Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 483, 2019 г.

**В. В. Суханов**

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА С МЕДЛЕННО ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ ПОТЕНЦИАЛОМ

## §1. Введение

Работа посвящена исследованию решений нестационарного уравнения

$$-i\Phi_t = \mathrm{H}(\varepsilon \mathrm{t})\Phi, \quad \varepsilon \ll 1 \tag{1.1}$$

с оператором H медленно зависящим от времени. Хорошо известны асимптотические формулы описывающие поведение решений уравнения (1.1) в случае, когда спектр оператора  в каждый момент времени является дискретным. Построение асимптотических формул для решения уравнения (1.1) в случае если оператор H имеет непрерывный спектр традиционно основано на адиабатической теореме теории рассеяния (см. [1]). Соответствующая техника, например, хорошо развита в случае, когда оператор H представим в виде суммы

$$\mathrm{H}(\varepsilon \mathrm{t}) = \mathrm{H}_0 + \mathrm{V}(\varepsilon \mathrm{t}), \tag{1.2}$$

где оператор $\mathrm{H}_0$ от t не зависит. В случае быстро убывающего потенциала, в старшем порядке асимптотические формулы для решений уравнения (1.1) строятся так, как если бы оператор  от времени не зависел и определяются только значением оператора  в начальный момент времени, см. [3] и [2]. В настоящей работе используется другой подход не зависящий от адиабатической теоремы теории рассеяния. В качестве модели выбран одномерный оператор Дирака (в самосопряженном случае) на всей оси с быстро убывающим потенциалом

$$\mathrm{H}(\mathrm{t}) = \mathrm{i}\sigma_3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} + \begin{pmatrix} 0 & p \\ \overline{p} & 0 \end{pmatrix}.$$

*Ключевые слова*: нестационарный оператор Дирака, медленная зависимость от времени, адиабатическая теорема теории рассеяния, спектральная теория оператора Дирака, асимптотика решений.

Исследование автора поддержано грантом РНФ No. 17-11-01126.

В этом случае оператор имеет двукратный непрерывный спектр на оси и не имеет дискретного спектра. В качестве основного асимптотического анзатца для решения уравнения (1.1) выбрано разложение по собственным функциям непрерывного спектра оператора H(t) в данный момент времени.

Во втором параграфе мы приведем основные сведения из спектральной теории оператора Дирака. Третий параграф посвящен построению формального решения нестационарного уравнения Дирака. В четвертом параграфе мы докажем, что построенные формальные решения являются асимптотическими разложениями точных решений задачи Коши для нестационарного уравнения Дирака. Наконец, в пятом параграфе, мы сравним полученные результаты с результатами, возникающими в рамках подхода, связанного с адиабатической теоремой теории рассеяния.

## §2. Необходимые сведения из спектральной теории для оператора Дирака

Для анализа решений уравнения (1.1) нам потребуются некоторые сведения из спектральной теории для оператора Дирака (см. [4]). Рассмотрим оператор Дирака на всей оси с быстро убывающим потенциалом

$$\mathrm{H} = \mathrm{i}\sigma_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} + \begin{pmatrix} 0 & p(x) \\ \overline{p(x)} & 0 \end{pmatrix}, \quad p(x) \in S(-\infty,+\infty).$$

Здесь $\mathrm{S}(-\infty,+\infty)$ - класс Шварца. Фиксируем решения $\Psi(x)$ и $\widetilde{\Psi}(x)$ спектрального уравнения

$$\mathrm{H}\Phi = \lambda\Phi, \quad \Phi \in \mathrm{Mat}(2\times 2), \tag{2.1}$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$\Psi(x,\lambda) = \exp(-i\sigma_3\lambda x) + o(1), x \to +\infty,$$
$$\widetilde{\Psi}(x,\lambda) = \exp(-i\sigma_3\lambda x) + o(1), x \to -\infty.$$

Из анализа подходящих интегральных уравнений Вольтерра для решений $\Psi(x,\lambda)$ и $\widetilde{\Psi}(x,\lambda)$ легко получить следующую лемму (см. [4]).

**Lemma 2.1.** *Решения $\Psi(x)$ и $\widetilde{\Psi}(x)$ существуют и единственны. Они являются бесконечно дифференцируемыми функциями от $x$ и $\lambda$ и* *имеют следующие пределы*

$$\Psi(x,\lambda) = \exp(-i\sigma_3\lambda x)\begin{pmatrix} a(\lambda) & \overline{b(\lambda)} \\ b(\lambda) & \overline{a(\lambda)} \end{pmatrix} + o(1), \quad x \to -\infty,$$

$$\widetilde{\Psi}(x,\lambda) = \exp(-i\sigma_3\lambda x)\begin{pmatrix} \overline{a(\lambda)} & -\overline{b(\lambda)} \\ -b(\lambda) & a(\lambda) \end{pmatrix} + o(1), \quad x \to +\infty.$$

*Коэффициенты $a$ и $b$ удовлетворяют следующим условиям:*

$$a(\lambda) = 1 + \widetilde{a}(\lambda);\ \widetilde{a}, b \in S(-\infty,+\infty),$$
$$|a|^2 = |b|^2 + 1.$$

Обозначим через $\boldsymbol{\Psi}_1, \boldsymbol{\Psi}_2$ и $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_2$ вектор-функции, которые являются столбцами матриц $\Psi$ и $\widetilde{\Psi}$

$$\Psi = (\boldsymbol{\Psi}_1, \boldsymbol{\Psi}_2), \widetilde{\Psi} = (\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_1, \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_2).$$

Оператор H обладает двукратным непрерывным спектром на всей оси. Вектор-функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$, определенные равенствами

$$\mathbf{f} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_1}{\overline{a}}, \quad \mathbf{g} = \frac{\boldsymbol{\Psi}_2}{\overline{a}}$$

можно рассматривать как собственные функции непрерывного спектра оператора $H$, в частности

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda(\mathbf{f}(x,\lambda)\overline{\mathbf{f}^\top(y,\lambda)} + \mathbf{g}(x,\lambda)\overline{\mathbf{g}^\top(y,\lambda)}) = 2I\pi\delta(x-y),$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ обладают следующими асимптотическими свойствами:

$$\mathbf{f}(x,\lambda,\tau) = \exp(-i\sigma_3\lambda x)\begin{pmatrix} 1/\overline{a} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{o}(1), \quad x \to -\infty, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{f}(x,\lambda,\tau) = \exp(-i\sigma_3\lambda x)\begin{pmatrix} 1 \\ -b/\overline{a} \end{pmatrix} + \mathbf{o}(1), \quad x \to +\infty, \tag{2.3}$$

$$\mathbf{g}(x,\lambda,\tau) = \exp(-i\sigma_3\lambda x)\begin{pmatrix} \overline{b}/\overline{a} \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{o}(1), \quad x \to -\infty, \tag{2.4}$$

$$\mathbf{g}(x,\lambda,\tau) = \exp(-i\sigma_3\lambda x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\overline{a} \end{pmatrix} + \mathbf{o}(1), \quad x \to +\infty, \tag{2.5}$$

Введем в рассмотрение пространство вектор-функций $S_0$

$$\mathbf{c} \in S_0 \longleftrightarrow \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}; \quad c_1, c_2 \in S(-\infty, +\infty).$$

Преобразование задаваемое $F_0$ функциями $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ на пространстве $S_0$

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) \\ d_2(\lambda) \end{pmatrix} = F_0 \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{f}^\top(x,\lambda)} \\ \overline{\mathbf{g}^\top(x,\lambda)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}$$

обладает свойствами, аналогичными преобразованию Фурье. В частности, оно сохраняет пространство $S_0$, а формула для обратного преобразования имеет вид

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = F_0^{-1} \begin{pmatrix} d_1(\lambda) \\ d_2(\lambda) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda (\mathbf{f}(x,\lambda), \mathbf{g}(x,\lambda)) \begin{pmatrix} d_1(\lambda) \\ d_2(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$\mathrm{H}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{h}(x)$$

можно найти в терминах функций $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$

$$\mathbf{v}(x) = \int\limits_0^x dy K_\lambda(x,y)\mathbf{h}(y) + d_1\mathbf{f} + d_2\mathbf{g}.$$

Здесь $d_1$ и $d_2$-произвольные коэффициенты, а $K_\lambda(x,y)$-матрица $2 \times 2$

$$K_\lambda(x,y) = \begin{cases} \mathbf{g}(x)(\widetilde{\psi}_{21}(y), \widetilde{\psi}_{11}(y)), & x > 0 \\ \mathbf{f}(x)(\psi_{22}(y), \psi_{12}(y)), & x < 0 \end{cases}$$

## §3. Формальное решение нестационарного уравнения Дирака

Рассмотрим решение задачи Коши для нестационарного уравнения Дирака

$$-i\mathbf{\Phi}_t = \mathrm{H}(\tau)\mathbf{\Phi}, \;\; \tau = \varepsilon t, \;\; \varepsilon \ll 1 \tag{3.1}$$
$$\mathbf{\Phi}|_{t=o} = \mathbf{\Phi}_0(x).$$

Здесь $\mathbf{\Phi}(x,t)$ – вектор-функция с двумя компонентами, $\mathrm{H}(\tau)$-оператор Дирака

$$\mathrm{H}(\tau) = \mathrm{i}\sigma_3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} + \begin{pmatrix} 0 & p(x,\tau) \\ \overline{p(x,\tau)} & 0 \end{pmatrix}, \;\; \tau = \varepsilon t,$$

$$p(x,\tau) \in C^{\infty}((-\infty,+\infty) \times [0,\tau_0]),$$
$$\mathbf{\Phi}_0(x) \in S_0, \quad \partial_\tau^j p(\bullet,\tau) \in S(-\infty,+\infty), j=0,1,2,...$$

$\sigma_3$ -матрица Паули.

Будем строить формальное решение задачи Коши (3.1) на промежутке $\tau \in [0,\tau_0]$ в виде разложения

$$\widehat{\mathbf{\Phi}}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \exp(i\lambda t) \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \mathbf{F}_l(x,\lambda,\tau). \tag{3.2}$$

**Теорема 3.1.** *Задача Коши* (3.1) *имеет единственное формальное решение вида* (3.2), *обладающее следующими свойствами*:

$$\mathbf{F}_l(x,\lambda,\tau) \in C^{\infty}((-\infty,+\infty) \times (-\infty,+\infty) \times [0,\tau_0]), \quad \partial_\tau^j \mathbf{F}_l(x,\bullet,\tau) \in S_0$$

$$\mathbf{F}_l = \exp(-i\sigma_3\lambda x) \begin{pmatrix} P_l(x,\lambda,\tau) \\ p_l^0(\lambda) \end{pmatrix} + \mathbf{o}(1), \quad x \to -\infty, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{F}_l = \exp(-i\sigma_3\lambda x) \begin{pmatrix} q_l^0(\lambda) \\ Q_l(x,\lambda,\tau) \end{pmatrix} + \mathbf{o}(1), \quad x \to +\infty. \tag{3.4}$$

*Здесь $P_l$ и $Q_l$ -полиномы по $x$*

$$P_l = \sum_{m=0}^{l} p_{lm}(\tau,\lambda) x^m, \quad Q_l = \sum_{m=0}^{l} q_{lm}(\tau,\lambda) x^m,$$

*с гладкими коэффициентами*

$$\partial_\tau^j p_{lm}(\tau,\bullet) \in S(-\infty,+\infty), \partial_\tau^j q_{lm}(\tau,\bullet) \in S(-\infty,+\infty), j=0,1,2,\dots,$$

*а $p_l^0(\lambda)$ и $q_l^0(\lambda)$ - гладкие функции из класса Шварца не зависящие от $\tau$ и $x$.*

Для доказательства теоремы подставим ряд (3.2) в уравнение (3.1). Приравняем члены при одинаковых степенях $\varepsilon$. Легко видеть, что коэффициенты ряда (3.2) удовлетворяют рекуррентной системе соотношений

$$-i(\mathbf{F}_l)_\tau = (\mathrm{H}(\tau) - \lambda)\mathbf{F}_{l+1}.$$

В старшем порядке получим

$$(\mathrm{H}(\tau) - \lambda)\mathbf{F}_0(x,\lambda,\tau) = 0.$$

Таким образом, функция $\mathbf{F}_0(x,\lambda,\tau)$ является решением спектрального уравнения (2.1). Произвольное решение спектрального уравнения может быть представлено в виде

$$\mathbf{F}_0(x,\lambda,\tau) = d_1^0(\lambda,\tau)\mathbf{f}(x,\lambda,\tau) + d_2^0(\lambda,\tau)\mathbf{g}(x,\lambda,\tau).$$

Для того чтобы определить функции $d_1^0(\lambda,\tau)$ и $d_2^0(\lambda,\tau)$, используем условия (3.3) и (3.4). С учетом асимптотических свойств (2.2)–(2.5) решений $\mathbf{f}(x,\lambda,\tau)$ и $\mathbf{g}(x,\lambda,\tau)$ получим

$$(d_1^0)_\tau = 0, \quad (d_2^0)_\tau = 0.$$

Наконец, из начального условия задачи Коши (3.1) окончательно имеем

$$\begin{pmatrix} d_1^0 \\ d_2^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{f}^\top(x,\lambda,0)} \\ \mathbf{g}^\top(x,\lambda,0) \end{pmatrix} \mathbf{\Phi}_0(x).$$

Далее выполнение теоремы можно увидеть с помощью метода математической индукции. Пусть утверждение теоремы выполнено для всех $l \leqslant N$. В частности, отсюда следует, что

$$\frac{\partial \mathbf{F}_N(y,\lambda,\tau)}{\partial\tau} = \exp(-i\sigma_3\lambda x)\begin{pmatrix} \widetilde{P}_N(x,\lambda,\tau) \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{o}(1), \quad x \to -\infty, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_N(y,\lambda,\tau)}{\partial\tau} = \exp(-i\sigma_3\lambda x)\begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{Q}_N(x,\lambda,\tau) \end{pmatrix} + \mathbf{o}(1), \quad x \to +\infty. \tag{3.6}$$

Здесь

$$\widetilde{P}_l(x,\lambda,\tau) = \frac{\partial P_l}{\partial\tau}, \quad \widetilde{Q}_l(x,\lambda,\tau) = \frac{\partial Q_l}{\partial\tau}.$$

При $l = N+1$ получим

$$\mathbf{F}_{N+1}(x,\lambda,\tau) = -i\int\limits_0^x dy K_\lambda(x,y,\tau)\frac{\partial \mathbf{F}_N(y,\lambda,\tau)}{\partial\tau} + \tag{3.7}$$

$$+ d_1^{N+1}(\lambda,\tau)\mathbf{f}(x,\lambda,\tau) + d_2^{N+1}(\lambda,\tau)\mathbf{g}(x,\lambda,\tau).$$

Здесь $K_\lambda(x,y,\tau)$ -матричная функция, построенная по функциям $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ в момент времени $\tau$

$$K_\lambda(x,y,\tau) = \begin{cases} \mathbf{g}(x,\lambda,\tau)(\widetilde{\psi}_{21}(y,\lambda,\tau), \widetilde{\psi}_{11}(y,\lambda,\tau)), & x > 0 \\ \mathbf{f}(x,\lambda,\tau)(\psi_{22}(y,\lambda,\tau), \psi_{12}(y,\lambda,\tau)), & x < 0 \end{cases}$$

Рассмотрим асимптотическое поведение функции $\mathbf{F}_{N+1}(x,\lambda,\tau)$ при $x \to -\infty$. Подставим формулы (2.2) и (2.4), описывающие асимптотическое поведение функций $\mathbf{f}(x,\lambda,\tau)$ и $\mathbf{g}(x,\lambda,\tau)$ , а также асимптотику (3.5) производной функции $\mathbf{F}_N$ в соотношение (3.7). Нетрудно видеть, что интеграл, стоящий в правой части равенства обладает асимптотическим поведением следующего вида

$$-i\int\limits_0^x dyK_\lambda(x,y,\tau)\frac{\partial \mathbf{F}_N(y,\lambda,\tau)}{\partial\tau}=\exp(-i\sigma_3\lambda x)\begin{pmatrix}\widehat{P}_{N+1}(x,\lambda,\tau)\\ \widehat{p}_{N+1}(\lambda,\tau)\end{pmatrix}+\mathbf{o}(1),$$

при $x\to-\infty$, где $\widehat{P}_{N+1}(x,\lambda,\tau)$ - подходящий полином по $x$ степени $N+1$, а $\widehat{p}_{N+1}(\lambda,\tau)$ - коэффициент не зависящий от $x$. Тогда

$$\mathbf{F}_{N+1}(x,\lambda,\tau)=\exp(-i\sigma_3\lambda x)\left[\begin{pmatrix}\widehat{P}_{N+1}(x,\lambda,\tau)\\ \widehat{p}_{N+1}(\lambda,\tau)\end{pmatrix}\right.$$
$$\left.+\,d_1^{N+1}\begin{pmatrix}1/\overline{a}\\ 0\end{pmatrix}+d_2^{N+1}\begin{pmatrix}\overline{b}/\overline{a}\\ 1\end{pmatrix}\right]+\mathbf{o}(1),\quad x\to-\infty.$$

Отсюда используя соотношение (3.3) можно найти коэффициент $d_2^{N+1}$ с точностью до одной неизвестной постоянной (по $\tau$ ) величины

$$d_2^{N+1}(\lambda,\tau)=-\widehat{p}_{N+1}(\lambda,\tau)+p^0_{N+1}(\lambda).$$

Совершенно аналогично, рассматривая асимптотическое поведение функции $\mathbf{F}_{N+1}(x,\lambda,\tau)$ при $x\to+\infty$, находится коэффициент $d_1^{N+1}$. Для отыскания недостающих констант можно использовать начальное условие задачи Коши

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda\mathbf{F}_{N+1}(x,\lambda,0)=0.$$

В итоге, получим

$$\begin{pmatrix}q^0_{N+1}(\lambda)\\ p^0_{N+1}(\lambda)\end{pmatrix}=F_0^{-1}(0)\Big[i\int\limits_0^x dyK_\lambda(x,y,0)\frac{\partial \mathbf{F}_N(y,\lambda,\tau)}{\partial\tau}|_{\tau=0}$$
$$+\,\widehat{p}_{N+1}(\lambda,0)\mathbf{f}(x,\lambda,0)+\widehat{q}_{N+1}(\lambda,0)\mathbf{g}(x,\lambda,0)].$$

Здесь $F_0^{-1}(0)$ - преобразование построенное по формуле (2.6) с функциями $\mathbf{f}(x,\lambda,\tau)$ и $\mathbf{g}(x,\lambda,\tau)$ в момент времени $\tau=0$. Таким образом, мы видим, что существует единственная функция $\mathbf{F}_{N+1}(x,\lambda,\tau)$ обладающая нужными свойствами. На этом будем считать теорему доказанной.

## §4. Оценки формального решения

Введем в рассмотрение отрезок ряда (3.2)

$$\mathbf{\Phi}_N(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \exp(i\lambda t) \sum_{l=0}^{N} \varepsilon^l \mathbf{F}_l(x,\lambda,\tau)$$

и соответствующую ему невязку в уравнении (3.1)

$$\Delta\mathbf{\Phi}_N(x,t) = -i\frac{\partial\mathbf{\Phi}_N}{\partial t} - \mathrm{H}(\tau)\mathbf{\Phi}_N = -i\varepsilon^{N+1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \exp(i\lambda t) \frac{\partial \mathbf{F}_N(y,\lambda,\tau)}{\partial\tau}$$

**Теорема 4.1.** *Невязка* $\Delta\mathbf{\Phi}_N(x,t)$ *удовлетворяет следующим оценкам*

$$\Delta\mathbf{\Phi}_N(x,t) \in C^\infty((-\infty,+\infty),[0,\tau_0]),$$
$$\|\Delta\mathbf{\Phi}_N(x,t)\|_{klm} = O(\varepsilon^{N+1}).$$

*Здесь*

$$\|\mathbf{F}(x,t)\|_{lkm} = \sum_{i=1,2}\sum_{l'=0}^{l}\sum_{k'=0}^{k}\sum_{m'=0}^{m}\max_{x,\tau}\left|\frac{\partial^{l'+k'}F_i}{\partial^{l'}x\partial^{k'}t}(|x|^m+1)\right|$$

Доказательство этой теоремы является прямым следствием конструкции формального решения $\mathbf{\Phi}_N(x,t)$.

**Теорема 4.2.** *Формальный ряд* $\widehat{\mathbf{\Phi}}$ *является асимптотическим разложением точного решения* $\mathbf{\Phi}$ *задачи Коши* (1.2) *для* $\tau\in[0,\tau_0]$. *Выполнены следующие оценки*

$$\forall k,l,m \quad \|\mathbf{\Phi}-\mathbf{\Phi}_N\|_{lkm} = O(\varepsilon^{N+1})$$

Введем в рассмотрение точное решение $\mathbf{\Phi}$ задачи Коши (3.1)

$$-i\mathbf{\Phi}_t = \mathrm{H}(\tau)\mathbf{\Phi}, \quad \tau=\varepsilon t,$$
$$\mathbf{\Phi}|_{t=o} = \mathbf{\Phi}_0(x).$$

Это решение мы можем рассматривать как результат действия действия оператора $M(t)$ на начальные данные задачи Коши

$$\mathbf{\Phi}(t) = M(t)\mathbf{\Phi}_0.$$

Оператор $H(\tau)$ формально самосопряженный в $L_2(-\infty,+\infty)$. Таким образом оператор $M(t)$ можно считать изометрическим в $L_2(-\infty,+\infty)$. Рассмотрим функцию

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}_N.$$

Она удовлетворяет неоднородному уравнению

$$-i\frac{\partial \mathbf{X}_N}{\partial t} - \mathrm{H}(\tau)\mathbf{X}_N = \Delta\mathbf{\Phi}_N \qquad (4.1)$$

Мы можем вычислить решение этого уравнения с помощью оператора $M(t)$

$$\mathbf{X}_N(\lambda, t) = iM(t)\int\limits_0^t dt' M^{-1}(t')\Delta\mathbf{\Phi}_N(t')$$

Из этого соотношения мы можем получить оценку для нормы функции $\mathrm{X}_N$

$$\|\mathrm{X}_N\|_{L_2(-\infty,+\infty)} \leqslant t \max_{t'\in[0,t]} \|\Delta\mathbf{\Phi}_N(t')\|_{L_2(-\infty,+\infty)}.$$

Для того, чтобы получить оценки для производной $\frac{\partial \mathrm{X}_N}{\partial x}$ продифференцируем уравнение (4.1)

$$-i\frac{\partial^2 \mathbf{X}_N}{\partial t\partial x} - \mathrm{H}(\tau)\frac{\partial \mathbf{X}_N}{\partial x} = \frac{\partial(\Delta\mathbf{\Phi}_N)}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & p_x(x,\tau) \\ \overline{p_x(x,\tau)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь мы имеем неоднородное уравнение для $\frac{\partial \mathrm{X}_N}{\partial x}$. Оценки для него можно получить аналогично, как для уравнения (4.1). Похожим образом возникают оценки для производных $\frac{\partial \mathrm{X}_N}{\partial t}$, а также для произведений $\mathrm{X}_N x^l$. На этом будем считать теорему доказанной.

## §5. Асимптотическое поведение решения при больших временах

В старшем порядке построенное нами решение при $\varepsilon \to 0$ имеет вид

$$\mathbf{\Phi}(x,t) \cong \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \exp(i\lambda t)(\mathbf{f}(x,\lambda,\tau), \mathbf{g}(x,\lambda,\tau))$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{f}^\top(y,\lambda,0)} \\ \overline{\mathbf{g}^\top(y,\lambda,0)} \end{pmatrix} \mathbf{\Phi}_0(y).$$

Легко видеть, что при $t \gg 1$ внешний интеграл, стоящий в правой части содержит большой параметр и, следовательно, может быть вычислен с помощью подходящих асимптотических методов. При $t \gg 1$ интеграл становится асимптотически малым, если $x$ ограничено. При $x \to \pm\infty$ можно использовать асимптотики (2.2)–(2.5) решений $\mathbf{f}(x,\lambda,\tau)$ и

$\mathbf{g}(x,\lambda,\tau)$. Вклад в асимптотику решения дадут только члены решения, которые содержат экспоненту $\exp(i\lambda t)\exp(-i\lambda x)$ при $x\to\infty$ или экспоненту $\exp(i\lambda t)\exp(i\lambda x)$ при $x\to-\infty$. В итоге, получим

$$\mathbf{\Phi}(x,t)\cong\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\lambda\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{i\lambda t-i\lambda x} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i\lambda t+i\lambda x}}\end{pmatrix}$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dy\left(\frac{\overline{\mathbf{f}^{\top}(y,\lambda,0)}}{\mathbf{g}^{\top}(y,\lambda,0)}\right)\mathbf{\Phi}_0(y)+\mathbf{o}(1).$$

В частности, легко видеть что решение полностью определяется значением оператора $\mathrm{H}(\tau)$ в начальный момент времени. Этот результат естественно согласован с результатами, полученными из адиабатической теоремы теории рассеяния.

## Список литературы


1. J. D. Dollard, *Adiabatic switching in the Shroedinger theory of scattering.* — J. Math. Phys. **7** (1966), 802–810.
2. G. Nenciu, *On the adiabatic limit for Dirac particles in external fields.* — Com. Math. Phys. **76** (1980), 117–128.
3. A. Martinez, Sh. Nakamura, *Adiabatic limit and scattering.* — C. R. Acad. Sci. Paris ser I Math. **318**, No. 12, 1153–1158.
4. Л. А. Тахтаджан, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.


Sukhanov V. V. Asymptotic behavior of the solutions of nonstationary Dirac equation with the potential slowly depending on time.

The asymptotic behavior of the solutions of the Cauchy problem for the non-stationary Dirac equation with a time-dependent potential is studied. The construction of asymptotic solutions is based on the spectral decomposition of the solution at a given time. The adiabatic theorem of scattering theory is not used.

С.-Путербургский
государственный университет, НИИФ,
Ульяновская ул., 1,
Петродворец, 198904, С.-Петербург,
Россия
*E-mail*: vvsukhanov@mail.ru

Поступило 21 октября 2019 г.