac{15}{4\pi}} (d/2)^2 \xi \sqrt{\xi^2 - 1} \eta \sqrt{1 - \eta^2} \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} = 3\sqrt{\frac{15}{4\pi}} z \rho \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi},
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{13}^{(1)} &= \sqrt{\frac{189}{128\pi}} (d/2)^3 \sqrt{\xi^2 - 1} (5\xi^2 - 1) \sqrt{1 - \eta^2} (5\eta^2 - 1) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \\
&= \sqrt{\frac{189}{128\pi}} \rho (25z^2 - 5r^2 - 4(d/2)^2) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}, \dots, \\
\Psi_{00}^{(2)} &= \sqrt{\frac{1}{16\pi}} \left(\frac{d}{2}\right)^{-1} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1}, \quad \Psi_{01}^{(2)} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(\frac{d}{2}\right)^{-2} \left(\frac{\xi\eta}{2} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} - \eta\right), \\
\Psi_{02}^{(2)} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(\frac{d}{2}\right)^{-3} \left(\frac{(3\xi^2 - 1)(3\eta^2 - 1)}{4} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} - \frac{3}{2}\xi(3\eta^2 - 1)\right), \\
\Psi_{03}^{(2)} &= \sqrt{\frac{7}{16\pi}} \left(\frac{d}{2}\right)^{-4} \left(\frac{\xi\eta(5\xi^2 - 3)(5\eta^2 - 3)}{4} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} - \frac{(15\xi^2 - 4)(5\eta^3 - 3\eta)}{6}\right), \\
&\dots, \\
\Psi_{11}^{(2)} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(\frac{d}{2}\right)^{-2} \frac{\sqrt{\xi^2 - 1} \sqrt{1 - \eta^2}}{2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} - \frac{\xi}{\xi^2 - 1}\right] \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi},
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_{12}^{(2)} &= \sqrt{\frac{5}{12\pi}} \left(\frac{d}{2}\right)^{-3} \frac{\sqrt{\xi^2-1}\sqrt{1-\eta^2}}{2} \\
 &\quad \times \begin{cases} \frac{3}{2}\xi\eta \ln \frac{\xi+1}{\xi-1} - \frac{3\xi^2-2}{\xi^2-1}\eta \\ \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi, \end{cases} \quad (19) \\
 \Psi_{13}^{(2)} &= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{7}{24\pi}} \left(\frac{d}{2}\right)^{-4} \frac{\sqrt{\xi^2-1}\sqrt{1-\eta^2}}{2} \\
 &\quad \times \left[ \frac{3}{2}(5\xi^2-1) \ln \frac{\xi+1}{\xi-1} - \frac{(15\xi^3-13\xi)}{\xi^2-1} \right] (5\eta^2-1) \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi, \end{cases} \dots
 \end{aligned}$$

В случае сплюснутых сфероидальных координат для получения необходимых соотношений в приведенных выше формулах нужно сделать замену  $\xi \rightarrow i\xi$ ,  $d \rightarrow -id$ . Заметим, что для сплюснутых функций соотношения, аналогичные формулам (18)–(19), можно получить после стандартной замены с учетом соотношения  $\frac{1}{2} \ln \frac{i\xi-1}{i\xi+1} = -i \arctan \frac{1}{\xi}$ .

Разложение функции Грина для уравнения Лапласа в вытянутой системе координат с учетом соотношений (11) имеет вид [12]

$$\begin{aligned}
 G(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{2\pi d} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} (2 - \delta_0^m) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\xi_<) Q_l^m(\xi_>) \\
 &\quad \times \bar{P}_l^m(\eta) \bar{P}_l^m(\eta') \cos m(\varphi - \varphi') = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \Psi_{ml}^{(1)}(\vec{r}_<) \Psi_{ml}^{(3)}(\vec{r}_>), \quad (20)
 \end{aligned}$$

где  $\xi_< = \min(\xi, \xi')$ ,  $\xi_> = \max(\xi, \xi')$ .

Аналогично можно записать разложение функции Грина в сферической системе [12]

$$\begin{aligned}
 G(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \frac{1}{2l+1} (r_<)^l (r_>)^{-(l+1)} \\
 &\quad \times \bar{P}_l^m(\cos \theta) \bar{P}_l^m(\cos \theta') \cos m(\varphi - \varphi') = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \Upsilon_{ml}^{(1)}(\vec{r}_<) \Upsilon_{ml}^{(3)}(\vec{r}_>), \quad (21)
 \end{aligned}$$

где  $r_< = \min(r, r')$ ,  $r_> = \max(r, r')$ .

**1.2. Соотношения между сферическими и сфероидальными гармониками.** Введем векторы для сферических  $\vec{\Upsilon}_m^{(i)} = \{\Upsilon_{ml}^{(i)}(\vec{r})\}$  и сфероидальных  $\vec{\Psi}_m^{(i)} = \{\Psi_{ml}^{(i)}(\vec{r})\}$  функций (6)–(8). Соотношения

между вытянутыми (сплюснутыми) сфероидальными и сферическими функциями 1-го и 2-го рода, были приведены в статьях [13, 14]:

$$P_n^m(\xi)P_n^m(\eta) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \times \sum_{l=m}^n {}'(-1)^{\frac{n-l}{2}} \frac{(n+l-1)!!}{(n-l)!!(l+m)!} \left(\frac{r}{d/2}\right)^l P_l^m(\cos\theta), \quad (22)$$

$$\left(\frac{r}{d/2}\right)^n P_n^m(\cos\theta) = (n+m)! \sum_{l=m}^n {}' \frac{2l+1}{(n-l)!!(n+l+1)!!} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\xi)P_l^m(\eta), \quad (23)$$

и

$$Q_n^m(\xi)P_n^m(\eta) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \sum_{l=n}^{\infty} {}' \frac{(l-m)!}{(l-n)!!(n+l+1)!!} \left(\frac{d/2}{r}\right)^{l+1} P_l^m(\cos\theta), \quad r > d/2, \quad (24)$$

$$\left(\frac{d/2}{r}\right)^{n+1} P_n^m(\cos\theta) = \frac{1}{(n-m)!} \sum_{l=m}^{\infty} {}' (-1)^{\frac{l-n}{2}} \frac{(2l+1)(n+l-1)!!}{(l-n)!!} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} Q_l^m(\xi)P_l^m(\eta), \quad (25)$$

где штрих означает суммирование только по четным или нечетным индексам. Ниже взаимосвязи между сферическими и сфероидальными гармониками (12)–(19) рассматриваются более подробно, что позволит найти соотношения между сфероидальными гармониками в разных системах координат.

Для введенных нами сферических и сфероидальных гармоник 1-го рода соответствующие уравнения можно записать в матричном виде

$$\vec{\Psi}_m^{(1)} = \nabla_m^{(1)}(d) \vec{\Upsilon}_m^{(1)}, \quad (26)$$

где элементы определяются из соотношений (22)

$$\nabla_{nl, m}^{(1)}(d) = \frac{2n+1}{2} N_{mn}(-1)^{\frac{n-l}{2}} \frac{(n+l-1)!!}{(n-l)!!(l+m)!} \left(\frac{d}{2}\right)^{(n-l)} N_{ml},$$

$$n \geq l. \quad (27)$$

Поскольку матрица перехода  $\nabla^{(1)}(d)$  связывает полиномы степени не выше  $n$ -й (см. формулы (12)–(13) и (16)–(17)), то она является нижнетреугольной

$$\Psi_{mn}^{(1)}(d) = \sum_{l=m}^n \nabla_{nl, m}^{(1)}(d) \tilde{\Upsilon}_{ml}^{(1)} \quad (28)$$

и  $\nabla_{nl, m}^{(1)}(d) = 0, n < l$ . Штрих над знаком суммы означает, что суммирование ведется по индексам  $l$ , четность которых совпадает с четностью индекса  $n$ .

Обратный переход от сферических гармоник к сфероидальным описывается естественно обратной матрицей:

$$\tilde{\Upsilon}_m^{(1)} = \left(\nabla_m^{(1)}(d)\right)^{-1} \tilde{\Psi}_m^{(1)}, \quad (29)$$

элементы которой определяются из соотношений (23)

$$\left(\nabla_m^{(1)}(d)\right)_{nl}^{-1} = (n+m)! N_{mn}^{-1} \frac{2}{(n-l)!!(n+l+1)!!} \left(\frac{d}{2}\right)^{(n-l)} N_{ml}^{-1},$$

$$n \geq l. \quad (30)$$

Данная матрица также является нижнетреугольной, т.е.  $\left(\nabla_m^{(1)}(d)\right)_{nl}^{-1} = 0$  при  $n < l$ .

Равенства (26)–(27) и (29)–(30) позволяют найти усеченные матрицы перехода в явном виде

$$\nabla_0^{(1)}(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{8}d^2 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{21}}{8}d^2 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix},$$

$$\left(\nabla_0^{(1)}(d)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{12}d^2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{21}}{8}d^2 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$\nabla_1^{(1)}(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{14}}{8}d^2 & 0 & \frac{15}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{15\sqrt{6}}{8}d^2 & 0 & \frac{35}{2} \end{pmatrix}, \quad (32)$$

$$\left(\nabla_1^{(1)}(d)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{14}}{20}d^2 & 0 & \frac{2}{15} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{28}d^2 & 0 & \frac{2}{35} \end{pmatrix}$$

для индексов  $m = 0$  и  $m = 1$  соответственно. С учетом соотношений (12)–(13) и (16)–(17) можно убедиться в правильности найденных переходных матриц в этих частных случаях.

Для сферических и сфероидальных гармоник 2-го рода имеют место соотношения, аналогичные формулам (26)–(30). В этом случае матрицы перехода являются верхнетреугольными, так как они связывают функции, убывающие на бесконечности обратно пропорционально модулю радиус-вектора  $r^{-(n+1)}$  в соответствующих степенях (см. соотношения (14)–(15) и (18)–(19)). Для сфероидальных гармоник 2-го рода при  $\xi \rightarrow \infty$  справедливы оценки

$$\Psi_{mn}^{(2)}(d) = \frac{C}{r^{-(n+1)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\xi^{-1}}\right)\right). \quad (33)$$

Например, из формул (18) нетрудно получить следующие соотношения:

$$\Psi_{00}^{(2)} = \Upsilon_{00}^{(2)} (1 + O(1/\xi^{-1})), \quad \Psi_{01}^{(2)} = \Upsilon_{01}^{(2)} (1 + O(1/\xi^{-1})), \quad (34)$$

$$\Psi_{02}^{(2)} = \frac{2}{3} \Upsilon_{02}^{(2)} (1 + O(1/\xi^{-1})).$$

Таким образом, для сферических и сфероидальных гармоник 2-го рода имеем

$$\vec{\Psi}_m^{(2)} = \nabla_m^{(2)}(d) \vec{\Upsilon}_m^{(2)}, \quad (35)$$

или

$$\Psi_{mn}^{(2)}(d) = \sum_{l=n}^{\infty} \nabla_{nl, m}^{(2)}(d) \Upsilon_{ml}^{(2)}, \quad (36)$$

где из соотношений (24) получим

$$\nabla_{nl, m}^{(2)}(d) = N_{mn}^{-1} \left(\frac{d}{2}\right)^{(l-n)} \frac{(l-m)!(2l+1)}{(l-n)!!(l+n+1)!!} N_{ml}, \quad n \leq l. \quad (37)$$

Обратный переход от сферических гармоник к сфероидальным описывается обратной матрицей:

$$\vec{\Upsilon}_m^{(2)} = \left( \nabla_m^{(2)}(d) \right)^{-1} \vec{\Psi}_m^{(2)} \quad (38)$$

или

$$\Upsilon_{mn}^{(2)}(d) = \sum_{l=n}^{\infty} \left( \nabla_m^{(2)}(d) \right)_{nl}^{-1} \Psi_{ml}^{(2)}, \quad (39)$$

где матричные элементы верхнетреугольной матрицы находятся из соотношения (25)

$$\begin{aligned} \left( \nabla_m^{(2)}(d) \right)_{nl}^{-1} (d) &= \frac{(-1)^{\frac{l-n}{2}}}{(2n+1)(n-m)!} N_{mn}^{-1} \left( \frac{d}{2} \right)^{(l-n)} \\ &\times \frac{(2l+1)(n+l-1)!!}{(l-n)!!} N_{ml}, \quad n \leq l. \end{aligned} \quad (40)$$

Элементы переходных матриц для функций 2-го рода ниже главной диагонали равны нулю. Отметим, что формулы (36)–(37) согласуются с оценками (34).

Следует отметить, что ряды в соотношениях (36) и (39) для функций 2-го рода являются бесконечными в отличие от конечных рядов для функций 1-го рода. В силу этого возникает вопрос о сходимости этих рядов. Для оценки их общих членов потребуются асимптотики угловых и радиальных функций при больших значениях индекса [15]:

$$\bar{P}_n^m(\eta) = \bar{P}_n^m(\cos \vartheta) = \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \vartheta}} \cos \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \vartheta - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \left[ 1 + O\left( \frac{1}{n} \right) \right], \quad (41)$$

$$P_n^m(\xi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n-m+1)}} (\xi^2 - f)^{-1/4} (\xi + \sqrt{\xi^2 - f})^{n+1/2} \left[ 1 + O\left( \frac{1}{n} \right) \right], \quad (42)$$

$$Q_n^m(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+3/2)}} (\xi^2 - f)^{-1/4} (\xi + \sqrt{\xi^2 - f})^{-(n+1/2)} \left[ 1 + O\left( \frac{1}{n} \right) \right], \quad (43)$$

где  $\cos \vartheta = \eta$  и  $\vartheta \in [0, \pi]$ . Принимая во внимание асимптотики угловых функций (41), имеем

$$\left| \frac{\nabla_{nl+2,m}^{(2)}(d) \vec{\Upsilon}_{ml+2}^{(2)}}{\nabla_{nl,m}^{(2)}(d) \vec{\Upsilon}_{ml}^{(2)}} \right| = \frac{d}{2r} \left( 1 + O\left( \frac{1}{l} \right) \right) < 1, \quad (44)$$

т.е. на основании признака сходимости Даламбера можно утверждать, что ряд (36) сходится вне сферы радиуса  $r > \frac{d}{2}$  как поточечно, так и в пространстве  $L_2(\Omega)$  (см. (10)). Этот результат согласуется с наличием особенности сфероидальных гармоник в фокусах, находящихся на расстоянии  $\frac{d}{2}$  от начала координат.

Аналогично с учетом асимптотик (41)–(43) получим

$$\left| \frac{\left(\nabla_m^{(2)}(d)\right)_{nl+2}^{-1} \Psi_{ml+2}^{(2)}}{\left(\nabla_m^{(2)}(d)\right)_{nl}^{-1} \Psi_{ml}^{(2)}} \right| = \frac{1}{(\xi + \sqrt{\xi^2 - f})^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{l}\right)\right) < 1, \quad (45)$$

т.е. ряд (39) сходится всюду вне отрезка, соединяющего фокусы вытянутой сфероидальной системы координат ( $\xi = 1, f = 1$ ), или вне фокусного диска в сплюснутой системе координат ( $\xi = 0, f = -1$ ).

Для гармоник 2-го рода так же, как и для гармоник 1-го рода, можно найти усеченные матрицы перехода

$$\begin{aligned} \nabla_0^{(2)}(d) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{12}d^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{21}}{8}d^2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \\ \left(\nabla_0^{(2)}(d)\right)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{8}d^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{21}}{8}d^2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \nabla_1^{(2)}(d) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{14}}{20}d^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{28}d^2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{35} \end{pmatrix}, \\ \left(\nabla_1^{(2)}(d)\right)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3\sqrt{14}}{8}d^2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{15\sqrt{6}}{8}d^2 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{35}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (47)$$

Данные матрицы вместе с формулами для сферических и сфероидальных гармоник (14)–(15) и (18)–(19) позволяют численно проверить соотношения (37) и (40) для переходных матриц.

В формуле (20) для функции Грина в вытянутой сфероидальной системе координат вместо сфероидальных гармоник подставим их представления (26) и (35) через сферические гармоники и сравним результат с функцией Грина в сферической системе (21). В результате получим

$$\begin{aligned} \sum_{m,s} \sum_{l,m} \left\{ \sum_{m,n} \nabla_{nl,m}^{(1)}(d) \nabla_{ns,m}^{(2)}(d) \right\} \Upsilon_{ml}^{(1)}(\vec{r}_{<}) \Upsilon_{ms}^{(3)}(\vec{r}_{>}) \\ = \sum_{m,s} \Upsilon_{ms}^{(1)}(\vec{r}_{<}) \Upsilon_{ms}^{(3)}(\vec{r}_{>}). \end{aligned} \quad (48)$$

В силу ортогональности сферических гармоник (10) из данного равенства следует соотношение для матриц перехода функций 1-го и 2-го рода

$$\nabla_m^{(1)}(d) \nabla_m^{(2)T}(d) = I, \quad (49)$$

где  $I$  – единичная матрица. Таким образом, для данных матриц справедливы следующие соотношения:

$$\left( \nabla_m^{(1)}(d) \right)^{(-1)} = \nabla_m^{(2)T}(d), \quad \left( \nabla_m^{(2)}(d) \right)^{(-1)} = \nabla_m^{(1)T}(d), \quad (50)$$

где  $T$  означает транспонирование матрицы. Данные формулы можно проверить аналитически, сравнивая соответствующие матричные элементы (см. соотношения (31)–(32) и (46)–(47)), а также их подтверждают непосредственные численные расчеты.

**1.3. Соотношения между сфероидальными гармониками.** Наличие связей между сферическими и сфероидальными гармониками позволяет найти соотношения, связывающие сфероидальные гармоники как первого, так и второго рода в двух разных сфероидальных системах координат. А именно, из соотношений (26) и (29) для сфероидальных гармоник первого рода имеем

$$\begin{aligned} \vec{\Psi}_m^{(1)}(d_1) = \nabla_m^{(1)}(d_1) \vec{\Upsilon}_m^{(1)} = \nabla_m^{(1)}(d_1) \left( \nabla_m^{(1)}(d_2) \right)^{-1} \vec{\Psi}_m^{(1)}(d_2) \\ = \Delta_m^{(1)}(d_1, d_2) \vec{\Psi}_m^{(1)}(d_2), \end{aligned} \quad (51)$$

т.е.

$$\Delta_m^{(1)}(d_1, d_2) = \nabla_m^{(1)}(d_1) \left( \nabla_m^{(1)}(d_2) \right)^{-1}.$$

Для элементов матрицы  $\Delta_m^{(1)}(d_1, d_2)$  из равенств (27) и (30) нетрудно найти соответствующее выражение

$$\delta_{ns, m}^{(1)}(d_1, d_2) = \sum_{l=s}^n \nabla_{nl, m}^{(1)}(d_1) \left( \nabla_m^{(1)}(d_2) \right)_{ls}^{-1} = N_{mn} \left( \frac{d_1}{2} \right)^n \frac{2n+1}{2} \\ \sum_{l=s}^n \frac{2 (-1)^{\frac{n-l}{2}} (n+l-1)!!}{(n-l)!!(l-s)!!(l+s+1)!!} \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^l \left( \frac{d_2}{2} \right)^{-s} N_{ms}^{-1}, \quad n \geq s, \quad (52)$$

при этом матрица является нижнетреугольной, т.е.  $\delta_{ns, m}^{(1)}(d_1, d_2) = 0$  при  $n < s$ .

Аналогично из соотношений (37) и (40) для сфероидальных гармоник 2-го рода получим

$$\vec{\Psi}_m^{(2)}(d_1) = \nabla_m^{(2)}(d_1) \vec{\Upsilon}_m^{(2)} = \nabla_m^{(2)}(d_1) \left( \nabla_m^{(2)}(d_2) \right)^{-1} \vec{\Psi}_m^{(2)}(d_2) \\ = \Delta_m^{(2)}(d_1, d_2) \vec{\Psi}_m^{(2)}(d_2), \quad (53)$$

где

$$\delta_{ns, m}^{(2)}(d_1, d_2) = \sum_{l=n}^s \nabla_{nl, m}^{(2)}(d_1) \left( \nabla_m^{(2)}(d_2) \right)_{ls}^{-1} = N_{mn}^{-1} \left( \frac{d_1}{2} \right)^{-n} \\ \sum_{l=n}^s \frac{(-1)^{\frac{s-l}{2}} (s+l-1)!!(2s+1)}{(l-n)!!(s-l)!!(l+n+1)!!} \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^l \left( \frac{d_2}{2} \right)^s N_{ms}, \quad n \leq s, \quad (54)$$

при этом матрица является верхнетреугольной, т.е.  $\delta_{ns, m}^{(2)}(d_1, d_2) = 0$  при  $n > s$ . Отметим, что коэффициенты (52) и (54) представляются в виде конечных сумм.

Равенства (52) и (54) позволяют найти усеченные матрицы перехода в явном виде

$$\Delta_0^{(1)}(d_1, d_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}(d_2^2-d_1^2)}{8} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{21}(d_2^2-d_1^2)}{8} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \Delta_0^{(2)}(d_1, d_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{5}(d_1^2-d_2^2)}{8} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{21}(d_1^2-d_2^2)}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (55)$$

и

$$\Delta_1^{(1)}(d_1, d_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{14}(d_2^2-d_1^2)}{8} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5\sqrt{6}(d_2^2-d_1^2)}{8} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (56)$$

$$\Delta_1^{(2)}(d_1, d_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3\sqrt{14}(d_1^2-d_2^2)}{8} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5\sqrt{6}(d_1^2-d_2^2)}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для индексов  $m = 0$  и  $m = 1$  соответственно. Соотношения (16)–(19), (51), (53) позволяют убедиться в правильности найденных переходных матриц в этих частных случаях.

В случае  $d_1 = d_2$  обе сфероидальные системы сливаются в одну, а приведенные выше коэффициенты переходят в символы Кронеккера

$$\delta_{ns, m}^{(i)}(d_1, d_1) = \delta_s^n, \quad (57)$$

т.е.  $\Delta_m^{(1)}(d, d) = I$ .

Если совершить переход от первой системы ко второй, а затем снова к первой системе, то получим соотношение

$$\Delta_m^{(i)}(d_1, d_2) \Delta_m^{(i)}(d_2, d_1) = I, \quad (58)$$

где  $I$  – единичная матрица. Из этого равенства следует, что для получения обратной матрицы достаточно поменять местами параметры, от которых она зависит

$$\left(\Delta_m^{(i)}(d_1, d_2)\right)^{-1} = \Delta_m^{(i)}(d_2, d_1), \quad (59)$$

Аналогично тому, как были получены формулы (49)–(50), можно найти следующие соотношения:

$$\sum_{m,s}^{\infty} \sum_{l,m}^{\infty} \left\{ \sum_{m,n}^{\infty} \delta_{nl, m}^{(1)}(d_1, d_2) \delta_{ns, m}^{(2)}(d_1, d_2) \right\} \Psi_{ml}^{(1)}(\vec{r}_{<}) \Psi_{ms}^{(3)}(\vec{r}_{>})$$

$$= \sum_{m,s}^{\infty} \Psi_{ms}^{(1)}(\vec{r}_{<}) \Psi_{ms}^{(3)}(\vec{r}_{>}), \quad (60)$$

т.е. справедливы равенства

$$\Delta_m^{(1)}(d_1, d_2) \Delta_m^{(2)T}(d_1, d_2) = I \quad (61)$$

и

$$\Delta_m^{(2)}(d_1, d_2) = \left( \Delta_m^{(1)T}(d_1, d_2) \right)^{(-1)} = \Delta_m^{(1)T}(d_2, d_1). \quad (62)$$

Данные формулы можно проверить аналитически, сравнивая соответствующие матричные элементы (см. соотношения (52) и (54)), кроме того их подтверждают непосредственные численные расчеты.

Так как матрицы перехода  $\Delta_m^{(1)}(d_1, d_2)$  и  $\Delta_m^{(2)}(d_1, d_2)$  являются нижне- и верхнетреугольными соответственно, то разложения сфероидальных гармоник одной сфероидальной системы по гармоникам другой имеют вид

$$\Psi_{mn}^{(1)}(d_1) = \sum_{l=m}^n{}' \delta_{nl, m}^{(1)}(d_1, d_2) \Psi_{ml}^{(1)}(d_2), \quad (63)$$

$$\Psi_{mn}^{(2)}(d_1) = \sum_{l=n}^{\infty}{}' \delta_{nl, m}^{(2)}(d_1, d_2) \Psi_{ml}^{(2)}(d_2). \quad (64)$$

Из этих формул видно, что разложения для гармоник 1-го рода конечны, в то время как разложения для гармоник 2-го рода представляют собой бесконечные ряды. Для анализа сходимости последних нужно найти оценку соответствующих матричных элементов при  $l \gg n$ . Использование для этих целей сумм (54) затруднительно, поэтому применяется другой способ. Так как угловые функции в разложениях (64) ортогональны, то для коэффициентов можно получить уравнение ( $\xi_2 = \xi_2^0$ )

$$\begin{aligned} \delta_{nl, m}^{(2)}(d_1, d_2) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left( \frac{d_2}{2} \right)^{-(l+1)} Q_l^m(\xi_2) \\ = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \Psi_{mn}^{(2)}(d_1, \xi_1, \eta_1, \varphi) \psi_{ml}(\eta_2, \varphi) d\eta_2 d\varphi. \end{aligned} \quad (65)$$

Это соотношение снова не годится для построения асимптотики, поэтому следует воспользоваться соотношением  $\delta_{nl, m}^{(2)}(d_1, d_2) = \delta_{ln, m}^{(1)}(d_2, d_1)$  (см. формулы (62)–(63)) и оценить матричные элементы для гармоник

1-го рода

$$\begin{aligned} \delta_{ln,m}^{(1)}(d_2, d_1) &= \frac{1}{P_n^m(\xi_1)} \left(\frac{2}{d_1}\right)^n \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \Psi_{ml}^{(1)}(d_2, \xi_2, \eta_2, \varphi) \psi_{mn}(\eta_1, \varphi) d\eta_1 d\varphi \\ &= \frac{1}{P_n^m(\xi_1)} \left(\frac{2}{d_1}\right)^n \int_{-1}^1 \left(\frac{d_2}{2}\right)^l P_l^m(\xi_2) \bar{P}_l^m(\eta_2) \bar{P}_n^m(\eta_1) d\eta_1, \quad \xi_1 = \xi_1^0. \end{aligned} \quad (66)$$

В дальнейшем наряду с переменной  $\cos \vartheta = \eta$  будут использоваться новые переменные

$$\sigma = \frac{d}{2} \left( \xi + \sqrt{\xi^2 - f} \right), \quad (67)$$

которые равны сумме полюсей координатного сфероида –  $\sigma = a + b$ . При анализе матричных элементов (66) в случае  $l \gg n$  нужно перейти к интегрированию по переменной  $\vartheta_2$ . С учетом асимптотик (41)–(42) получим интегралы вида

$$\begin{aligned} \delta_{nl,m}^{(2)}(d_1, d_2) \\ = l^{(m-1/2)} \int_0^\pi f(\vartheta_2) \exp \left\{ l \left[ \ln \frac{d_2}{2} \left( \xi_2(\vartheta_2) + \sqrt{\xi_2^2(\vartheta_2) - f} \right) + is\vartheta_2 \right] \right\} d\vartheta_2, \end{aligned} \quad (68)$$

где  $s = \pm 1$ , а  $f(\vartheta_2)$  – медленно меняющиеся функции. После введения вместо  $\xi_2$  новой переменной  $\sigma_2$  задача оценки интегралов становится аналогичной той, которая была решена в работе [16], но для сферического базиса. Оценивание интегралов (68) при условии  $d_1 > d_2$  по методу перевала дает

$$\delta_{nl,m}^{(2)}(d_1, d_2) = \text{const } l^{(m-1)} \sigma_{12}^l (1 + O(1/l)), \quad (69)$$

где

$$\sigma_{12} = \left| \sigma(\vartheta_{2,s}) e^{is\vartheta_{2,s}} \right| = \left| \frac{d_2}{2} \left( \xi(\vartheta_{2,s}) + \sqrt{\xi^2(\vartheta_{2,s}) - f} \right) e^{is\vartheta_{2,s}} \right|, \quad (70)$$

а точки перевала определяются из уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{\xi_2^2 - f}} \frac{d\xi_2}{d\vartheta_2} + is = 0 \quad (71)$$

или

$$\frac{\sigma'_{\vartheta}}{\sigma} + is = 0. \quad (72)$$

Стационарная точка  $\vartheta_s$  уравнения (71) или (72) совпадает с фокусом 1-й сфероидальной системы –  $\vartheta_{2,s} = 0$ ,  $\xi_2 = \frac{d_1}{d_2}$ , при этом

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2} \left( d_1 + \sqrt{d_1^2 - f d_2^2} \right). \quad (73)$$

Найденная асимптотика матричных элементов  $\delta_{nl, m}^{(2)}(d_1, d_2)$  позволяет найти область сходимости разложений (64). Используя признак Даламбера

$$\left| \frac{\delta_{nl+2, m}^{(2)}(d_1, d_2) \Psi_{ml+2}^{(2)}}{\delta_{nl, m}^{(2)}(d_1, d_2) \Psi_{ml}^{(2)}} \right| = \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2} \left( 1 + O\left(\frac{1}{l}\right) \right) < 1, \quad (74)$$

получим  $d_2 \left( \xi_2 + \sqrt{\xi_2^2 - f} \right) > \left( d_1 + \sqrt{d_1^2 - f d_2^2} \right)$ , т.е.

$$\xi_2 > \frac{d_1}{d_2}. \quad (75)$$

Данная область соответствует внешности координатного сфероида 2-й системы, поверхность которого проходит через особую точку  $\xi_1 = 1$  функции  $Q_n^m(\xi_1)$ .

Оценивание интегралов  $\delta_{nl, m}^{(2)}(d_2, d_1)$  при том же условии  $d_1 > d_2$  по методу перевала не дает желаемых результатов, поскольку в этом случае особая точка  $\xi_2 = 1$  находится вне рассматриваемой области, а именно на фокусном отрезке 1-й системы. Здесь в соответствии с методом стационарной фазы следует интегрировать по частям интеграл, аналогичный (68). В результате можно получить оценку

$$\left| \delta_{nl, m}^{(2)}(d_2, d_1) \right| = \text{const } l^{-1} (1 + O(1/l)), \quad (76)$$

и соответствующий ряд сходится всюду за исключением фокусного отрезка  $[-d_1/2; d_1/2]$ . Отметим, что выше имелась в виду как сходимость поточечная, так и в соответствующем пространстве  $L_2(\Omega)$ .

Итак, в рассматриваемых случаях ситуация со сходимостью схожа с той, которая имеет место для разложений сферических и сфероидальных гармоник (см. формулы (36), (39)). Если изменить условие для фокусных расстояний на противоположное –  $d_1 < d_2$ , то оценки для матричных элементов поменяются местами.

Сравнительно недавно была опубликована статья [17] о связи сфероидальных гармоник волнового уравнения в разных системах координат. Следует указать на аналогию между соотношениями для сфероидальных гармоник уравнения Лапласа и волнового уравнения. В частности, для волновых гармоник имеют место равенства, аналогичные соотношениям (61)–(62). Кроме того, выводы о сходимости разложений для сфероидальных гармоник уравнения Лапласа справедливы и для сфероидальных гармоник волнового уравнения в разных системах координат. Например, подход, использующий метод перевала для поиска асимптотик элементов переходных матриц, непосредственно применим в волновом случае, так как асимптотики радиальных и угловых сфероидальных функций при больших значениях индекса (см подробнее [18]) совпадают с формулами (41)–(43).

**1.4. Численные тесты.** Ниже представляются результаты численных расчетов сфероидальных гармоник в разных системах координат. На рис. 1 область сходимости разложений (64) сфероидальных гармо-

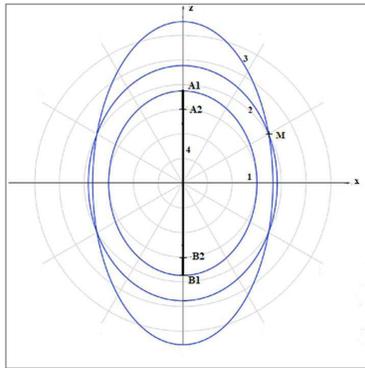


Рис. 1. Сечения координатных поверхностей ( $\xi = const$ ) сфероидальных систем координат с фокусами в точках  $A_1, B_1$  и  $A_2, B_2$  (фокусные расстояния соответственно  $d_1 \approx 1.5$  и  $d_2 = 1.2$ ). Вытянутые сфероидальные координаты с осью вращения, совпадающей с осью  $z$ . Кривые 1 и 2 – координатные поверхности второй системы, кривая 3 – первой. Точка  $M$  – пересечение сфероидов 2 и 3.

ник 2-го рода  $\Psi_{ml}^{(2)}(d_1)$  в 1-й системе по сфероидальным гармоникам  $\Psi_{ml}^{(2)}(d_2)$  во 2-й системе при условии  $d_1 > d_2$  определяется неравенством (75) и соответствует внешности координатного сфероида 2-й системы с номером 1, проходящим через фокусы 1-й системы. Данная ситуация аналогична той, которая имеет место при разложении сфероидальных гармоник 2-го рода по сферическим гармоникам  $\Upsilon_{ml}^{(2)}$ , когда область сходимости представляет собой внешность окружности, проходящей через фокусы сфероидальной системы. Заметим, что эти фокусы в обоих случаях являются особыми точками представляемой в виде ряда сфероидальной гармоник. При разложении сфероидальных гармоник 1-го рода соответствующие ряды конечны, и вопросы о сходимости не возникают. При условии  $d_1 < d_2$  особые точки соответствующих сфероидальных гармоник 2-го рода будут располагаться на фокусном отрезке 2-й системы, поэтому разложение (64) будет сходиться всюду за исключением фокусного отрезка  $[-d_2/2; d_2/2]$ , где не определены базисные функции. Для сплюснутых функций фокусные отрезки нужно заменить на фокусные диски, при этом результаты анализа областей сходимости разложений гармоник сохраняются.

Для сфероидальных гармоник 2-го рода волнового уравнения области сходимости соответствующих разложений совпадают с таковыми для гармоник уравнения Лапласа. Отличие имеется лишь для сфероидальных гармоник 1-го рода, поскольку соответствующие ряды бесконечны. Однако, поскольку в этих случаях отсутствуют особые точки, то сходимость разложений имеет место на всей плоскости.

На рис. 2 и 3 представлены данные о поведении элементов матриц перехода  $\Delta^{(i)}(d_1, d_2)$  и  $\Delta^{(i)}(d_2, d_1)$ , включая достаточно большие значения индекса элемента. Из 4-х матриц, которые получаются при  $i = 1, 2$  и перестановке аргументов  $d_1, d_2$ , принципиально разными являются только две, например,  $\Delta_m^{(2)}(d_1, d_2)$  и  $\Delta_m^{(2)}(d_2, d_1)$ , последняя из которых является обратной к первой (см. (59), (62)). В предположении  $d_1 > d_2$  из рис. 2 видно, что с ростом индекса  $l$  первые из этих элементов убывают, а вторые – возрастают. Следующий рис. 3 подтверждает теоретические выводы о функциональной зависимости (69) элементов  $\delta_{nl, m}^{(2)}(d_1, d_2)$ , поскольку асимптотика отношения двух соседних элементов согласуется с погрешностью  $\sim 1\%$  с вытекающей из этой зависимости оценкой

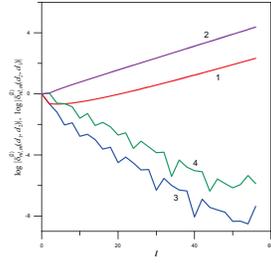


Рис. 2. Зависимость элементов строк матриц перехода  $\delta_{nl, m}^{(2)}(d_1, d_2)$  (кривые 1 и 2) и  $\delta_{nl, m}^{(2)}(d_2, d_1)$  (кривые 3 и 4) от индекса  $l$  при значениях параметров:  $n = 1$ ,  $d_1 \approx 1.5$ ,  $d_2 = 1.2$ ,  $m = 0$  (кривые 1 и 3) и  $m = 1$  (кривые 2 и 4).

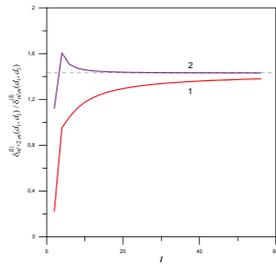


Рис. 3. То же, что на рис. 2., но для отношений элементов  $\delta_{nl+2, m}^{(2)}(d_1, d_2)/\delta_{nl, m}^{(2)}(d_1, d_2)$  для  $m = 0$  (кривая 1) и  $m = 1$  (кривая 2). Пунктир соответствует отношению, равному  $\sigma_{12}^2 \approx 1.435$  (см. текст).

$$\left| \frac{\delta_{nl+2, m}^{(2)}(d_1, d_2)}{\delta_{nl, m}^{(2)}(d_1, d_2)} \right| = \sigma_{12}^2 \frac{(l+2)^{(m-1)}}{l^{(m-1)}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{l}\right) \right) \quad (77)$$

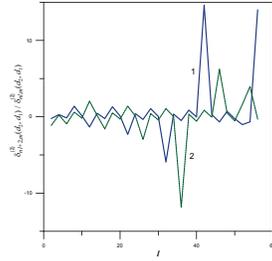


Рис. 4. То же, что на рис. 2., но для отношений элементов  $\delta_{nl+2, m}^{(2)}(d_2, d_1)/\delta_{nl, m}^{(2)}(d_2, d_1)$  для  $m = 0$  (кривая 1) и  $m = 1$  (кривая 2).

как для  $m = 0$ , так и для  $m = 1$ . Так, при выбранных значениях параметров  $d_1, d_2$  значение параметра  $\sigma_{12}^2 = 0.25(d_1 + \sqrt{d_1^2 - d_2^2})^2 \approx 1.435$ , в то время как полученные численно отношения матричных элементов при  $l = 48$  равны соответственно 1.38 при  $m = 0$  и 1.43 при  $m = 1$ . Примерно такая же картина имеет место при других значениях фокусных расстояний. Поведение элементов  $\delta_{nl, m}^{(2)}(d_2, d_1)$  другой матрицы перехода иллюстрирует рис. 2 и 4. Здесь следует отметить возможное изменение знака, а также наличие значительных колебаний модуля отношения соседних элементов при основной тенденции к быстрому убыванию с увеличением индекса.

Значения сфероидальных гармоник 1-го и 2-го родов вычислялись с удвоенной точностью как непосредственно по формулам (16)–(19) (и (7)–(8) при  $l \geq 4, m \geq 2$ ), так и с помощью соотношений (63)–(64). Поскольку разложения для гармоник 1-го рода конечны и являются представлениями полиномов в первой сфероидальной системе по системе полиномов в другой сфероидальной системе, у которых степень не превышает степени первых, то проблем при численных расчетах не возникает. Сравнение левой и правой частей соотношений (63) показали очень высокую точность – по крайней мере, совпадали все 9 цифр, которые выводились при печати.

Таблица 1. Вычисление сфероидальных гармоник второго рода  $\Psi_{ml}^{(2)}$  в точке  $M$  (см. текст) в двух сфероидальных системах ( $d_1 = 1.2$ ,  $d_2 = 1.49666$ ) непосредственно по ф-ле (7) и при использовании разложений (64)

$l$	способ	$\Psi_{0l}^{(2)}(d_1)$	$\Psi_{0l}^{(2)}(d_2)$	$\Psi_{1l}^{(2)}(d_1)$	$\Psi_{1l}^{(2)}(d_2)$
0	явное выражение	3.900814e-01	4.018339e-01	-	-
0	разложение	3.900811e-01	4.018209e-01	-	-
1	явное выражение	2.341019e-01	2.245898e-01	1.975872e-01	2.360278e-01
1	разложение	2.341018e-01	2.245793e-01	1.975870e-01	2.360131e-01
2	явное выражение	8.613011e-02	6.228807e-02	8.954966e-02	9.807942e-02
2	разложение	8.613011e-02	6.224036e-02	8.954962e-02	9.807083e-02
3	явное выражение	4.518139e-02	-1.715606e-02	3.688383e-02	3.432857e-02
3	разложение	4.518138e-02	-1.718079e-02	3.688383e-02	3.429069e-02
4	явное выражение	-2.429159e-02	-3.485622e-02	1.164599e-02	6.893930e-03
4	разложение	-2.429158e-02	-3.495006e-02	1.164599e-02	6.884409e-03
5	явное выражение	-2.418647e-02	-2.410374e-02	1.289191e-03	-2.091743e-03
5	разложение	-2.418647e-02	-2.414554e-02	1.289187e-03	-1.926602e-03

Разложения для гармоник 2-го рода бесконечны, и поэтому их численному анализу следует уделить больше внимания. В табл. 1 приведены результаты расчетов сфероидальных гармоник  $\Psi_{mi}^{(2)}(d)$  в двух разных сфероидальных системах с фокусными расстояниями  $d_1 = 1.2$  и  $d_2 = 1.49666$  в точке М (см. рис. 1). Эта точка в первой системе имеет координаты  $\xi_1 = 1.46993$  и  $\eta_1 = 0.78555$ , а во второй –  $\xi_2 = 1.26913$  и  $\eta_2 = 0.72949$ . В первой и третьей колонках табл. 1 наблюдается хорошее согласие между значениями функций, полученных непосредственно и в результате суммирования 7–10 ненулевых слагаемых в правой части соотношения (64). Это связано с тем, что коэффициенты разложений достаточно быстро убывают и имеет место сходимость соответствующего ряда всюду за исключением фокусного отрезка. В то же время согласие результатов во второй и четвертой колонках заметно хуже, поскольку совпадают обычно 3–4 цифры. Здесь наблюдается медленная сходимость соответствующего ряда, поскольку точка М лежит недалеко от границы области сходимости (см. рис. 1). Используя оценку (74), нетрудно найти скорость сходимости –  $\sigma_{12}^2/\sigma_2^2 \approx 0.76$ . Таким образом, учитывая 10 значимых слагаемых в разложениях (64) можно получить две правильные цифры. Однако, из-за разных знаков слагаемых возможна дополнительная потеря значащих цифр в окончательной сумме. Принимая во внимание выше сказанное, становятся более понятными результаты численных расчетов, представленные в табл. 1. В целом, можно констатировать, что результаты численных расчетов подтверждают теоретические выводы.

## §2. ТОЧНОЕ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСОФОКУСНОГО СФЕРОИДА

Полученные выше соотношения между сфероидальными гармониками позволяют найти точное решение электростатической задачи для многослойных сфероидов с несофокусными поверхностями слоев. Ранее такое решение было известно лишь для весьма узкого класса сфероидов с софокусными поверхностями слоев (см., например, [5]). Точное решение электростатической задачи дает возможность получить явные выражения для приближения Релея, часто используемого на

практике. Кроме этого, анализ точного решения позволяет сформулировать полезные приближенные решения, область применимости которых оказывается принципиально шире области применимости приближения Релея.

**2.1. Приближение Релея и электростатическая задача.** Рассеяние света малыми несферическими частицами представляет большой интерес в различных областях науки [6, 12], в особенности в нанооптике [19]. В этом случае наиболее часто используется приближение Релея, которое базируется на решении электростатической задачи и определении поляризуемости частицы, которая связывает момент поля индуцированного диполя  $\mathbf{p}$  с внешним постоянным полем  $\mathbf{E}_0$  [6]

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_0. \quad (78)$$

В общем случае поляризуемость является тензором, который в случае осесимметричных частиц становится диагональным для трех взаимно перпендикулярных направлений напряженности электрического поля и включает элементы  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ . Если ось  $z$  совпадает с осью вращения, то  $\alpha_x = \alpha_y$ .

В приближении Релея сечения поглощения и рассеяния просто выражаются через поляризуемость [20]:

$$C^{\text{abs}} = 4\pi k_1 \text{Im } \alpha, \quad (79)$$

$$C^{\text{sca}} = \frac{8}{3} \pi k_1^4 |\alpha|^2, \quad (80)$$

где  $k_1$  – волновое число среды вне частицы.

Электростатическая задача решается с помощью скалярных потенциалов  $\Phi$ , связанных с напряженностью электрического поля  $\vec{E}$  следующим образом [6, 12]:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi. \quad (81)$$

Для двухслойной частицы потенциалы будут иметь два индекса –  $\Phi_i^j$ , где  $j = 1, 2, 3$  соответственно для поля вне частицы, внутри оболочки и ядра. Нижний индекс принимает два значения  $i = 1, 2$  соответственно для регулярной части, не имеющей особенностей в начале координат, и иррегулярной части, которая убывает на бесконечности и имеет особенность в начале координат.

Поля вне частицы описываются суммой потенциалов –  $\Phi^1 = \Phi_1^1 + \Phi_2^1$ , где  $\Phi_1^1$  соответствует внешнему полю, а второе слагаемое  $\Phi_2^1$  – “рассеянному” полю, т.е. полю, возникающему из-за наличия частицы. Именно

это поле представляет основной интерес при решении электростатической задачи, так как его дипольная составляющая используется для построения релеевского приближения. Потенциал поля внутри оболочки содержит оба слагаемые –  $\Phi^2 = \Phi_1^2 + \Phi_2^2$ . И, наконец, поле внутри ядра не имеет особенностей в начале координат и поэтому описывается только первым слагаемым –  $\Phi^3 = \Phi_1^3$ .

Из уравнений Максвелла для электростатических полей следует, что они должны удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta \Phi_i^j = 0. \quad (82)$$

Граничные условия на поверхностях раздела сред заключаются в непрерывности тангенциальных составляющих напряженностей электрических полей и нормальных составляющих векторов электрической индукции  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ , и их можно записать, используя скалярные потенциалы, следующим образом [6, 12]:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1^j + \Phi_2^j &= \Phi_1^{j+1} + \Phi_2^{j+1}, \\ \frac{\partial(\Phi_1^j + \Phi_2^j)}{\partial n_j} &= \varepsilon_{j+1} \frac{\partial(\Phi_1^{j+1} + \Phi_2^{j+1})}{\partial n_j}, \end{aligned} \right\} \bar{r} \in S_j \quad (83)$$

где  $j = 1, 2$ , при этом  $\frac{\partial}{\partial n_j}$  – производные вдоль внешних нормалей к поверхностям частицы  $S_1$  и ядра  $S_2$ . Кроме того,  $\varepsilon_{j+1}$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды в  $(j+1)$ -й оболочке по сравнению со средой в  $j$ -й оболочке.

Наряду с постановкой задачи в дифференциальной форме (82)–(83) ее можно сформулировать в виде системы поверхностных интегральных уравнений [9]

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{j+1} - 1) \int_{S_j} \left\{ \frac{\partial(\Phi_1^{j+1}(\vec{r}') + \Phi_2^{j+1}(\vec{r}'))}{\partial n'} G(\vec{r}, \vec{r}') \right\} ds' \\ = \begin{cases} \Phi_1^j(\vec{r}) - \Phi_1^{j+1}(\vec{r}), & \vec{r} \in D_j, \\ -\Phi_2^j(\vec{r}) + \Phi_2^{j+1}(\vec{r}), & \vec{r} \in R^3 \setminus \bar{D}_j. \end{cases} \end{aligned} \quad (84)$$

Заметим, что уравнения (84) содержит функцию Грина, единую для всех сред – в ядре, оболочке и внешности частицы,  $G(\vec{r}, \vec{r}') = 1/4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|$ , где  $\vec{r}, \vec{r}'$  – радиус-векторы точек наблюдения и интегрирования.

**2.2. Точное решение для двухслойного сфероида.** Перейдем к построению решения рассматриваемой электростатической задачи с использованием двух сфероидальных систем. Основная идея заключается в том, чтобы в окрестности внешней границы частицы потенциалы полей представлять в виде разложений по сфероидальным гармоникам первой системы, а в окрестности внутренней границы с ядром потенциалы полей представлять в виде аналогичных разложений, но по сфероидальным гармоникам второй системы. Наличие связи между этими гармониками позволяет наиболее просто провести сшивку данных разложений одних и тех же потенциалов внутри оболочки частицы.

Уравнение поверхности частицы  $S_1$  в первой сфероидальной системе имеет вид

$$\xi_1 = \xi_1^0, \quad (85)$$

где потенциалы для постоянного внешнего поля записываются следующим образом:

$$\Phi_1^1 = a_{ml}^{(1)} \Psi_{m1}^{(1)}(\xi_1, \eta_1, \varphi), \quad (86)$$

где  $a_{ml}^{(1)}$  – известный коэффициент. С учетом осевой симметрии частицы можно рассматривать только два случая ориентации внешнего поля. Если единичное внешнее поле направлено вдоль или перпендикулярно оси вращения, то отличны от нуля только коэффициенты  $a_{01}^{(1)} = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}}$  или  $a_{11}^{(1)} = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}}$  соответственно.

Ранее было доказано (см., например, [16]), что для осесимметричных частиц электростатическая задача решается независимо для каждого слагаемого разложений потенциалов  $\Phi$  в ряды Фурье по азимутальному углу  $\varphi$ , т.е. в этом случае имеет место разделение относительно переменной  $\varphi$ . В силу этого в случае вертикальной ориентации внешнего поля следует рассматривать только члены с индексом  $m = 0$ , а при горизонтальной ориентации – только члены с индексом  $m = 1$ .

С учетом сказанного выше разложение “рассеянного” поля записывается следующим образом:

$$\Phi_2^1 = \sum_{l=1}^{\infty} b_{ml}^{(1)} \Psi_{ml}^{(2)}(\xi_1, \eta_1, \varphi), \quad (87)$$

где штрих означает, что с учетом свойств четности суммирование нужно вести только по нечетным индексам  $l$ .

Регулярный и иррегулярный потенциалы в оболочке в окрестности поверхности частицы могут быть представлены в виде разложений по сфероидальным гармоникам первой сфероидальной системы

$$\begin{aligned} \Phi_1^2 &= \sum_{l=1}^{\infty} a_{1,ml}^{(2)} \Psi_{ml}^{(1)}(\xi_1, \eta_1, \varphi) \\ \Phi_2^2 &= \sum_{l=1}^{\infty} b_{1,ml}^{(2)} \Psi_{ml}^{(2)}(\xi_1, \eta_1, \varphi). \end{aligned} \quad (88)$$

Заметим, что подобная запись справедлива также и для потенциалов внешнего и “рассеянного” полей.

Уравнение поверхности ядра частицы  $S_2$  во второй сфероидальной системе имеет вид

$$\xi_2 = \xi_2^0. \quad (89)$$

Потенциалы полей в оболочке в окрестности поверхности ядра частицы могут быть представлены в виде разложений по сфероидальным гармоникам второй сфероидальной системы

$$\begin{aligned} \Phi_1^2 &= \sum_{l=1}^{\infty} a_{2,ml}^{(2)} \Psi_{ml}^{(1)}(\xi_2, \eta_2, \varphi) \\ \Phi_2^2 &= \sum_{l=1}^{\infty} b_{2,ml}^{(2)} \Psi_{ml}^{(2)}(\xi_2, \eta_2, \varphi). \end{aligned} \quad (90)$$

Наконец, потенциал поля внутри ядра имеет вид

$$\Phi_1^3 = \sum_{l=1}^{\infty} a_{ml}^{(3)} \Psi_{ml}^{(1)}(\xi_2, \eta_2, \varphi). \quad (91)$$

Проведем сшивку разложений (88) и (90), используемых внутри оболочки. В матричном виде с учетом соотношений (63)–(64) между сфероидальными гармониками ее можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_1^{(2)} \\ \vec{b}_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta^{(1)T}(d_2, d_1) & 0 \\ 0 & \Delta^{(2)T}(d_2, d_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_2^{(2)} \\ \vec{b}_2^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (92)$$

где использованы транспонированные матрицы и векторы коэффициентов разложений  $\vec{a}_i^{(2)} = \{a_{i,ml}^{(2)}\}^T$ .

Представления полей (87)–(88) и (90)–(91) удовлетворяют уравнениям Максвелла и условиям на бесконечности, а неизвестные коэффициенты разложений можно найти из граничных условий (83) или интегральных уравнений (84). В первом случае применяется метод разделения переменных (SVM), а во втором – метод расширенных граничных условий (ЕВСМ). В [22] было показано, что для рассматриваемой задачи эти методы оказываются эквивалентными, поскольку приводят к одинаковым системам линейных алгебраических уравнений для

определения неизвестных коэффициентов, которые решаются в явном виде.

Ниже дается решение методом ЕВСМ. Для алгебраизации интегральных уравнений на поверхности частицы подставим в них разложения потенциалов и функции Грина в первой сфероидальной системе. Систему для определения неизвестных коэффициентов можно записать в матричном виде

$$\left. \begin{aligned} \vec{a}^{(1)} &= A_{31}^{(1)} \vec{a}_1^{(2)} + A_{33}^{(1)} \vec{b}_1^{(2)}, \\ \vec{b}^{(1)} &= A_{11}^{(1)} \vec{a}_1^{(2)} + A_{13}^{(1)} \vec{b}_1^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Аналогично для алгебраизации граничных условий на поверхности ядра частицы подставим в них разложения потенциалов и функции Грина во второй сфероидальной системе. В результате получим

$$\left. \begin{aligned} \vec{a}_1^{(2)} &= A_{31}^{(2)} \vec{a}^{(3)}, \\ \vec{b}_1^{(2)} &= A_{11}^{(2)} \vec{a}^{(3)}, \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

где введены векторы  $\vec{a}_i^{(j)} = \{a_{ml}^j\}_m^\infty$ ,  $\vec{b}_i^{(j)} = \{b_{ml}^j\}_m^\infty$  и матрицы

$$\begin{aligned} A_{31}^{(j)} &= \left\{ \delta_l^n + (\varepsilon_2 - 1) L_{nl, m}^{j, 31} \right\}_m^\infty, & A_{33}^{(j)} &= \left\{ (\varepsilon_2 - 1) L_{nl, m}^{j, 33} \right\}_m^\infty, \\ A_{11}^{(j)} &= \left\{ -(\varepsilon_2 - 1) L_{nl, m}^{j, 11} \right\}_m^\infty, & A_{13}^{(j)} &= \left\{ \delta_l^n - (\varepsilon_2 - 1) L_{nl, m}^{j, 13} \right\}_m^\infty. \end{aligned} \quad (95)$$

Выше использовано обозначение для интегралов

$$L_{nl, m}^{j, ki} = \int_{S_j} \Psi_{mn}^{(k)}(\vec{r}) \frac{\partial \Psi_{ml}^{(i)}(\vec{r})}{\partial n} ds, \quad (96)$$

которые зависят от индекса  $j$  через поверхность интегрирования, при этом следующие два верхние индекса матриц показывают, какого рода радиальные функции входят в их выражения. В рассматриваемом случае с учетом соотношений (7) интегралы (96) легко найти в явном

виде [22]

$$\begin{aligned}
(A_{31}^{(j)})_{nn} &= 1 + (\varepsilon_j - 1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} ((\xi_j^0)^2 - 1) P_n^{m'}(\xi_j^0) Q_n^m(\xi_j^0), \\
(A_{33}^{(j)})_{nn} &= (\varepsilon_j - 1) \left( \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right)^2 \left( \frac{d_j}{2} \right)^{-(2n+1)} ((\xi_j^0)^2 - 1) Q_n^{m'}(\xi_j^0) Q_n^m(\xi_j^0), \\
(A_{11}^{(j)})_{nn} &= -(\varepsilon_j - 1) \left( \frac{d_j}{2} \right)^{(2n+1)} ((\xi_j^0)^2 - 1) P_n^{m'}(\xi_j^0) P_n^m(\xi_j^0), \\
(A_{13}^{(j)})_{nn} &= 1 - (\varepsilon_j - 1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} ((\xi_j^0)^2 - 1) Q_n^{m'}(\xi_j^0) P_n^m(\xi_j^0), \quad j = 1, 2.
\end{aligned} \tag{97}$$

Соотношения для сплюснутых частиц можно получить с помощью стандартной замены.

Общую систему можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \vec{a}^{(1)} &= A_1 \vec{a}^{(3)}, \\ \vec{b}^{(1)} &= A_2 \vec{a}^{(3)}, \end{aligned} \right\} \tag{98}$$

где матрицы  $A_1$  и  $A_2$  удовлетворяют соотношению

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{31}^{(1)} & A_{33}^{(1)} \\ A_{11}^{(1)} & A_{13}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta^{(1)T}(d_2, d_1) & 0 \\ 0 & \Delta^{(2)T}(d_2, d_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{31}^{(2)} \\ A_{11}^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{99}$$

Теперь нетрудно найти коэффициенты разложения потенциала “рассеянного” излучения, а именно

$$\vec{b}^{(1)} = A_2 (A_1)^{(-1)} \vec{a}^{(1)} = T \vec{a}^{(1)}. \tag{100}$$

Ранее была найдена связь между  $T$ -матрицей и поляризуемостью частицы [21]. Например, при ориентации внешнего поля перпендикулярно оси вращения частицы имеем

$$\begin{aligned}
\alpha_x = \alpha_y &= -\frac{4\pi}{3} \frac{b_{11}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = -\frac{4\pi}{3} T_{11,1}, \\
\alpha_z &= -\frac{4\pi}{3} \frac{b_{01}^{(1)}}{a_{01}^{(1)}} = -\frac{4\pi}{3} T_{11,0}.
\end{aligned} \tag{101}$$

Таким образом, для приближения Релея требуется только один элемент этой матрицы –  $T_{11}$ . Для полного решения электростатической задачи требуется вся  $T$ -матрица.

**2.3. Точное решение для многослойного сфероида.** Пусть многослойная сфероидальная частица имеет  $J$  слоев. Решение электростатической задачи, т.е. построение  $T$ -матрицы, для этого случая осуществляется аналогично выше приведенному алгоритму для двухслойного сфероида (99)–(100). Используя те же обозначения, получим

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{31}^{(1)} & A_{33}^{(1)} \\ A_{11}^{(1)} & A_{13}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta^{(1)T}(d_2, d_1) & 0 \\ 0 & \Delta^{(2)T}(d_2, d_1) \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \Delta^{(1)T}(d_J, d_{J-1}) & 0 \\ 0 & \Delta^{(2)T}(d_J, d_{J-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{31}^{(J)} \\ A_{11}^{(J)} \end{pmatrix}. \quad (102)$$

Затем  $T$ -матрица и полярзуемость многослойной сфероидальной частицы вычисляются по формулам (100)–(101).

Ниже выведем рекуррентную формулу, связывающую  $T$ -матрицы частиц с  $J + 1$  и  $J$  слоями. Сначала обратимся к двухслойному случаю. Из уравнения (94) можно получить  $T$ -матрицу для ядра  $T_c$  во 2-й сфероидальной системе

$$\vec{b}_2^{(2)} = A_{11}^{(2)} (A_{31}^{(2)})^{(-1)} \vec{a}_2^{(2)} = T_c \vec{a}_2^{(2)}, \quad (103)$$

которая представляет собой диагональную матрицу. Далее из уравнения для сшивки полей (92) определяем  $T$ -матрицу для ядра  $\tilde{T}_c$ , но в 1-й сфероидальной системе:

$$\vec{b}_2^{(1)} = \Delta^{(1)}(d_1, d_2) T_c \Delta^{(1)T}(d_1, d_2) \vec{a}_2^{(1)} = \tilde{T}_c \vec{a}_1^{(2)}. \quad (104)$$

Теперь систему (93) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \vec{a}^{(1)} &= A_{31}^{(1)} \vec{a}_1^{(2)} + A_{33}^{(1)} \tilde{T}_c \vec{a}_1^{(2)}, \\ \vec{b}^{(1)} &= A_{11}^{(1)} \vec{a}_1^{(2)} + A_{13}^{(1)} \tilde{T}_c \vec{a}_1^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

Данная система позволяет легко найти  $T$ -матрицу двухслойной частицы

$$\vec{b}^{(1)} = \left( A_{11}^{(1)} + A_{13}^{(1)} \tilde{T}_c \right) \left( A_{31}^{(1)} + A_{33}^{(1)} \tilde{T}_c \right)^{-1} \vec{a}^{(1)} = T \vec{a}^{(1)}, \quad (106)$$

Существует второй способ построения  $T$ -матрицы. Для этого сначала обратим систему (93) и исключим вектор  $\vec{a}_1^{(2)}$ , учитывая уравнение (104)

$$\left( -A_{11}^{(1)} \vec{a}^{(1)} + A_{31}^{(1)} \vec{b}^{(1)} \right) = \tilde{T}_c \left( A_{13}^{(1)} \vec{a}^{(1)} - A_{33}^{(1)} \vec{b}^{(1)} \right). \quad (107)$$

Из этого равенства нетрудно найти  $T$ -матрицу

$$T = \left( A_{31}^{(1)} + \tilde{T}_c A_{33}^{(1)} \right)^{-1} \left( A_{11}^{(1)} + \tilde{T}_c A_{13}^{(1)} \right). \quad (108)$$

Сравнивая две формулы (106) и (108) нетрудно убедиться, что вторая получается из первой с помощью операции транспонирования. Поскольку речь идет об одной и той же  $T$ -матрице, то она является симметричной. Аналогично легко показать, что матрица  $\tilde{T}_c$  также является симметричной.

Итак, подводя итог проделанным выше преобразованиям для двухслойных сфероидов, можно выделить три шага. На первом строим в явном виде  $T$ -матрицу для ядра во 2-й сфероидальной системе (103), где имеет место полное разделение переменных. На втором шаге с помощью матриц перехода определяем  $T$ -матрицу для ядра во 1-й сфероидальной системе (104). И, наконец, на заключительном этапе получаем  $T$ -матрицу для двухслойной частицы. Ясно, что данный алгоритм можно обобщить дальше на многослойные несофокусные сфероиды, совершая два последних шага для каждой из добавленных оболочек. В силу того, что формула (103) справедлива для  $T^{(J)}$ -матрицы частицы с  $J$  слоями с помощью выкладок полностью аналогичных выше приведенным для  $T^{(J+1)}$ -матрицы частицы с  $J+1$  слоями получим

$$T^{(J+1)} = \left( A_{11}^{(1)} + A_{13}^{(1)} \tilde{T}^{(J)} \right) \left( A_{31}^{(1)} + A_{33}^{(1)} \tilde{T}^{(J)} \right)^{-1}, \quad (109)$$

$$T^{(J+1)} = \left( A_{31}^{(1)} + \tilde{T}^{(J)} A_{33}^{(1)} \right)^{-1} \left( A_{11}^{(1)} + \tilde{T}^{(J)} A_{13}^{(1)} \right). \quad (110)$$

Заметим, что  $T$ -матрицы для многослойных частиц симметричны.

**2.4. Приближенные решения для многослойных несофокусных сфероидов.** В общем случае для вычисления поляризуемости частицы нужно оперировать бесконечномерными матрицами, однако можно предложить две приближенные формулы, если учитывать лишь первые слагаемые в разложениях полей. В результате при учете одного слагаемого, когда матрицы совпадают с первым элементом, получим простую формулу

$$\alpha = -\frac{4\pi}{3} \frac{\{A_2\}_{11}}{\{A_1\}_{11}}. \quad (111)$$

Она формально совпадает с известной формулой для софокусного сфероида, для которого она дает точное решение [6]. Объем частицы  $V$

и геометрический фактор  $L_z$  при вертикальной ориентации внешнего поля вычисляются по формулам:

$$V = \frac{4\pi}{3} ab^2, \quad L_z = L^{31} = (\xi^2 - 1) \left( \frac{\xi}{2} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} - 1 \right) \quad (112)$$

для вытянутых сфероидов и

$$V = \frac{4\pi}{3} a^2b, \quad L_z = L^{31} = (\xi^2 + 1) \left( 1 - \xi \arctan \frac{1}{\xi} \right) \quad (113)$$

для сплюснутых. Здесь вытянутая радиальная сфероидальная координата  $\xi = [1 - (b/a)^2]^{-1/2}$ , а сплюснутая радиальная сфероидальная координата  $\xi = [(a/b)^2 - 1]^{-1/2}$ .

Другие геометрические факторы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} L^{j, 33} &= \frac{L_z^j (L_z^j - 1)}{\tilde{V}_j}, \\ L^{j, 11} &= a_j (b_j)^2 = \frac{3}{4\pi} V_j = \tilde{V}_j, \\ L^{j, 13} &= L_z^j - 1. \end{aligned} \quad (114)$$

Для многослойных софокусных частиц матричная формула (110) содержит только диагональные матрицы, поэтому главный (первый) элемент  $T$ -матрицы можно записать в виде обычного числового соотношения

$$T_{11}^{(J+1)} = \frac{(A_{11}^{(1)})_{11} + T_{11}^{(J)} (A_{13}^{(1)})_{11}}{(A_{31}^{(1)})_{11} + T_{11}^{(J)} (A_{33}^{(1)})_{11}}. \quad (115)$$

Если учитывать два слагаемых в разложениях (87)–(91), то найдем новое более точное приближение для двухслойных несофокусных сфероидов

$$\alpha = -\frac{4\pi}{3} \frac{\{A_2\}_{11}\{A_1\}_{33} - \{A_2\}_{13}\{A_1\}_{31}}{\{A_1\}_{11}\{A_1\}_{33} - \{A_1\}_{13}\{A_1\}_{31}}. \quad (116)$$

Напомним, что в последней формуле нужно использовать матрицы размера  $2 \times 2$  из соотношений (55)–(56) после исключения из них строк и столбцов, соответствующих четным индексам

$$\Delta_0^{(1)}(d_1, d_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{21}(d_2^2 - d_1^2)}{8} & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_0^{(2)}(d_1, d_2) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{21}(d_1^2 - d_2^2)}{8} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (117)$$

и

$$\Delta_1^{(1)}(d_1, d_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3\sqrt{14}(d_2^2 - d_1^2)}{8} & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1^{(2)}(d_1, d_2) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3\sqrt{14}(d_1^2 - d_2^2)}{8} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (118)$$

для индексов  $m = 0$  и  $m = 1$  соответственно. Кроме того, матрицы  $A_1$  и  $A_2$  имеют размер  $2 \times 2$ , а входящие в них диагональные матрицы  $A_{ik}^{(j)}$  состоят из двух элементов (см. ф-лу 97)) с индексами  $n = 1$  и  $n = 3$ .

В этом приближении для двухслойного сфероида главный матричный элемент можно найти после достаточно громоздких преобразований

$$T_{11}^{(2)} = \frac{[(A_{11}^{(1)})_{11} + (A_{13}^{(1)})_{11} T_{11}^{(2)}][(A_{31}^{(1)})_{33} + (A_{33}^{(1)})_{33} (T_{33}^{(2)} + \delta_{13}^{(1)} T_{11}^{(2)})] - (\delta_{13}^{(1)})^2 (A_{33}^{(1)})_{33} (A_{13}^{(1)})_{11} (T_{11}^{(2)})^2}{[(A_{31}^{(1)})_{11} + (A_{33}^{(1)})_{11} T_{11}^{(2)}][(A_{31}^{(1)})_{33} + (A_{33}^{(1)})_{33} (T_{33}^{(2)} + \delta_{13}^{(1)} T_{11}^{(2)})] - (\delta_{13}^{(1)})^2 (A_{33}^{(1)})_{33} (A_{33}^{(1)})_{11} (T_{11}^{(2)})^2}. \quad (119)$$

Отметим, что в данном случае формулы (109) и (110) дают один и тот же результат.

**2.5. Результаты численных расчетов.** Численные расчеты проводились для двух- и трехслойных сфероидальных частиц с подобными границами ядра и оболочек. В этом случае отношения больших полуосей  $a_j$  сфероидов к малым  $b_j$  являются постоянными величинами

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}. \quad (120)$$

Для указанных слоистых частиц можно ввести коэффициенты подобия

$$k_1 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{d_2}{d_1} \quad (121)$$

и

$$k_2 = \frac{a_3}{a_1} = \frac{b_3}{b_1} = \frac{d_3}{d_1}. \quad (122)$$

Для двухслойных частиц отношение объемов ядра и всей частицы определяется кубом коэффициента подобия

$$\frac{V_2}{V_1} = k_1^3. \quad (123)$$

Для трехслойных сфероидов отношения объемов ядра и внутренней оболочки к объему всей частицы вычисляются по формулам

$$\frac{V_2}{V_1} = k_1^3 - k_2^3, \quad \frac{V_3}{V_1} = k_2^3. \quad (124)$$

Таблица 2. Подпараметры подобной двухслойной выгнутой сферой для различных значений полуосей оболочек  $a_1, a_2 = k_1 a_1$ ;  $m_1$  и  $m_2$  показателя преломления внешней оболочки сфероида и ядра соответственно

NxN	SVM2, EBCM2			SVM1			EBCM1					
	$k_1$			$k_1$			$k_1$					
	0.9	0.7	0.5	0.9	0.7	0.5	0.9	0.7	0.5			
	$a_1 = 1.0$			$b_1 = 0.9$			$m_1 = 1.3$			$m_2 = 1.7$		
2x2	3.51513	2.69737	2.21601	3.49045	2.67897	2.20130	3.51507	2.69731	2.21600			
4x4	3.51510	2.69731	2.21600	3.51488	2.69715	2.21587	3.51510	2.69731	2.21600			
8x8	3.51510	2.69731	2.21600	3.51510	2.69731	2.21600	3.51510	2.69731	2.21600			
16x16	3.51510	2.69731	2.21600	3.51510	2.69731	2.21600	3.51510	2.69731	2.21600			
24x24	3.51510	2.69731	2.21600	3.51510	2.69731	2.21600	3.51510	2.69731	2.21600			
	$a_1 = 1.0$			$b_1 = 1/\sqrt{2}$			$m_1 = 1.3$			$m_2 = 1.7$		
2x2	2.32167	1.75911	1.42880	2.15977	1.64014	1.33487	2.31842	1.75836	1.42873			
4x4	2.32144	1.75872	1.42868	2.30736	1.74860	1.42071	2.32053	1.75864	1.42867			
8x8	2.32144	1.75872	1.42868	2.32132	1.75863	1.42861	2.32129	1.75871	1.42868			
16x16	2.32144	1.75872	1.42868	2.32144	1.75872	1.42868	2.32144	1.75872	1.42868			
24x24	2.32144	1.75872	1.42868	2.32144	1.75872	1.42868	2.32144	1.75872	1.42868			
	$a_1 = 1.0$			$b_1 = 1/(1 + \sqrt{2})$			$m_1 = 1.3$			$m_2 = 1.7$		
2x2	0.91050	0.67175	0.53294	0.611	0.457	0.366	0.816	0.650	0.53103			
4x4	0.91009	0.67106	0.53274	0.793	0.589	0.469	0.782	0.599	0.527			
8x8	0.91006	0.67106	0.53271	0.8897	0.6570	0.5216	0.834	0.444	0.46761			
16x16	0.91006	0.67106	0.53271	0.90968	0.67042	0.53227	0.8697	2.59	-1.98			
24x24	0.91006	0.67106	0.53271	0.90964	0.67107	0.52153	0.8863	-0.56	-2.35			
	$a_1 = 1.0$			$b_1 = 0.2$			$m_1 = 1.3$			$m_2 = 1.7$		
2x2	0.23980	0.17233	0.13367	0.085	0.063	0.050	0.123	0.072	0.081			
4x4	0.23966	0.17209	0.13360	0.132	0.096	0.076	0.136	0.064	-0.17			
8x8	0.23963	0.17208	0.13358	0.1898	0.1419	0.1093	0.1332	0.255	-10.6			
16x16	0.23963	0.17208	0.13358	0.1309	0.1347	0.1057	0.1433	-1.26	67.6			
24x24	0.23963	0.17208	0.13358	0.2049	0.1373	-0.56	0.1438	-3.00	-10.4			

Таблица 3. То же, что в табл. 2, но для подобных двух-  
слойных сплюснутых сфероидов

N×N	SVM2, EBCM2			SVM1			EBCM1		
	0.9	$k_1$ 0.7	0.5	0.9	$k_1$ 0.7	0.5	0.9	$k_1$ 0.7	0.5
	$a_1 = 1.0$			$b_1 = 0.9$	$m_1 = 1.3$	$m_2 = 1.7$			
2x2	3.67791	2.85303	2.36709	3.65121	2.83286	2.35075	3.67784	2.85297	2.36707
4x4	3.67787	2.85297	2.36707	3.67764	2.85280	2.36693	3.67787	2.85297	2.36707
8x8	3.67787	2.85297	2.36707	3.67787	2.85297	2.36707	3.67787	2.85297	2.36707
16x16	3.67787	2.85297	2.36707	3.67787	2.85297	2.36707	3.67787	2.85297	2.36707
24x24	3.67787	2.85297	2.36707	3.67787	2.85297	2.36707	3.67787	2.85297	2.36707
	$a_1 = 1.0$			$b_1 = 1/\sqrt{2}$	$m_1 = 1.3$	$m_2 = 1.7$			
2x2	2.70068	2.11972	1.77767	2.49178	1.95916	1.64565	2.69644	2.11874	1.77759
4x4	2.70040	2.11923	1.77752	2.68139	2.10494	1.76574	2.69919	2.11913	1.77751
8x8	2.70039	2.11923	1.77752	2.70021	2.11910	1.77741	2.70019	2.11922	1.77752
16x16	2.70039	2.11923	1.77752	2.70039	2.11923	1.77752	2.70039	2.11923	1.77752
24x24	2.70039	2.11923	1.77752	2.70039	2.11923	1.77752	2.70039	2.11923	1.77752
	$a_1 = 1.0$			$b_1 = 1/(1 + \sqrt{2})$	$m_1 = 1.3$	$m_2 = 1.7$			
2x2	1.38163	1.10872	0.94899	0.827	0.668	0.575	1.187	1.057	0.9442
4x4	1.38092	1.10751	0.94864	1.133	0.913	0.782	1.109	0.927	0.9325
8x8	1.38085	1.10750	0.94859	1.3273	1.0644	0.9107	1.2172	0.426	0.76851
16x16	1.38085	1.10750	0.94859	1.37838	1.10470	0.94631	1.2902	3.17	27.3
24x24	1.38085	1.10750	0.94859	1.37984	1.10737	0.98584	1.3267	24.8	17.3
	$a_1 = 1.0$			$b_1 = 0.2$	$m_1 = 1.3$	$m_2 = 1.7$			
2x2	0.58257	0.47718	0.41625	0.126	0.104	0.091	0.188	0.018	0.067
4x4	0.58208	0.47637	0.41601	0.205	0.169	0.146	0.227	-0.07	-2.9
8x8	0.58195	0.47633	0.41593	0.317	0.253	0.219	0.206	1.01	6.8
16x16	0.58195	0.47633	0.41592	0.462	0.355	0.316	0.211	-1.8	18.5
24x24	0.58195	0.47633	0.41592	0.415	0.793	2.966	0.282	8.4	37.3

Большие и малые полуоси для вытянутых сфероидов связаны с фокусным расстоянием следующим образом:

$$a_j = \frac{d_j}{2} \xi_j^0, \quad b_j = \frac{d_j}{2} \sqrt{(\xi_j^0)^2 - 1}. \quad (125)$$

Для сплюснутых сфероидов имеем

$$a_j = \frac{d_j}{2} \sqrt{(\xi_j^0)^2 + 1}, \quad b_j = \frac{d_j}{2} \xi_j^0. \quad (126)$$

Из приведенных формул (125)–(126) можно найти связь между радиальными координатами и отношениями полуосей:

а) вытянутый сфероид

$$\xi_j^0 = 1/\sqrt{1 - (b_j/a_j)^2}; \quad (127)$$

а) сплюснутый сфероид

$$\xi_j^0 = (b_j/a_j)/\sqrt{1 - (b_j/a_j)^2}. \quad (128)$$

Нетрудно заметить, что для слоистых сфероидов с подобными границами оболочек радиальные координаты  $\xi_j^0$ , определяющие соответствующие уравнения границ (2), одинаковы в соответствующих системах.

В таблицах 2–5 приведены значения поляризуемостей двух- и трехслойных сфероидов с подобными границами слоев, вычисленные с использованием разных подходов. Применялся развитый выше метод расширенных граничных условий с использованием наиболее подходящих сфероидальных базисов (ЕВСМ2), который эквивалентен методу разделения переменных с теми же базисами (SVM2) [10]. Кроме того, поляризуемости вычислялись методами SVM1 [22] и ЕВСМ1 [9], в рамках которых поля представляются в виде разложений по единому сферическому базису. В таблицах указано количество учитываемых слагаемых и размерность матриц с учетом исключения нулевых строк и столбцов, при этом  $2 \times 2$  соответствует софокусному приближению (115), а  $4 \times 4$  – обобщению софокусного приближения (119).

Из приведенных таблиц видно, что с точки зрения сходимости и точности расчетов результаты для вытянутых и сплюснутых сфероидов имеют примерно одинаковый характер как для двухслойных, так и для трехслойных частиц. Отмеченные в статье [23] трудности в рамках методов SVM1 и ЕВСМ1 для сплюснутых сфероидов с отношениями

Таблица 4. Полиризуемости подбных трехслойных  
 выгнутых сферондов для различных значений полу-  
 осей оболочек  $a_1, a_2 = k_1 a_1, a_3 = k_2 a_1$ ;  $m_1, m_2, m_3$  по-  
 казатели преломления оболочек сферонда и ядра со-  
 ответственно

NxN	SVM2, EBCM2			SVM1			EBCM1		
	$k_1, k_2$			$k_1, k_2$			$k_1, k_2$		
	0.9,9:12	0.7,7:12	0.5,5:12	0.9,9:12	0.7,7:12	0.5,5:12	0.9,9:12	0.7,7:12	0.5,5:12
	$a_1 = 1.0 \quad b_1 = 0.9 \quad m_1 = 1.3 \quad m_2 = 1.7 \quad m_3 = 2.42$								
2x2	4.73904	3.31701	2.45168	4.70328	3.29302	2.43485	4.73864	3.31671	2.45160
4x4	4.73871	3.31673	2.45160	4.73840	3.31652	2.45146	4.73871	3.31673	2.45160
8x8	4.73871	3.31673	2.45160	4.73871	3.31673	2.45160	4.73871	3.31673	2.45160
16x16	4.73871	3.31673	2.45160	4.73871	3.31673	2.45160	4.73871	3.31673	2.45160
24x24	4.73871	3.31673	2.45160	4.73871	3.31673	2.45160	4.73871	3.31673	2.45160
	$a_1 = 1.0 \quad b_1 = 1/\sqrt{2} \quad m_1 = 1.3 \quad m_2 = 1.7 \quad m_3 = 2.42$								
2x2	3.23906	2.22235	1.60471	2.99432	2.06184	1.49507	3.22949	2.21887	1.60389
4x4	3.23666	2.22031	1.60414	3.21532	2.20668	1.59488	3.23482	2.21995	1.60402
8x8	3.23665	2.22030	1.60413	3.23646	2.22018	1.60405	3.23641	2.22026	1.60412
16x16	3.23665	2.22030	1.60413	3.23665	2.22030	1.60413	3.23666	2.22030	1.60413
24x24	3.23665	2.22030	1.60413	3.23665	2.22030	1.60413	3.23665	2.22030	1.60413
	$a_1 = 1.0 \quad b_1 = 1/(1 + \sqrt{2}) \quad m_1 = 1.3 \quad m_2 = 1.7 \quad m_3 = 2.42$								
2x2	1.37638	0.90359	0.62021	0.886	0.595	0.419	1.173	0.8376	0.6036
4x4	1.37112	0.89931	0.61904	1.178	0.780	0.542	1.411	0.9016	0.5979
8x8	1.37101	0.89920	0.61889	1.3377	0.8792	0.6055	-1.43	-5.51	0.7384
16x16	1.37101	0.89920	0.61889	1.36989	0.89823	0.61834	-1.09	-2.89	-4.69
24x24	1.37101	0.89920	0.61889	1.37049	0.639	-4.28	-6.96	-17.9	75.4
	$a_1 = 1.0 \quad b_1 = 0.2 \quad m_1 = 1.3 \quad m_2 = 1.7 \quad m_3 = 2.42$								
2x2	0.39745	0.24872	0.16199	0.126	0.083	0.058	0.4496	0.3147	0.1765
4x4	0.39499	0.24688	0.16150	0.203	0.131	0.089	0.095	-1.00	4.08
8x8	0.39488	0.24675	0.16132	0.308	0.2035	0.1313	26.2	-5.29	-3.30
16x16	0.39487	0.24674	0.16132	0.127	0.1967	-0.11	-6.81	8.38	-8.38
24x24	0.39487	0.24674	0.16132	0.204	-1.13	7.56	5.24	-5.76	12.57

Таблица 5. То же, что в табл. 4, но для подобных трех-  
слойных сплюснутых сфероидов

NxN	SVM2, EBCM2			SVM1			EBCM1		
	$k_1, k_2$			$k_1, k_2$			$k_1, k_2$		
	0,9,9:12	0,7,7:12	0,5,5:12	0,9,9:12	0,7,7:12	0,5,5:12	0,9,9:12	0,7,7:12	0,5,5:12
$a_1 = 1.0 \quad b_1 = 0.9 \quad m_1 = 1.3 \quad m_2 = 1.7 \quad m_3 = 2.42$									
2x2	4.82442	3.43345	2.58783	4.78720	3.40794	2.56946	4.82402	3.43316	2.58775
4x4	4.82410	3.43317	2.58775	4.82377	3.43296	2.58759	4.82409	3.43317	2.58775
8x8	4.82410	3.43317	2.58775	4.82410	3.43317	2.58775	4.82410	3.43317	2.58775
16x16	4.82410	3.43317	2.58775	4.82410	3.43317	2.58775	4.82410	3.43317	2.58775
24x24	4.82410	3.43317	2.58775	4.82410	3.43317	2.58775	4.82410	3.43317	2.58775
$a_1 = 1.0 \quad b_1 = 1/\sqrt{2} \quad m_1 = 1.3 \quad m_2 = 1.7 \quad m_3 = 2.42$									
2x2	3.44521	2.49567	1.92043	3.16611	2.29947	1.77483	3.43512	2.49213	1.91965
4x4	3.44292	2.49368	1.91987	3.41779	2.47644	1.90702	3.44088	2.49330	1.91975
8x8	3.44291	2.49368	1.91986	3.44268	2.49352	1.91974	3.44264	2.49363	1.91985
16x16	3.44291	2.49368	1.91986	3.44291	2.49368	1.91986	3.44293	2.49367	1.91986
24x24	3.44291	2.49368	1.91986	3.44291	2.49368	1.91986	3.44292	2.49368	1.91986
$a_1 = 1.0 \quad b_1 = 1/(1 + \sqrt{2}) \quad m_1 = 1.3 \quad m_2 = 1.7 \quad m_3 = 2.42$									
2x2	1.68042	1.25774	1.00517	0.993	0.750	0.606	1.4107	1.1691	0.9859
4x4	1.67552	1.25347	1.00398	1.374	1.034	0.829	1.802	1.308	0.9829
8x8	1.67539	1.25337	1.00382	1.6123	1.2056	0.9641	9.16	7.15	1.262
16x16	1.67539	1.25336	1.00382	1.67177	1.25015	1.00139	13.6	17.4	20.5
24x24	1.67539	1.25336	1.00382	1.67406	1.2702	18.85	15.9	16.9	8.4
$a_1 = 1.0 \quad b_1 = 0.2 \quad m_1 = 1.3 \quad m_2 = 1.7 \quad m_3 = 2.42$									
2x2	0.68159	0.52554	0.43425	0.145	0.113	0.094	1.48	1.15	0.623
4x4	0.67872	0.52304	0.43356	0.243	0.189	0.154	0.647	2.93	2.64
8x8	0.67851	0.52286	0.43330	0.377	0.281	0.229	13.1	4.33	9.94
16x16	0.67850	0.52285	0.43329	0.460	0.392	0.267	-60.7	-0.52	12.6
24x24	0.67850	0.52285	0.43329	0.383	1.90	10.2	27.2	24.61	-16.8

полуосей  $a_j/b_j \geq \sqrt{2}$  связаны с неудачным способом расчета интегралов (96). Использованный ранее алгоритм вычисления этих интегралов в виде рядов по некоторому параметру оказался пригодным для вытянутых частиц, но непригодным для сплюснутых сфероидов с отношениями полуосей  $a_j/b_j \geq \sqrt{2}$ , поскольку в последнем случае данный параметр становился не меньше 1. Непосредственный расчет интегралов с использованием стандартных алгоритмов для функций Лежандра привел к представленным выше результатам.

Сравнивая таблицы 2-3 и 4-5, можно заключить, что результаты для двухслойных и трехслойных частиц схожи, но сходимость и точность расчетов с увеличением числа слоев немного ухудшается.

Как известно, применение единого сферического базиса для слоистых сфероидальных частиц имеет ограничения, которые в рассматриваемом случае имеют вид  $a_j/b_j < \sqrt{2} + 1 \approx 2.41$ . Из таблиц 1 и 3 видно, что при отношениях  $a_j/b_j \leq \sqrt{2}$  хорошо работают все методы. В то время как при  $a_j/b_j = \sqrt{2}$  ЕВСМ1 не дает удовлетворительных результатов, а SVM1 дает неплохие приближенные значения только при учете 8 слагаемых как для двухслойных, так и для трехслойных сфероидов. Различие между ЕВСМ1 и SVM1 заключается в том, что в первом случае интегралы (96) зависят от произведения двух радиальных функций, что приводит к значительно большим вычислительным погрешностям по сравнению со вторым случаем, когда аналогичные интегралы содержат только одну радиальную функцию. В целом, можно сделать вывод о предпочтительности SVM1 по сравнению с ЕВСМ1, однако при  $a_j/b_j \geq \sqrt{2} + 1$  его следует рассматривать как приближенный метод, результаты которого требуется дополнительно проверять. Из таблиц однозначно понятно, что при  $a_j/b_j = 5$  метод SVM1 не годится.

Исследование области применимости методов SVM2 и ЕВСМ2, использующих подходящие сфероидальные базисы, показало, что они дают надежные результаты в широкой области значений параметров сфероидальных частиц. В наших расчетах отношение полуосей вытянутых и сплюснутых слоистых сфероидов менялось от  $a_j/b_j = 1.1(1)$  до  $a_j/b_j = 5$ , при этом относительная доля объема ядра для двухслойных частиц принимала значения от  $V_2/V_1 = 0.729$  до  $V_2/V_1 = 0.125$ . При переходе к трехслойным сфероидам объем ядра двухслойного сфероида разбивался в отношении 0.7 : 1.0, т.е. объемы внутренней

оболочки и ядра в этом случае были сопоставимы. Показатели преломления веществ оболочки и ядра двухслойного сфероида были равны  $m_1 = \sqrt{\varepsilon_1} = 1.3$  и  $m_2 = 1.7$  соответственно, а для трехслойной сфероидальной частицы –  $m_1 = 1.3$ ,  $m_2 = 1.7$  и  $m_3 = 2.42$ .

Из таблиц 2–5 видно, что метод ЕВСМ2, использующий несколько сфероидальных базисов, обладает хорошей сходимостью с увеличением количества  $N$  учитываемых слагаемых в разложениях полей, причем сходимость слабо зависит от параметров задачи. Во всех рассмотренных случаях с увеличением  $N$  от 16 до 24 значение поляризуемости частицы имеет по меньшей мере 6 правильных цифр. Более того, проведенные расчеты показывают, что нет необходимости учитывать большое число слагаемых в разложениях полей. Так софокусное приближение ( $N = 2$ ) имеет относительную погрешность менее  $10^{-5} - 10^{-3}$  для двухслойных сфероидов и  $10^{-4} - 10^{-2}$  для трехслойных. При обобщении данного приближения ( $N = 4$ ) относительная погрешность уменьшается еще на целый порядок. Анализ результатов наших численных расчетов, выполненных для несофокусных сфероидов, не обладающих свойством подобия слоев, приводит в том же выводу, что и для сфероидов с подобными границами слоев. Таким образом, предложенный подход к построению приближения Релея для многослойных несофокусных сфероидов безусловно предпочтительнее подхода, ранее предложенного в работе [24] и основанного на разбиении несофокусных оболочек на большое число тонких слоев, которые далее считались софокусными. Заметим, что сформулированные выше результаты скорее всего остаются справедливыми и для волнового случая.

### Выводы

1. Подробно рассмотрены соотношения, связывающие сферические и сфероидальные гармоники уравнения Лапласа.
2. Найденны новые соотношения, связывающие сфероидальные гармоники уравнения Лапласа в двух разных сфероидальных системах координат с общим центром и осью вращения. Рассмотрены вопросы сходимости бесконечных рядов, описывающих связь сфероидальных гармоник 2-го рода уравнения Лапласа в двух системах. Отмечена аналогия между сфероидальными гармониками уравнения Лапласа и волнового уравнения. Проведены численные расчеты, которые подтвердили теоретические выводы.

3. Используя полученные соотношения, найдено точное решение электростатической задачи для многослойных частиц с несофокусными границами слоев и построено приближение Релея. Теоретически обоснован новый приближенный подход к решению данной задачи, который имеет область применимости, существенно более широкую, чем приближение Релея. Проведены численные расчеты, которые показали высокую точность подхода (ошибки на уровне 0.1–1%).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. Г. Фарафонов, В. Б. Ильин, В. И. Устимов, А. Р. Тулегенов, *Об эллипсоидальной модели для малых несферических частиц*. — *Опт. и спектр.*, **122** (2017), 506–516.
2. В. Г. Фарафонов, В. Б. Ильин, М. С. Прокопьева, А. Р. Тулегенов, В. И. Устимов, *О сфероидальной модели рассеяния света несферическими частицами*. — *Опт. и спектр.*, **126** (2019), 443–449.
3. В. Г. Фарафонов, В. И. Устимов, В. Б. Ильин, М. В. Соколовская, *Эллипсоидальная модель для малых многослойных частиц*. — *Опт. и спектр.*, **124** (2018), 241–249.
4. В. Г. Фарафонов, А. А. Винокуров, С. В. Барканов, *Электростатическое решение и приближение Релея для малых несферических частиц в сфероидальном базисе*. — *Опт. и спектр.*, **111** (2011), 1026–1038.
5. В. Г. Фарафонов, М. В. Соколовская, *Построение приближения Релея для осесимметричных многослойных частиц с использованием собственных функций оператора Лапласа*. — *Зап. научн. семин. ПОМИ*, **409** (2012), 187–211.
6. К. Борен, Д. Хаффмен, *Поглощение и рассеяние света малыми частицами*. М., Мир, 1986.
7. В. Г. Фарафонов, *Рассеяние света многослойными эллипсоидами в релеевском приближении*. — *Опт. и спектр.*, **88** (2000), 441–444.
8. В. Г. Фарафонов, В. Б. Ильин, *О применимости сферического базиса для сфероидальных слоистых рассеивателей*. — *Опт. и спектр.*, **115** (2013), 836–843.
9. В. Г. Фарафонов, В. И. Устимов, М. В. Соколовская, *Условие применимости ЕВСМ для малых многослойных частиц*. — *Опт. и спектр.*, **120** (2016), 470–483.
10. В. Г. Фарафонов, В. И. Устимов, В. Б. Ильин, *Рассеяние света малыми многослойными несофокусными сфероидами с использованием подходящих сфероидальных базисов*. — *Опт. и спектр.*, **125** (2018), 786–794.
11. В. И. Комаров, Л. И. Пономарев, С. Ю. Славянов, *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции*. М., Наука, 1976.
12. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, *Методы теоретической физики*. М., ИЛ, 1958.

13. G. Jansen, *Transformation properties of spheroidal multipole moments and potentials*. — J. Phys. A: Math. Gen., **33** (2000), 1375–1394.
14. В. А. Антонов, А. С. Баранов, *Связь между разложениями внешнего потенциала по шаровым функциям и сфероидальным гармоникам*. — Ж. техн. физ., **72** (2002), 80–82.
15. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*. М., Наука, 1973.
16. В. Г. Фарафонов, *Гипотеза Релея и область применимости метода расширенных граничных условий в электростатических задачах для несферических частиц*. — Опт. и спектр., **117** (2014), 949–962.
17. В. Г. Фарафонов, Н. В. Воцинников, Е. Г. Семенова, *Некоторые соотношения между волновыми сфероидальными и сферическими функциями*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **426** (2014), 203–217.
18. В. Г. Фарафонов, *Дифракция плоской электромагнитной волны на диэлектрическом сфероиде*. — Дифференц. уравн., **19** (1983), 1765–1777.
19. В. В. Климов, *Наноплазмоника*. М., Физматлит, 2009.
20. Г. ван де Хюлст, *Рассеяние света малыми частицами*. ИИЛ, М., 1961.
21. В. Г. Фарафонов, В. И. Устимов, *О свойствах T-матрицы в релеевском приближении*. — Опт. и спектр., **119** (2015), 1020–1032.
22. В. Г. Фарафонов, В. И. Устимов, *Рассеяние света малыми многослойными частицами: обобщенный метод разделения переменных*. — Опт. и спектр., **124** (2018), 255–263.
23. В. Г. Фарафонов, В. И. Устимов, В. Б. Ильин, *Приближение Релея для многослойных несофокусных сфероидов*. — Опт. и спектр., **126** (2019), 450–457.
24. V. G. Farafonov, V. B. Il'in, M. S. Prokopyeva, *Light scattering by multilayered ellipsoidal particles in the quasistatic approximation*. — Meas. Sci. Technol., **13** (2002), 256–62.

Farafonov V. G., Ustimov V. I., Il'in V. B. Relations between spheroidal harmonics and Rayleigh approximation for multilayered nonconfocal spheroids.

The relations between Laplace's spheroidal harmonics related to different spheroidal coordinates are derived. The transition matrices for the functions of the 1st kind are lower triangular and related by inversion. The matrices for the functions of the 2nd kind are the transposed ones for the functions of the 1st kind. The series for the functions of the 1st kind are finite, and those for the 2nd kind are infinite. In the latter case the region of convergence is considered. Using the derived relations, the rigid solution to the electrostatic problem for the multi-layered scatterers with the nonconfocal spheroidal boundaries of the layers is obtained and the Rayleigh approximation is constructed, as well as an approximate approach to a

similar light scattering problem that provides reliable results far beyond the range of applicability of the Rayleigh approximation is suggested.

С.-Петербургский государственный университет      Поступило 15 октября 2019 г.  
аэрокосмического приборостроения,  
ул. Б. Морская, д. 67,  
190000 С.-Петербург, Россия  
*E-mail: far@aanet.ru*  
*E-mail: v1.ust1@ya.ru*

С.-Петербургский государственный университет  
Университетский пр., д. 28,  
198504 С.-Петербург, Россия;  
С.-Петербургский государственный университет  
аэрокосмического приборостроения  
ул. Б. Морская, д. 67;  
Главная (Пулковская) Астрономическая  
обсерватория РАН,  
Пулковское ш., д. 65/1,  
196140 С.-Петербург, Россия  
*E-mail: v.b.ilin@spbu.ru*