Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 483, 2019 г.

М. В. Перель

КВАЗИФОТОНЫ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО 2D УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

§1. Введение

Решения $(2+1)$-мерного уравнения Дирака применяются для описания волновой функции фермиона (электрона или дырки) в графене. Квазиклассическому описанию решений стационарного уравнения Дирака для фермиона в графене, помещенного во внешнее неоднорородное электрическое и магнитное поле, посвящены многочисленные исследования [1–6]. Исследовано туннелирование и связанные с ним эффекты для частицы, падающей под разными углами на одномерный потенциальный барьер [3, 4], построены квазиклассические решения в случае двумерно-неоднородных полей [1,2,5,6], найдены гауссовы пучки [2, 6]. При этом использовался математический аппарат лучевого метода [7] и метода Маслова [8].

В настоящей работе изучаются нестационарные решения $(2+1)$-мерного уравнения Дирака в квазиклассическом приближении с помощью пространственно-временного лучевого метода [9]. Получены формулы для нестационарных решений задачи Коши для этого уравнения как с быстро осциллирующими, так и с сильно локализованными начальными данными. Во втором случае решение представляет собой волновой пакет, экспоненциально локализованный около точки, бегущей вдоль квазиклассической траектории. Такие решения впервые были построены в работах [10] (для уравнения Шредингера) и [11] (для волнового уравнения), где был введен термин *квазифотон*. Независимо эти решения были получены в [12] и названы гауссовскими пучками (Gaussian beams). Затем эти решения были описаны более удобным образом в [13] и [14]. Заметим, что построение квазифотонов, а также локализованных решений волнового уравнения в однородной среде [15, 16], позволило получить решения различных задач для волнового уравнения в виде суперпозиции таких решений, см., например,

Ключевые слова: уравнение Дирака, квазифотон, квазиклассическое приближение, локализованное решение, гауссовские волновые пакеты.

Работа поддержана грантом РФФИ No. 17-02-00217.

[17–22]. Построенные решения для $(2+1)$-мерного уравнения Дирака могут быть использованы аналогичным образом.

§2. Постановка задачи

Изучаются решения $(2+1)$-мерного уравнения Дирака:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\vec{\psi}=\widehat{H}(\widehat{\vec{p}},\vec{r})\vec{\psi},$$

где $\widehat{H}(\widehat{\vec{p}},\vec{r})$ – гамильтониан, $\widehat{\vec{p}}=-i\hbar\nabla$ – оператор импульса, $\vec{r}\in\mathbb{R}^2$– пространственные переменные, t – время, $\vec{\psi}$ – двухкомпонентный вектор, описывающий волновую функцию фермиона (электрона или дырки) в графене, $m(\vec{r})$ – масса фермиона. Мы допускаем наличие переменного внешнего электрического $\vec{\mathcal{E}}$ и магнитного полей $\vec{\mathcal{H}}$. Гамильтониан задается формулой

$$\begin{aligned}\widehat{H}(\widehat{\vec{p}},\vec{r})&=v_F\widehat{\vec{\sigma}}\cdot\widehat{\vec{\pi}}+m(\vec{r})\widehat{\sigma}_3+U(\vec{r}),\\ \widehat{\vec{\pi}}\equiv\widehat{\vec{p}}-\frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r}),&\quad\widehat{\vec{\sigma}}\cdot\widehat{\vec{\pi}}=\widehat{\sigma}_1\widehat{\pi}_1+\widehat{\sigma}_2\widehat{\pi}_2,\end{aligned}\tag{1}$$

где внешние поля определяются по скалярному потенциалу $U(\vec{r})$ и векторному потенциалу $\vec{A}(\vec{r})$ следующим образом:

$$\vec{\mathcal{E}}=-\nabla U,\quad\vec{\mathcal{H}}=\nabla_{\vec{r}}\times\vec{A}.$$

Мы полагаем в дальнейшем, что все переменные безразмерны, а постоянные, характеризующие скорость света c, заряд электрона e и скорость Ферми v_F, полагаются равными единице. В определении гамильтониана (1) используются обозначения

$$\widehat{\sigma}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad\widehat{\sigma}_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad\widehat{\sigma}_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

для матриц Паули.

В дальнейшем мы предполагаем, что $\hbar\ll1$ и строим асимптотические разложения решений при этом предположении. Прежде всего, мы получим формулы пространственно-временного лучевого метода [9] для $(2+1)$-мерных уравнений Дирака, на которых основано построение частицеподобных решений. Аналогичные формулы для стационарного случая выведены в [6].

§3. Пространственно-временной лучевой метод для уравнения Дирака

Перепишем рассматриваемые уравнения для двухкомпонентного вектора $\vec{\psi} = \vec{\psi}(\vec{r}, t)$, $\vec{r} = (x_1, x_2)$, в виде

$$-i\hbar \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} - i\hbar \widehat{\sigma}_1 \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_1} - i\hbar \widehat{\sigma}_2 \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x_2} = \widehat{B}(\vec{r})\vec{\psi}, \qquad (2)$$

где

$$\widehat{B}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -U - m & A_1 - iA_2 \\ A_1 + iA_2 & -U + m \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

$U = U(\vec{r})$, $m = m(\vec{r})$, $A_j = A_j(\vec{r})$, $j = 1, 2$.

Ищем решение в виде:

$$\vec{\psi}(\vec{r}, t) = e^{\frac{i}{\hbar} S(\vec{r}, t)} \sum_{n=0}^{\infty} (-i\hbar)^n \vec{\Phi}^{(n)}(\vec{r}, t), \qquad (4)$$

где $S(\vec{r}, t)$, $\vec{\Phi}^{(n)}(\vec{r}, t)$ – неизвестные гладкие функции. Подставляя этот анзац в уравнение (2) и приравнивая коэффициенты при равных степенях $\hbar$, получаем рекуррентную систему:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{\nabla} S \cdot \widehat{\vec{\sigma}} - \widehat{B}(\vec{r}, t) \right) \vec{\Phi}^{(0)} = 0. \qquad (5)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{\nabla} S \cdot \widehat{\vec{\sigma}} - \widehat{B}(\vec{r}, t) \right) \vec{\Phi}^{(k+1)} = i \frac{\partial \vec{\Phi}^{(k)}}{\partial t} + i \widehat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\nabla} \vec{\Phi}^{(k)}, \qquad (6)$$

$k \geqslant 0$.

Обратимся к уравнению нулевого приближения (5), которое представляет собой систему алгебраических уравнений относительно $\vec{\Phi}^{(0)}$. Оно имеет нетривиальное решение, если определитель из коэффициентов при неизвестных обращается в нуль. Это условие дает уравнение:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} + U(\vec{r})\right)^2 - m^2 = \left(A_1 - \frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \left(A_2 - \frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2,$$

откуда выводятся два уравнения Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + h_{\pm}(\vec{p}, \vec{r}) = 0, \quad \vec{p} \equiv \vec{\nabla} S, \qquad (7)$$

$$h_{\pm}(\vec{p}, \vec{r}) = U(\vec{r}) \pm \sqrt{m^2(\vec{r}) + (\vec{p} - \vec{A})^2}. \qquad (8)$$

Решения этого уравнения, квазиклассические действия, обозначим через $S_{\pm}$. Метод решения уравнения Гамильтона–Якоби описан в [9] и [8].

Для его применения необходимо решить каноническую систему уравнений Гамильтона,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial h_\pm}{\partial \vec{p}}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial h_\pm}{\partial \vec{r}}, \tag{9}$$

при некоторых начальных условиях. Эти условия находятся по начальным условиям для функции $S_\pm$,

$$S_\pm(\vec{r}, 0) = S_0(\vec{r}), \tag{10}$$

следующим образом:

$$\vec{r}(0) = \vec{a}, \quad \vec{p}(0) = \vec{\nabla}\, S_0(\vec{r})\big|_{\vec{r}=\vec{a}}\,. \tag{11}$$

Обозначим решения системы (9) с начальными условиями (11)

$$\vec{r} = \vec{r}_\pm(t, \vec{a}), \quad \vec{p} = \vec{p}_\pm(t, \vec{a}). \tag{12}$$

Кривые в фазовом пространстве $(\vec{r}, \vec{p}) \in \mathbb{R}^4$, которые пробегают эти решения при фиксированном $\vec{a}$ при изменении t называются бихарактеристиками, а проекции этих кривых на координатное пространство называются квазиклассическими траекториями. Мы предполагаем, что в некоторой области изменения t и $\vec{r}$ существует обратная функция $\vec{a} = \vec{a}_\pm(t, \vec{r})$.

Если бихарактеристики известны, решение строится по формуле

$$S_\pm(\vec{r}, t) = S(\vec{r}_0(\vec{a})) + \int\limits_0^t \vec{p}_\pm(t', \vec{a}), d\vec{r}_\pm(t', \vec{a}), \tag{13}$$

где $\vec{a}$ фиксировано и задает бихарактеристику, а затем учитывается, что $\vec{a}$ является функцией t и $\vec{r}$.

Итак, считаем, что функция $S_\pm(\vec{r})$, являющаяся решением уравнения Гамильтона–Якоби, найдена. В этом случае, уравнение (5) разрешимо. Его решение находится с точностью до умножения на скалярную функцию $c_\pm(\vec{r}, t)$:

$$\vec{\Phi}_\pm^{(0)}(\vec{r}, t) = c_\pm(\vec{r}, t)\vec{\varphi}_\pm(\vec{r}, t). \tag{14}$$

Здесь

$$\vec{\varphi}_\pm = \begin{pmatrix} \frac{\partial S_\pm}{\partial x_1} - A_1 - i(\frac{\partial S_\pm}{\partial x_2} - A_2) \\ -\frac{\partial S_\pm}{\partial t} - U(\vec{r}) - m(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

есть некоторое решение однородной алгебраической системы уравнений (5).

Неизвестная на этом этапе функция $c_\pm(\vec{r},t)$ находится из условия разрешимости уравнения первого приближения, имеющего вид:

$$\left(\vec{\varphi}_\pm, \left(\frac{\partial \vec{\Phi}^{(0)}_\pm}{\partial t} + \widehat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{\nabla}\vec{\Phi}^{(0)}_\pm\right)\right) = 0.$$

Это уравнение можно записать в виде:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial c_\pm}{\partial t}\|\vec{\varphi}_\pm\|^2 + \frac{\partial c_\pm}{\partial x_1}(\vec{\varphi}_\pm, \widehat{\sigma}_1\vec{\varphi}_\pm) + \frac{\partial c_\pm}{\partial x_2}(\vec{\varphi}_\pm, \widehat{\sigma}_2\vec{\varphi}_\pm)\\ &\quad + c_\pm\left(\vec{\varphi}_\pm, \left(\frac{\partial \vec{\varphi}_\pm}{\partial t} + \widehat{\sigma}_1\frac{\partial \vec{\varphi}_\pm}{\partial x_1} + \widehat{\sigma}_2\frac{\partial \vec{\varphi}_\pm}{\partial x_2}\right)\right) = 0.\end{aligned} \tag{15}$$

Это линейное уравнение первого порядка в частных производных, для его решения обратимся к уравнениям характеристик

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{(\vec{\varphi}_\pm, \widehat{\sigma}_1\vec{\varphi}_\pm)}{\|\vec{\varphi}_\pm\|^2}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{(\vec{\varphi}_\pm, \widehat{\sigma}_2\vec{\varphi}_\pm)}{\|\vec{\varphi}_\pm\|^2}, \tag{16}$$

дополненных начальными условиями $\vec{r}|_{t=0} = \vec{a}$. Правая часть (16) зависит от $\vec{r}$ и $\vec{p} = \vec{\nabla}S$, которые зависят от t и являются решениями уравнений (9). Нетрудно показать, что на этих решениях уравнения (16) выполняются, см. монографию [8], а также [6]. Поэтому характеристики уравнения (16) являются квазиклассическими траекториями.

Перепишем уравнения (15) в виде

$$\frac{dc_\pm}{dt} + W_\pm(x)c_\pm = 0,$$

$$W_\pm(x) = \frac{1}{\|\vec{\varphi}_\pm\|^2}\left(\vec{\varphi}_\pm, \left(\frac{\partial \vec{\varphi}_\pm}{\partial t} + \widehat{\sigma}_1\frac{\partial \vec{\varphi}_\pm}{\partial x_1} + \widehat{\sigma}_2\frac{\partial \vec{\varphi}_\pm}{\partial x_2}\right)\right), \tag{17}$$

где d/dt полная производная вдоль характеристики или квазиклассической траектории. Заметим, что

$$\begin{aligned}2\mathrm{Re}W_\pm(\vec{r},t) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{(\vec{\varphi}_\pm, \widehat{\sigma}_1\vec{\varphi}_\pm)}{\|\vec{\varphi}_\pm\|^2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{(\vec{\varphi}_\pm, \widehat{\sigma}_2\vec{\varphi}_\pm)}{\|\vec{\varphi}_\pm\|^2} + \frac{1}{\|\vec{\varphi}_\pm\|^2}\frac{\partial}{\partial t}\|\vec{\varphi}_\pm\|^2\\ &\quad - (\vec{\varphi}_\pm, \widehat{\sigma}_1\vec{\varphi}_\pm)\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{\|\vec{\varphi}_\pm\|^2} - (\vec{\varphi}_\pm, \widehat{\sigma}_2\vec{\varphi}_\pm)\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{\|\vec{\varphi}_\pm\|^2}.\end{aligned}$$

Определим расходимость характеристик как якобиан перехода от переменных x_1 и x_2 к переменным a_1, a_2:

$$J_\pm(t,\vec{a}) = \left|\frac{D(x_1,x_2)}{D(a_1,a_2)}\right|.$$

Здесь учитывается, что $\vec{r} = \vec{r}_\pm(t, \vec{a})$ есть уравнение характеристики для (15), то есть решение системы (16), дополненной приведённым выше начальным условием. Применяя формулу Лиувилля (см., например, [8]), найдем

$$\mathrm{Re} W_\pm(\vec{r}_\pm(t, \vec{a}), t) = \frac{1}{2}\frac{d \ln J_\pm}{dt} + \frac{d \ln \|\vec{\varphi}_\pm\|^2}{dt}.$$

В результате получим

$$c_\pm(\vec{r}_\pm(t, \vec{a}), t) = \alpha_\pm(\vec{a}) \frac{1}{\sqrt{J_\pm} \|\vec{\varphi}_\pm\|} e^{-i \mathrm{Im} \int\limits_0^t W_\pm(\vec{r}_\pm(t', \vec{a}), t') dt'}.$$

Окончательно, решение нулевого приближения имеет вид:

$$\vec{\psi}(\vec{r}, t) = \vec{\psi}_+(\vec{r}, t) + \vec{\psi}_-(\vec{r}, t), \tag{18}$$

$$\vec{\psi}_\pm(\vec{r}, t) \approx \frac{\alpha_\pm(\vec{a})}{\sqrt{J_\pm(t, \vec{a})}} e^{\frac{i}{\hbar} S_\pm(\vec{r}, t) - i \mathrm{Im} \int\limits_0^t W_\pm(\vec{r}_\pm(t', \vec{a}), t') dt'} \frac{\vec{\varphi}_\pm(\vec{r}, t)}{\|\vec{\varphi}_\pm(\vec{r}, t)\|}. \tag{19}$$

Здесь интеграл берется вдоль квазиклассической траектории, а затем $\vec{a}$ выражается через $\vec{r}$ и t. Заметим, что функция $\vec{a} = \vec{a}_\pm(\vec{r}, t)$ существует, если $J_\pm(t, \vec{a}) \neq 0$.

Обратимся к определению функций $\alpha_\pm(\vec{a})$. Пусть в начальный момент заданы быстро осциллирующие начальные данные вида

$$\vec{\psi}(\vec{a}, 0) = \vec{\phi}(\vec{a}) e^{\frac{i}{\hbar} S_0(\vec{a})}, \tag{20}$$

где $S_0(\vec{a})$ вещественнозначная функция. В этом случае, квазиклассические действия S находятся по формуле (13), а коэффициенты α_+ и α_- в формуле (19) определяются как коэффициенты в разложении

$$\vec{\phi}(\vec{a}) = \alpha_+(\vec{a}) \frac{\vec{\varphi}_+(\vec{a}, 0)}{\|\vec{\varphi}_+(\vec{a}, 0)\|} + \alpha_-(\vec{a}) \frac{\vec{\varphi}_-(\vec{a}, 0)}{\|\vec{\varphi}_-(\vec{a}, 0)\|}. \tag{21}$$

§4. Квазифотоны

В настоящем разделе мы будем искать асимптотические разложения частных решений уравнения (2), которые описывают волновой пакет, сосредоточенный около бегущей в пространстве точки. Такие решения будем называть *квазифотонами*.

Мы будем искать эти разложения в виде (4), где неизвестные $S(\vec{r}, t)$ и $\vec{\Phi}^{(k)}(\vec{r}, t)$, $k \geqslant 0$ являются гладкими функциями, удовлетворяющими рекуррентной системе (5), (6). Однако функция $S(\vec{r}, t)$ будет предполагаться комплекснозначной. Мы будем требовать, чтобы

$$\mathrm{Im} S(\vec{r}, t) \leqslant 0,$$

причем $\mathrm{Im} S(\vec{r}, t) = 0$ только если $\vec{r} = \mathring{\vec{r}}(t)$. Здесь $\vec{r} = \mathring{\vec{r}}(t)$ – это квазиклассическая траектория или, другими словами, пространственно-временной луч.

Заметим, что, как показано выше, имеется два уравнения Гамильтона–Якоби (7), (8), которые мы различали нижним индексом, и функция $S(\vec{r}, t)$ является решением одного из них. Мы получили две системы канонических уравнений Гамильтона, и для каждой ввели свои бихарактеристики. Мы предполагаем, что вектор-функция $\vec{\phi}(\vec{a})$ в начальных данных (20) пропорциональна одному из собственных векторов, например,

$$\vec{\phi}(\vec{a}) = \frac{\vec{\varphi}_+(\vec{a}, 0)}{\|\vec{\varphi}_+(\vec{a}, 0)\|},$$

тогда коэффициенты в разложении (21) имеют вид: $\alpha_+ = 1$, $\alpha_- = 0$. От выбора этого собственного вектора зависит какое из уравнений Гамильтона–Якоби и какую из канонических систем Гамильтона мы рассматриваем. Приведенные ниже рассуждения справедливы для любого из уравнений Гамильтона–Якоби и мы опускаем всюду индекс $\pm$, чтобы не загромождать изложение.

Для построения решения выберем какую-нибудь бихарактеристику, то есть решение канонических уравнений Гамильтона (9), удовлетворяющую начальным условиям

$$\vec{r}(0) = \vec{0}, \quad \vec{p}(0) = \vec{\kappa},$$

выбор $\vec{\kappa}$ будет обсуждаться позже. Будем обозначать такое решение

$$\vec{r} = \mathring{\vec{r}}(t), \quad \vec{p} = \mathring{\vec{p}}(t).$$

Выберем теперь другие начальные данные:

$$\vec{r}(0) = \vec{a}, \quad \vec{p}(0) = \vec{\kappa} + \mathbf{P}(0)\vec{a} + \dots, \tag{22}$$

где $\mathbf{P}(0)$ – некоторая матрица, которая получается из разложения ∇S_0 в формуле (11), связь с функцией S_0 обсудим ниже. Будем считать, что $\|\vec{a}\| \ll 1$. Предполагаем сперва, что матрица $\mathbf{P}(0)$ вещественная.

Бихарактеристики с вещественными начальными данными, мало отличающимися от данных (20), могут быть найдены как решения задачи Коши для системы (9). Решения будут зависеть от $\vec{a}$,

$$\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{a}), \quad \vec{p} = \vec{p}(t, \vec{a}),$$

и могут быть разложены в ряд по $\vec{a}$. Вместо того, чтобы при каждом $\vec{a}$ решать нелинейную систему (9), мы предлагаем сразу учесть, что нас интересуют бихарактеристики при малых $\vec{a}$, и искать сразу уравнения для коэффициентов этого разложения

$$\begin{aligned} \vec{r}(t, \vec{a}) &\simeq \mathring{\vec{r}}(t) + \mathbf{Q}(t)\vec{a} + \ldots, \\ \vec{p}(t, \vec{a}) &\simeq \mathring{\vec{r}}(t) + \mathbf{P}(t)\vec{a} + \ldots, \end{aligned} \tag{23}$$

где $\mathbf{Q}(t)$ и $\mathbf{P}(t)$ неизвестные матрицы, зависящие от t. Согласно (22), мы знаем начальные данные для этих матриц $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$ и $\mathbf{P}(0)$.

Введем обозначение

$$\vec{\eta}(\vec{r}, t) = \vec{r} - \mathring{\vec{r}}(t).$$

Это означает, что в каждый момент времени t мы выбираем начало пространственных координат в находящейся на квазиклассической траектории точке $\mathring{\vec{r}}(t)$. Будем искать решение уравнения Гамильтона–Якоби в виде разложения по степеням $\vec{\eta}$:

$$S(\vec{r}, t) = S(\mathring{\vec{r}}, t) + (\vec{\varrho}, \vec{\eta}) + \frac{1}{2}(\mathbf{\Gamma}\vec{\eta}, \vec{\eta}) + \ldots \tag{24}$$

с неизвестными пока коэффициентами вектором $\vec{\rho}(t)$ и матрицей $\mathbf{\Gamma}(t)$ по аналогии с тем, как это делалось при построении квазифотона для волнового уравнения в [11].

Определение импульса

$$\vec{p} = \nabla S(\vec{r}, t) \tag{25}$$

позволяет выразить эти коэффициенты через коэффициенты в разложении $\vec{r}(t, \vec{a})$ и $\vec{p}(t, \vec{a})$ (23). В самом деле, дифференцируя (24), подставляя результат дифференцирования в правую часть (25), а разложение $\vec{p}$ в левую часть и приравнивая коэффициенты, не содержащие $\vec{a}$, найдем

$$\vec{\varrho} = \mathring{\vec{p}}(t). \tag{26}$$

Соотношение (25) должно выполняться при любых $\vec{a}$, поэтому приравнивая коэффициенты при $\vec{a}$ в (25), найдем $\mathbf{P} = \mathbf{\Gamma Q}$. Если существует обратная матрица $\mathbf{Q}^{-1}$, то

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1}. \tag{27}$$

Уравнения для матриц $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ найдем, подставляя разложения (23) в канонические уравнения Гамильтона (9) и приравнивая матричные коэффициенты при $\vec{a}$ в левой и правой части, получим

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = -\mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{B}^\top \mathbf{Q}, \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{B}\mathbf{P} + \mathbf{C}\mathbf{Q}, \tag{28}$$
$$A_{ij} = -\frac{\partial^2 h}{\partial p_i \partial p_j}\bigg|_{\substack{\vec{r}=\mathring{\vec{r}}(t),\\ \vec{p}=\mathring{\vec{p}}(t)}}, \quad B_{ij} = -\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial p_j}\bigg|_{\substack{\vec{r}=\mathring{\vec{r}}(t),\\ \vec{p}=\mathring{\vec{p}}(t)}},$$
$$C_{ij} = -\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}\bigg|_{\substack{\vec{r}=\mathring{\vec{r}}(t),\\ \vec{p}=\mathring{\vec{p}}(t)}},$$

$i = 1, 2$, $j = 1, 2$. Здесь $\mathbf{B}^\top$ обозначает матрицу, транспонированную к $\mathbf{B}$. Эти уравнения отличаются от уравнений, полученных в [11], только выбором гамильтониана h.

Уравнения для $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}$ должны быть дополнены начальными условиями. Мы положим

$$\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}, \qquad P_{jk}(0) = \frac{\partial^2 S_0}{\partial x_j \partial x_k}, \quad j, k = 1, 2. \tag{29}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица. Построенное таким образом, решение S определяется выбором опорной бихарактеристики и начального значения функции $\mathbf{P}$.

Чтобы построить квазифотон, выберем матрицу $\mathbf{P}$ комплекснозначной, тогда получим комплексные решения уравнений (28) и комплексную функцию $S(\vec{r}, t)$. Полученная по формуле (29) матрица $\mathbf{P}$ симметрична, мы будем требовать также, чтобы её мнимая часть была положительно определена. Для этого достаточно выбрать комплексное S_0

$$S_0(\vec{r}) = (\vec{\kappa}, \vec{r}) + \frac{i}{2}(\mathbf{\Gamma}_0 \vec{r}, \vec{r}).$$

В этом случае,

$$\mathbf{P}(0) = i\mathbf{\Gamma}_0. \tag{30}$$

Важно отметить, что если матрица $\mathbf{\Gamma}_0$ симметрична и положительно определена, то она останется симметричной и положительно определенной в любой момент времени [11, 14].

Раскладывая амплитуду квазиклассического решения (19) вблизи бихарактеристики и ограничиваясь главным членом разложения, учитывая что $J = \det\mathbf{Q} + \dots$, найдем окончательную формулу для квазифотонов

$$\vec{\psi}(\vec{r},t) \approx \frac{1}{\sqrt{\det\mathbf{Q}(t)}} e^{\frac{i}{\hbar}S(\vec{r},t) - i\mathrm{Im}\int\limits_0^t W(\mathring{\vec{r}}(t'),t')dt'} \quad \frac{\vec{\varphi}(\mathring{\vec{r}}(t),t)}{\|\vec{\varphi}(\mathring{\vec{r}}(t),t)\|}. \tag{31}$$

Здесь функция $S(\vec{r},t)$ определяется формулой (24), где $\mathbf{\Gamma}$ определяет степень локализации решения и вычисляется по формуле (27), $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ являются решениями (28) с начальными условиями (29), (30). Функция $W(\vec{r},t)$ определяется формулой (17). Термин квазифотон был введен в [11] для аналогичного асимптотического решения волнового уравнения. Решение (31) описывает волновой пакет, гауссовски локализованный около точки, бегущей вдоль квазиклассической траектории.

Автор благодарит Е. А. Городницкого за полезное обсуждение.

Список литературы

1. P. Carmier, D. Ullmo, *Berry phase in graphene: Semiclassical perspective.* — Physical Review B **77** (2008), 245413.
2. V. V. Zalipaev, *Complex WKB approximations in graphene electron-hole waveguides in magnetic field.* — Graphen–Synthesis, Characterization, Propeties and Applications (2011), 81.
3. K. J. A. Reijnders, T. Tudorovskiy, M. I. Katsnelson, *Semiclassical theory of potential scattering for massless Dirac fermions.* — Ann. Phys. **333** (2013), 155–197.
4. V. V. Zalipaev, C. M. Linton, M. D. Croitoru, A. Vagov, *Resonant tunneling and localized states in a graphene monolayer with a mass gap.* — Phys. Rev. B **91**, No. 8 (2015), 085405–15.
5. K. J. A. Reijnders, D. S. Minenkov, M. I. Katsnelson, S. Yu. Dobrokhotov, *Electronic optics in graphene in the semiclassical approximation.* — Ann. Phys. **397** (2018), 65–135.
6. V. V. Kuydin, M. V. Perel, *Gaussian beams for 2D Dirac equation with electromagnetic field.* — In: DAYS on DIFFRACTION 2019.
7. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн: Метод. эталонных задач.* Наука, М. 1972.
8. В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики.* Наука, М. 1976.
9. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, *Пространственно-временной лучевой метод: линейные и нелинейные волны.* Изд-во Ленинградского ун-та, Л. 1985.

10. В. М. Бабич, Ю. П. Данилов, *Построение асимптотики решения уравнения Шредингера, сосредоточенной в окрестности классической траектории.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **15** (1969), 47–65.
11. В. М. Бабич, В. В. Улин, *Комплексный пространственно-временной лучевой метод и "квазифотоны".* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **117** (1981), 5–12.
12. J. Ralston, *Gaussian beams and the propagation of singularities.* — Studies in partial differential equations **23** (1982), 206–248.
13. А. П. Качалов, *Система координат при описании "квазифотона".* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **140** (1984), 73–76.
14. В. М. Бабич, *Квазифотоны и пространственно-временной лучевой метод.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **342** (2007), 5–13.
15. A. P. Kiselev, M. V. Perel, *Highly localized solutions of the wave equation.* — J. Math. Phys. **41**, No. 4 (2000), 1934–1955.
16. А. П. Киселев, М. В. Перель, *Гауссовские волновые пакеты.* — Оптика и спектроскопия **86**, No. 3 (1999), 357–359.
17. М. М. Попов, *Новый метод расчета волновых полей в высокочастотном приближении.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **104** (1981), 195–216.
18. M. V. Perel, M. S. Sidorenko, *New physical wavelet 'Gaussian wave packet.* — J. Phys. A **40**, No. 13 (2007), 3441.
19. M. V. Perel, M. S. Sidorenko, *Wavelet-based integral representation for solutions of the wave equation.* — J. Phys. A **42**, No. 37 (2009), 375211.
20. M. V. Perel, M. S. Sidorenko, *Wavelet analysis for the solutions of the wave equation.* — In: DAYS on DIFFRACTION 2006, pp. 208–217.
21. M. Perel, E. Gorodnitskiy, *Integral representations of solutions of the wave equation based on relativistic wavelets.* — J. Phys. A **45**, No. 38 (2012), 385203.
22. E. Gorodnitskiy, M. Perel, Yu Geng, R. S. Wu, *Depth migration with Gaussian wave packets based on Poincaré wavelets.* — Geophys. J. Int. **205**, No. 1 (2016), 314–331.

Perel M. V. Quasiphotons for the nonstationary 2D Dirac equation.

The asymptotic expansions are obtained for the solution of the $(2+1)$-dimensional nonstationary Dirac equation describing the wave function of a massive fermion in graphene, placed in an external inhomogeneous electric and magnetic field. The semiclassical asymptotics of the solution of the Cauchy problem for this equation with rapidly oscillating and rapidly decreasing initial data are found. This made it possible to find quasiphotons – asymptotic solutions describing Gaussian wave packets concentrated near a point running along a semiclassical trajectory.

С.-Петербургский
государственный университет
С.-Петербург, Россия
E-mail: m.perel@spbu.ru

Поступило 5 ноября 2019 г.