

С. А. Назаров

**РАССЕЯНИЕ УПРУГИХ ВОЛН НА МАЛЫХ
ЧАСТОТАХ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ
КИРХГОФА**

1. ВВЕДЕНИЕ

1. Постановка задачи. Пусть Π – полоса с боковыми сторонами ϖ_{\pm} , ширина которой масштабированием сведена к единице, а Ω – область на плоскости \mathbb{R}^2 (рис. 1), которая (область) совпадает с Π вне множества Θ , называемого резонатором,

$$\begin{aligned}\Pi &= \left\{ x = (x_1, x_2) =: (y, z) : |y| < \frac{1}{2}, z \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \right\}, \\ \varpi_{\pm} &= \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\} \times \mathbb{R}, \quad \Theta = \{ x \in \Omega : |z| < R \}, \\ \Pi_R^{\pm} &= \{ x \in \Omega : \pm z > R \}, \quad R > 0.\end{aligned}$$

Для простоты границу $\partial\Omega$ считаем одномерной и гладкой (ср. замечание 3.2). Рассмотрим задачу о распространении волн в пластине Кирхгофа Ω с краями, свободными от внешних воздействий,

$$\Delta^2 u(x) = \Lambda u(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$N^q(x, \nabla)u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad q = 2, 3. \quad (1.2)$$

Здесь u – прогиб пластины, $\Lambda = D^{-1}\rho\omega^2$ – спектральный параметр, $\omega > 0$ – частота гармонических во времени колебаний, а $\rho > 0$ и $D > 0$ – постоянные плотность и цилиндрическая жесткость пластины. Кроме того, $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ – оператор Лапласа, $\nabla = \text{grad}$, а дифференциальные операторы $N^q(x, \nabla)$ на границе $\partial\Omega$ заданы формулами (см [1] и [2, § 30])

$$\begin{aligned}N^3(x, \nabla) &= \partial_n \Delta - (1 - \nu)(\partial_s \kappa(s) \partial_s - \partial_s^2 \partial_n), \\ N^2(x, \nabla) &= \Delta - (1 - \nu)(\partial_s^2 - \kappa(s) \partial_n),\end{aligned} \quad (1.3)$$

Ключевые слова: бесконечная пластина Кирхгофа со свободным краем, малые частоты, почти полное прохождение волн, инвертированная аномалия Ванштейна.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01003).

где (n, s) – система локальных криволинейных координат, n – ориентированное расстояние до $\partial\Omega$, $n < 0$ внутри Ω , s – длина дуги на $\partial\Omega$, $\partial_n = \partial/\partial n$, $\partial_s = \partial/\partial s$ и т.п., а κ – кривизна дуги $\partial\Omega$, положительная на выпуклых ее участках. Краевые условия (1.2) с $q = 2$ и $q = 3$ означают, что на краю пластины отсутствуют поперечная нагрузка и изгибающий момент соответственно. На прямых сторонах ϖ_{\pm} полосы Π операторы (1.3), а также нормальная и касательная производные принимают вид

$$N_{\pm}^3(\nabla) = \pm\partial_y(\partial_y^2 + (2 - \nu)\partial_z^2), \quad N_{\pm}^2(\nabla) = \partial_y^2 + \nu\partial_z^2, \\ \partial_n = \pm\partial_y = \pm\partial/\partial y, \quad \partial_s = \mp\partial_z = \mp\partial/\partial z.$$

Наконец, $\nu \in [0, 1/2)$ – коэффициент Пуассона, отсутствующий в самом бигармоническом уравнении (1.1), но появляющийся в краевых условиях (1.2) и в функционале $\frac{1}{2} E(u, u; \Omega)$ упругой энергии (см. [2, § 30]),

$$E(u, u; \Omega) = \int_{\Omega} \left(|\Delta u|^2 + 2(1 - \nu) \left(\left| \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right|^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right) dx, \quad (1.4)$$

$$E(u, v; \Omega) = \frac{1}{4} (E(u + v, u + v; \Omega) - E(u - v, u - v; \Omega)). \quad (1.5)$$

Обобщенная формулировка задачи (1.1), (1.2) апеллирует к интегральному тождеству (см. [2, § 30])

$$E(u, v; \Omega) = \Lambda(u, v) \quad \forall v \in C_c^{\infty}(\overline{\Omega}), \quad (1.6)$$

где $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$ – скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega)$, а $C_c^{\infty}(\overline{\Omega})$ – линейное пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω . Пробные функции в тождестве (1.6) берутся финитными потому, что далее решения задачи (1.1), (1.2) не обязательно затухают на бесконечности. Благодаря очевидному неравенству

$$E(u, u; \Omega) \geq (1 - \nu) \|\nabla^2 u; L^2(\Omega)\|^2,$$

где $\nabla^k u$ – совокупность производных функции u порядка k , квадратичная форма (1.4) симметрична, положительна и замкнута в пространстве Соболева $H^2(\Omega)$. Таким образом, интегральному тождеству (1.6), а значит, и дифференциальной задаче (1.1), (1.2) отвечает [3,

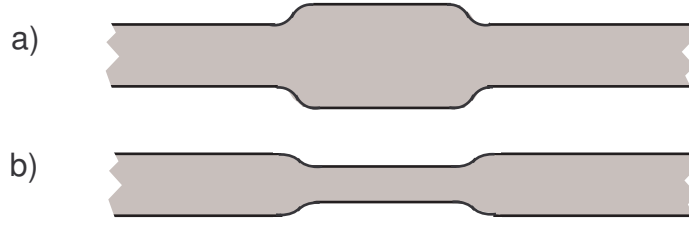


Рис. 1. Пластины с расширением (a) и сужением (b).

гл. 10] самосопряженный положительный оператор A в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$ с областью определения

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in H^4(\Omega) : N^q u = 0 \text{ на } \partial\Omega, q = 2, 3\}.$$

Квадратичная форма (1.4) вырождается только на линейных функциях, т.е. для любой ограниченной области $\Xi \subset \mathbb{R}^2$ справедливо высказывание

$$u \in H^2(\Omega), E(u, u; \Xi) = 0 \Leftrightarrow u(x) = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2, c_r \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Следовательно, являясь связным множеством, спектр σ_c оператора A – замкнутая полуось $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty)$ (см. оригинальную статью [4] и, например, монографию [5, гл. 1 и 3]). Иными словами, при любом $\Lambda > 0$ у задач (1.1), (1.2) или (1.6) есть решения вида

$$e^{i\phi z} \Phi(y), \quad \text{где } \phi \in \mathbb{C}, \Phi \in C^\infty \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right],$$

называемые осциллирующими волнами при $\phi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ в противоположность полиномиальным и экспоненциальным волнам при $\phi = 0$ и $\phi \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$ соответственно.

Цель настоящей работы – изучение волновых процессов на малых частотах, т.е. при

$$\Lambda_\varepsilon = \varepsilon^4. \quad (1.8)$$

Здесь ε – малый положительный параметр. Подчеркнем, что благодаря проведенному изначально масштабированию все геометрические

и физические параметры стали безразмерными — это позволяет правильно истолковать запись $\varepsilon \ll 1$. Далее решение задач (1.1), (1.2) и (1.6) со спектральным параметром (1.8) обозначаем u^ε .

1.2. Аномалии Вайнштейна и описание результатов работы.

На основе явных формул в книге [6] была указана особенность распространения акустических волн в полубесконечной круговой цилиндрической трубе, открытой в бесконечное пространство. Именно, на околоторговой частоте некоторые волны претерпевают почти полное отражение так, как будто торец трубы перекрыт слабопроницаемой мягкой стенкой. В статьях [7, 8] такое необычное поведение волн было исследовано в бесконечных волноводах с компактными резонаторами, и оказалось, что существование и качество аномалии Вайнштейна зависит от того, имеются или нет и в каком количестве ограниченные решения задачи при пороговом значении спектрального параметра, которые стабилизируются (т.е. не осциллируют), но не затухают на бесконечности, — они названы [9] “почти стоячими” волнами. В частности, отсутствие или наличие двух линейно независимых почти стоячих волн проявляется именно эффект почти полного отражения, но случай единственной почти стоячей волны, наоборот, характеризуется почти полным прохождением волн и потому связывается с “инвертированной аномалией Вайнштейна”.

В спектральной задаче Неймана для оператора Лапласа первый порог (нижняя грань непрерывного спектра) нулевой и на нем всегда существует единственное ограниченное решение — постоянная функция. Поэтому на малых частотах в акустическом волноводе всегда наблюдается именно инвертированная аномалия Вайнштейна. В настоящей статье при помощи построения асимптотики матрицы рассеяния подобный эффект описан для изгибных и крутильных волн в пластине Кирхгофа Ω (теорема 3.5). При этом на нулевом пороге у задачи Неймана для бигармонического уравнения имеется два ограниченных решения $v_{10}(x) = 1$ и $v_{20}(x) = y$, которые порождают две пары $w_1^{\varepsilon\pm}$ и $w_2^{\varepsilon\pm}$ распространяющихся волн (см. п. 2 § 3). Еще одно полиномиальное решение $v_{11}(x) = z$ растет на бесконечности, но как ни странно, порождает экспоненциальные волны $w_0^{\varepsilon\pm}(y, z)$, исчезающие при $z \rightarrow \pm\infty$ с малой скоростью. Все эти волны приходится включать в асимптотические анзацы, что сильно усложняет асимптотический анализ в сравнении с упомянутыми задачами Дирихле и Неймана для оператора Гельмгольца. Асимптотические процедуры, представленные в § 3,

опираются на результаты об асимптотическом строении спектра некоторого вспомогательного операторного пучка (теорема 3.4), а также на полную информацию о разрешимости статической ($\Lambda = 0$) задачи (2.1), (2.2) (теоремы 2.1, 2.2 и 4.6). Попутно в §2 дано определение матрицы поляризации пластины Ω и установлены ее основные свойства (теорема 2.3 и предложение 2.1).

Обоснование полученных асимптотических формул представлено в §4. Традиционно используется техника весовых пространств с отделенной асимптотикой (см. работы [10–12] и др.). Поскольку нормы в таких пространствах включают сумму модулей коэффициентов рассеяния, проверка теоремы 3.5 об асимптотике матрицы рассеяния проста, а основную трудность представляют собой доказательства оценки нормы соответствующего оператора задачи и его обратного. Это делается при помощи вывода явного выражения для “почти обратного” оператора, причем его строение в значительной степени напоминает предложенные в §3 асимптотические конструкции, а точные оценки погрешности позволяют убедиться в том, что оператор задачи является изоморфизмом (см. п. 3 §4 и теорему 4.7).

§2. СТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА И МАТРИЦА ПОЛЯРИЗАЦИИ

2.1. Разрешимость задачи. Положим $\Lambda = 0$ и рассмотрим статическую задачу об изгибе бесконечной пластины Кирхгофа Ω под действием поперечных сил f , а также нагрузки g^3 и изгибающего момента g^2 , приложенных к краю $\partial\Omega$ (см. механическое истолкование, например, в книге [2, §30]),

$$\Delta^2 u^0(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$N^q(x, \nabla)u^0(x) = g^q(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad q = 2, 3. \quad (2.2)$$

Происходя от известной формулы Грина для бигармонического оператора (см. [1] и [2, §30] и др.) вариационная формулировка задачи (2.1), (2.2) выглядит следующим образом:

$$E(u^0, v^0; \Omega) = F^0(v^0) := (f, v^0)_\Omega - (g^3, v^0)_{\partial\Omega} + (g^2, \partial_n v^0)_{\partial\Omega} \quad \forall v \in \mathcal{E}(\Omega). \quad (2.3)$$

При этом $\mathcal{E}(\Omega)$ – пространство, полученное пополнением линейного пространства $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ по “энергетической” норме

$$\|u^0; \mathcal{E}(\Omega)\| = (E(u^0, u^0; \Omega) + \|u^0; L^2(\Theta)\|^2)^{1/2}. \quad (2.4)$$

Варианты одномерного неравенства Харди

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{z^2} |V(z)|^2 dz \leq 4 \int_0^{+\infty} \left| \frac{dV}{dz}(z) \right|^2 dz \quad \forall V \in C_c^1(0, +\infty), \quad (2.5)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{z^4} |W(z)|^2 dz \leq \frac{4}{9} \int_0^{+\infty} \frac{1}{z^2} \left| \frac{dW}{dz}(z) \right|^2 dz \quad \forall W \in C_c^1(0, +\infty)$$

показывают, что норма (2.4) эквивалентна весовой норме

$$\| \|u^0; \mathcal{E}(\Omega)\| \| = \left(\int_{\Omega} \left(|\nabla^2 u^0(x)|^2 + \frac{|\nabla u^0(x)|^2}{1+z^2} + \frac{|u^0(x)|^2}{(1+z^2)^2} \right) dz \right)^{1/2}. \quad (2.6)$$

Для проверки этого факта прежде всего нужно воспользоваться понятным неравенством

$$\| \|u^0; H^2(\Omega_{2R})\| \|^2 \leq c_R (\| \nabla^2 u^0; L^2(\Omega_{2R})\| \|^2 + \| u^0; L^2(\Theta)\| \|^2),$$

где

$$\Omega_\ell = \{x \in \Omega : |z| < \ell\}, \quad \ell \geq R, \quad (2.7)$$

и соответственно $\Omega_R = \Theta$. Затем следует применить неравенства (2.5) к произведениям $\chi_+(z)u^0(y, \pm z)$ и $\chi_+(z)\nabla u^0(y, \pm z)$ – требование обращения произведений в нуль при $z = 0$ обеспечено срезающими функциями $\chi_\pm \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$\chi_\pm(z) = 0 \text{ при } \pm z < R, \quad \chi_\pm(z) = 1 \text{ при } \pm z > 2R, \quad 0 \leq \chi_\pm \leq 1. \quad (2.8)$$

Обратим внимание на то, что в правой части (2.4) норма самой функции u^0 вычисляется на компакте $\bar{\Theta}$, а в правой части (2.6) – по всей неограниченной области Ω , но с исчезающим на бесконечности весом. Наконец, справедливо следовое неравенство, проверяемое по стандартной схеме из учебника [13, гл. 1],

$$\| (1+z^2)^{-1}u^0; L^2(\partial\Omega)\| + \| (1+z^2)^{-1/2}\nabla u^0; L^2(\partial\Omega)\| \leq c \| \|u^0; \mathcal{E}(\Omega)\| \|^2.$$

Нетрудно убедиться в том, что норма (2.6) конечна для любых линейных функций

$$\wp(y, z) = b_0 + b_1 z + b_2 y \quad (2.9)$$

(ср. высказывание (1.7) с иной нумерацией коэффициентов), а функции (2.9) можно приблизить функциями из линейного пространства $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ по исходной энергетической норме (2.4). Далее символом \wp

обозначаем произвольные линейные функции (2.9), не оговаривая это отдельно; при этом $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ – решения однородной ($f = 0$ и $g^q = 0$) задачи (2.1), (2.2).

Все сказанное вместе с альтернативой Фредгольма и теоремой Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве приводят к следующему утверждению.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены требования*

$$(1+z^2)f \in L^2(\Omega), \quad (1+z^2)g^3 \in L^2(\partial\Omega), \quad (1+z^2)^{1/2}g^2 \in L^2(\partial\Omega), \quad (2.10)$$

$$F(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi, \quad (2.11)$$

где F – функционал из правой части (2.3). Тогда существует обобщенное решение $u^0 \in \mathcal{E}(\Omega)$ задачи (2.1), (2.2), удовлетворяющее интегральному тождеству (2.3) и определенное с точностью до слагаемого (2.9). Будучи подчинено условиям ортогональности

$$\int_{\Theta} \varphi(x)u^0(x)dx = 0 \quad \forall \varphi,$$

решение становится единственным и удовлетворяет оценке

$$|||u^0; \mathcal{E}(\Omega)||| \leq c_0 \mathcal{N}^0,$$

в которой \mathcal{N}^0 – сумма норм функций (2.10) в указанных пространствах, а множитель c_0 не зависит от f и g^q .

Три условия ортогональности (2.11) означают самоуравновешенность внешних воздействий: обращаются в нуль одна ($\varphi = 1$) проекция главного вектора сил на перпендикуляр к плотности пластины и два ($\varphi = y$ и $\varphi = z$) главных момента относительно осей $x_2 = z$ и $x_1 = y$.

2.2. Весовые пространства и асимптотика на бесконечности. Помимо линейных функций (2.9), для которых введем новые обозначения

$$v^{10}(x) = 1, \quad v^{11}(x) = z; \quad (2.12)$$

$$v^{20}(x) = y, \quad (2.13)$$

у задачи в прямой полосе

$$\Delta^2 v(x) = 0, \quad x \in \Pi, \quad (2.14)$$

$$N_{\pm}^q(\nabla)v(x) = 0, \quad x \in \varpi_{\pm}, \quad q = 2, 3, \quad (2.15)$$

имеются еще три полиномиальных решения

$$v^{12}(x) = \frac{1}{2}(z^2 - \nu y^2), \quad v^{13}(x) = \frac{1}{6}z^3 - \frac{\nu}{2}y^2z; \quad (2.16)$$

$$v^{21}(x) = yz. \quad (2.17)$$

Линейные комбинации последних будем обозначать \mathcal{P} . Всякое решение задачи (2.14), (2.15) с не более чем степенным ростом на бесконечности оказывается суммой $\wp + \mathcal{P}$, т.е. является линейной комбинацией шести полиномов (2.12), (2.13) и (2.16), (2.17) — их линейную оболочку обозначим \mathcal{L}^0 . Нумерация полиномов подобрана так, что

$$\partial_z v^{jk}(y, z) = v^{j(k-1)}(y, z), \quad j = 1, 2, \quad k = 0, \dots, \varkappa_j - 1. \quad (2.18)$$

Здесь $v^{jm} = 0$ при $m < 0$,

$$\varkappa_1 = 4 \quad \text{и} \quad \varkappa_2 = 2, \quad (2.19)$$

Полиномы (2.12), (2.13) и (2.16), (2.17) описывают поведение решений задач (2.1), (2.2) на бесконечности. Для формулировки асимптотических представлений введем весовое пространство Соболева $W_\beta^l(\Omega)$ как пополнение линейного пространства $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ по норме

$$\|f; W_\beta^l(\Omega)\| = \left(\sum_{k=0}^l \|e^{\beta|z|} \nabla^k f; L^2(\Omega)\|^2 \right)^{1/2}, \quad (2.20)$$

где $l \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ и $\beta \in \mathbb{R}$ — показатели гладкости и веса. Само пространство $W_\beta^l(\Omega)$ состоит из функций $f \in H_{\text{loc}}^l(\bar{\Omega})$, у которых конечна норма (2.20). Понятно, что $W_0^l(\Omega) = H^l(\Omega)$, но при $\beta > 0$ функции $f \in W_\beta^l(\Omega)$ экспоненциально затухают при $z \rightarrow \pm\infty$, а при $\beta < 0$ у них допустим некоторый рост. Скорости затухания и роста управляются показателем β . Наконец, пространство $W_\beta^{l+1/2}(\partial\Omega)$ образовано следами на границе $\partial\Omega$ функций из класса $W_\beta^{l+1}(\Omega)$ и снабжено естественной следовой нормой

$$\|g; W_\beta^{l+1/2}(\partial\Omega)\| = \inf \left\{ \|G; W_\beta^{l+1}(\Omega)\| : G = g \text{ на } \partial\Omega \right\}.$$

Теорема 2.2 ([14] и [5, теорема 6.1.6]). *Существует такое положительное число $\beta_0 = \beta_0(\nu)$, что при $\beta \in (0, \beta_0)$, любом зафиксированном $l \in \mathbb{N}_0$ и правых частях*

$$f \in W_\beta^l(\Omega), \quad g^q \in W_\beta^{l-q+7/2}(\partial\Omega), \quad q = 2, 3, \quad (2.21)$$

решение $u^0 \in W_{-\beta}^{l+4}(\Omega)$ задачи (2.1), (2.2) допускает представление

$$u^0(x) = \tilde{u}^0(x) + \sum_{\pm} \chi_{\pm}(z) \sum_{j=1,2} \sum_{k=0}^{\varkappa_j-1} a_{jk}^{\pm} v_{jk}(x), \quad (2.22)$$

а для остатка $\tilde{u}^0 \in W_{\beta}^{l+4}(\Omega)$ и коэффициентов $a_{jk}^{\pm} \in \mathbb{C}$ верна оценка

$$\|\tilde{u}^0; W_{\beta}^{l+4}(\Omega)\| + \sum_{\pm} \sum_{j=1,2} \sum_{k=0}^{\varkappa_j-1} |a_{jk}^{\pm}| \leq c_{\beta,l} \left(\mathcal{N}_{\beta}^l + \|u^0; W_{-\beta}^{l+4}(\Omega)\| \right),$$

где \mathcal{N}_{β}^l – сумма норм функций (2.21) в указанных пространствах, а множитель $c_{\beta,l}$ не зависит от f , g^q и u^0 .

2.3. Операторный пучок и жордановы цепочки. Согласно теории Кондратьева [14] (см. также монографию [5, гл. 3, §1 и §2, гл. 5, §1]) теорема 2.2 получается в результате исследования спектра пучка

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_0(\mathfrak{z}) = & \left\{ \partial_y^4 + 2\mathfrak{z}^2 \partial_y^2 + \mathfrak{z}^4; \pm \partial_y (\partial_y^2 + (2-\nu)\mathfrak{z}^2) \Big|_{y=\pm 1/2}; (\partial_y^2 + \nu\mathfrak{z}^2) \Big|_{y=\pm 1/2} \right\} \\ & : H^{l+4} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \rightarrow H^l \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

в полосе $\mathbb{P}(\beta_0) = \{\mathfrak{z} \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} \mathfrak{z}| < \beta_0\}$. Сам пучок (2.23) появляется в результате применения преобразования Лапласа к задаче (2.14), (2.15). Непосредственные вычисления показывают, что при достаточно малом $\beta_0 > 0$ в полосе $\mathbb{P}(\beta_0)$ имеется только одно собственное число $\mathfrak{z} = 0$, которому отвечают две жордановы цепочки с длинами (2.19), а именно,

$$\Phi^{10}(y) = 1, \quad \Phi^{11}(y) = 0, \quad \Phi^{12}(y) = -\frac{1}{2}\nu y^2, \quad \Phi^{13}(y) = 0; \quad (2.24)$$

$$\Phi^{20}(y) = y, \quad \Phi^{21}(y) = 0. \quad (2.25)$$

Собственные Φ^{j0} и присоединенные $\Phi^{j1}, \dots, \Phi^{j\varkappa_j-1}$ векторы суть решения абстрактных уравнений

$$\mathfrak{A}_0(0)\Phi^{jk} = -\sum_{p=1}^k \frac{1}{p!} \frac{d^p \mathfrak{A}_0}{d\mathfrak{z}^p}(0)\Phi^{j(k-p)}, \quad j = 1, 2, \quad k = 0, \dots, \varkappa_j - 1. \quad (2.26)$$

Непродолжимость жордановых цепочек (2.24) и (2.25) означает, что уравнение (2.26) с $k = \varkappa_j$ неразрешимо.

По жордановым цепочкам (2.24) и (2.25) восстанавливаются решения задачи (2.24)

$$v_{jk}(y, z) = \sum_{p=0}^k \frac{z^p}{p!} \Phi^{jk-p}(y), \quad j = 1, 2, \quad k = 0, \dots, \varkappa_j - 1. \quad (2.27)$$

Понятно, что формулы (2.27) задают полиномы (2.12), (2.13) и (2.16), (2.17).

В следующем параграфе будет рассмотрен возмущенный пучок

$$\mathfrak{A}_\Lambda(\mathfrak{z}) = \mathfrak{A}_0(\mathfrak{z}) + \Lambda \mathfrak{E}, \quad (2.28)$$

где $\mathfrak{E} = \{1; 0, 0; 0, 0\}$. Он порожден “возмущенной” краевой задачей

$$\Delta^2 u(x) = \Lambda u(x), \quad x \in \Pi, \quad (2.29)$$

$$N_\pm^q(\nabla)u(x) = 0, \quad x \in \varpi_\pm, \quad q = 2, 3. \quad (2.30)$$

В частном случае $\Lambda = 0$ все атрибуты собственного числа $\mathfrak{z} = 0$ пучка (2.28), принимающего вид (2.23), определяются при помощи процедуры [10], которая основана на полиномиальном свойстве функционала энергии (1.4), введенном в статьях [15, 16] и выраженном формулой (1.7). Именно, в пространстве полиномов \wp , на которых вырождается квадратичная форма (1.4), требуется составить базис с элементами (2.12), (2.13), связанными соотношениями (2.18) и образующими цепочки с длинами $t_1 = 2$ и $t_2 = 1$. В итоге получается такой результат: в достаточно узкой полосе $\mathbb{P}(\beta_0)$ пучок (2.23) имеет лишь одно собственное число $\mathfrak{z} = 0$, у которого частные и полная алгебраические кратности соответственно принимают вид

$$\varkappa_1 = 2t_1, \quad \varkappa_2 = 2t_2 \quad \text{и} \quad \varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 = 2(t_1 + t_2)$$

(ср. формулы (2.19)), а новые полиномы (2.16), построенные по формуле (2.27), в отличие от \wp делают интеграл энергии (1.4) расходящимся.

2.4. Формула Грина и условия ортогональности и нормировки. В усеченном волноводе (2.7) с боковой поверхностью $(\partial\Omega)_R$ справедлива формула Грина

$$\begin{aligned} & (\Delta^2 u, v)_{\Omega_\ell} - (N^3 u, v)_{(\partial\Omega)_\ell} + (N^2 u, \partial_n v)_{(\partial\Omega)_\ell} \\ & - (u, \Delta^2 v)_{\Omega_\ell} + (u, N^3 v)_{(\partial\Omega)_\ell} - (\partial_n u, N^2 v)_{(\partial\Omega)_\ell} = \sum_{\pm} Q_{\pm\ell}(u, v), \end{aligned} \quad (2.31)$$

в которой фигурирует симплектическая (полуторалинейная и антиэрмитова) форма

$$\begin{aligned}
Q_\ell(u, v) &= \int_{-1/2}^{1/2} (\overline{v(y, \ell)} N^3(\nabla) u(y, \ell) - \overline{\partial_z v(y, \ell)} N^2(\nabla) u(y, \ell) \\
&\quad + \partial_z u(y, \ell) \overline{N^2(\nabla) v(y, \ell)} - u(y, \ell) \overline{N^3(\nabla) v(y, \ell)}) dy \\
&\quad - 2(1 - \nu) \sum_{\pm} \pm \left(\overline{v\left(\pm \frac{1}{2}, \ell\right)} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \left(\pm \frac{1}{2}, \ell\right) \right. \\
&\quad \left. - u\left(\pm \frac{1}{2}, \ell\right) \overline{\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \left(\pm \frac{1}{2}, \ell\right)} \right), \tag{2.32}
\end{aligned}$$

а дифференциальные операторы (1.3) на торце $\{x : |y| < 1/2, z = \ell\}$ принимают вид

$$N_0^3(\nabla) = \partial_z(\partial_z^2 + (2 - \nu)\partial_y^2), \quad N_0^2(\nabla) = \partial_z^2 + \nu\partial_y^2. \tag{2.33}$$

Подчеркнем, что из-за внеинтегральных членов, появившихся вследствие дополнительного интегрирования вдоль границы (см. [2, § 30] и [17, теорема 4]) формулу Грина (2.31) приходится признать обобщенной, что впрочем не мешает применить развитую в [5, гл. 5] технику симплектических форм переноса энергии (см. работы [18] и [19], посвященные задачам теории упругости).

Очередное утверждение проверяется непосредственными вычислениями.

Лемма 2.1. *Справедливы равенства*

$$Q_\ell(v_{10}, v_{13}) = -Q_\ell(v_{11}, v_{12}) = Q_\ell(v_{12}, v_{11}) = -Q_\ell(v_{13}, v_{10}) = -\alpha_1,$$

$$Q_\ell(v_{20}, v_{21}) = -Q_\ell(v_{21}, v_{20}) = -\alpha_2, \tag{2.34}$$

где

$$\alpha_1 = 1 - \nu^2 > 0 \quad \text{и} \quad \alpha_2 = 2(1 - \nu) > 0. \tag{2.35}$$

Все выражения $Q_\ell(v_{jk}, v_{pq})$, имеющие допустимые, но отсутствующие в списке (2.34) индексы, равны нулю.

Положим

$$\mathbf{v}_{10}(y, z) = -\alpha_1^{-1} v_{13}(y, z), \quad \mathbf{v}_{11}(y, z) = \alpha_1^{-1} v_{12}(y, z); \tag{2.36}$$

$$\mathbf{v}_{20}(y, z) = -\alpha_2^{-1} v_{21}(y, z) \tag{2.37}$$

и получим в итоге следующие соотношения биортогональности между группами полиномов (2.12), (2.13) и (2.36), (2.37):

$$Q_\ell(v_{jk}, \mathbf{v}_{pq}) = \delta_{j,p} \delta_{k,q}, \quad j, p = 1, 2, \quad k = 0, t_j, \quad q = 0, t_p. \quad (2.38)$$

2.5. Матрица поляризации. Лежащие вне энергетического класса $\mathcal{E}(\Omega)$ специальные решения однородной ($f = 0$ и $g^q = 0$) задачи (2.1), (2.2) ищем в виде

$$\begin{aligned} Z_{jk}(y, z) &= \mathbf{v}_{jk}(y, z) + \sum_{\pm} \chi_{\pm}(z) \sum_{p=1,2} \sum_{q=0,t_p} P_{jk,pq} v_{pq}(y, z) \\ &+ \tilde{Z}_{jk}(y, z), \quad j = 1, 2, \quad k = 0, t_j, \end{aligned} \quad (2.39)$$

где фигурируют срезающие функции (2.8), полиномы (2.12), (2.13) и (2.36), (2.37), а также остаток $\tilde{Z}_{jk} \in W_{\beta}^{l+4}(\Omega)$, экспоненциально затухающий на бесконечности. Матрица $P = P(\nu, \Theta)$ размером 3×3 , составленная из коэффициентов разложений (2.39), называется матрицей поляризации и зависит от формы резонатора Θ и от коэффициента Пуассона $\nu \in [0, 1/2)$.

Теорема 2.3. *Решения (2.39) существуют, а (вещественная) матрица P симметрична.*

Доказательство. Положив

$$Z_{jk}(x) = \mathbf{v}_{jk}(x) + \hat{Z}_{jk}(x), \quad (2.40)$$

получим для слагаемых $\hat{Z}_{jk} \in \mathcal{E}(\Omega)$ задачу (2.1), (2.2), в которой

$$f_{jk}(x) = 0, \quad g_{jk}^q(x) = -N^q(x, \nabla) \mathbf{v}_{jk}(x), \quad q = 2, 3. \quad (2.41)$$

Поскольку правые части краевых условий имеют компактные носители, условия разрешимости (2.11) указанной задачи выполнены в силу соотношений (2.38) и формулы Грина:

$$\begin{aligned} (g_{jk}^3, v_{pq})_{\partial\Omega} - (g_{jk}^2, \partial_n v_{pq})_{\partial\Omega} &= \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \sum_{\pm} \pm Q_{\pm\ell}(\mathbf{v}_{jk}, v_{pq}) \\ &= (-1 + 1) \delta_{j,p} \delta_{k,q} = 0. \end{aligned}$$

Решение \hat{Z}_{jk} допускает представление (2.22), в котором $a_{rs}^{\pm} = 0$ при $r = 1, 2$ и $s = t_r, \varkappa_r - 1$, так как $\chi_{\pm} v_{rs} \notin \mathcal{E}(\Omega)$ для таких индексов. Это решение определено с точностью до слагаемого (2.9), а значит, оставшиеся коэффициенты можно подчинить требованиям $a_{jk}^{\pm} = \pm a_{jk}$ при $j = 1, 2, k = 0, t_j$, т.е. придти к представлению (2.39) искомым

решений. Кроме того, согласно формуле Грина и соотношениям (2.38) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \sum_{\pm} \pm Q_{\pm\ell}(Z_{jk}, Z_{pq}) = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \sum_{\pm} \\ &\pm Q_{\pm\ell} \left(\mathbf{v}_{jk} \pm \sum_{r=1,2} \sum_{s=0,t_r} P_{jk,rs} v_{rs}, \mathbf{v}_{pq} \pm \sum_{\varrho=1,2} \sum_{\varsigma=0,\varrho_p} P_{pq,\varrho\varsigma} v_{\varrho\varsigma} \right) \\ &= 2P_{jk,pq} - 2P_{pq,jk}, \end{aligned}$$

причем экспоненциально затухающие остатки \tilde{Z}_{jk} и \tilde{Z}_{pq} устранены предельным переходом. Симметричность матрицы P установлена. \square

Укажем простые свойства матрицы поляризации в двух ситуациях, изображенных на рис. 1, а и б.

Предложение 2.1. 1) Если $\Omega \subsetneq \Pi$ (рис. 1, б), то матрица P отрицательно определена.

2) Если $\Pi \subsetneq \Omega$ (рис. 1, а), то матрица P положительно определена.

Доказательство. 1) Воспользуемся представлением (2.40) и при учете выражений (2.41) применим формулу Грина двумя способами, а именно:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (g_{jk}^3(x) Z_{pq}(x) - g_{jk}^2(x) \partial_n Z_{pq}(x)) ds_x &= \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \sum_{\pm} \pm Q_{\pm\ell}(\hat{Z}_{jk}, Z_{pq}) \\ &= \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \sum_{\pm} \mp Q_{\pm\ell} \left(\pm \sum_{r=1,2} \sum_{s=0,t_r} P_{jk,rs} v_{rs}, \mathbf{v}_{pq} \right) = 2P_{jk,pq}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Omega} (g_{jk}^3(x) Z_{pq}(x) - g_{jk}^2(x) \partial_n Z_{pq}(x)) ds_x \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\hat{Z}_{pq}(x) N^3(x, \nabla) \hat{Z}_{jk}(x) - \partial_z \hat{Z}_{pq}(x) N^2(x, \nabla) \hat{Z}_{jk}(x) \right) ds_x \\ &- \int_{\partial\Omega} \left(\mathbf{v}_{pq}(x) N^3(x, \nabla) \mathbf{v}_{jk}(x) - \partial_z \mathbf{v}_{pq}(x) N^2(x, \nabla) \mathbf{v}_{jk}(x) \right) ds_x \\ &= -E(\hat{Z}_{jk}, \hat{Z}_{pq}; \Omega) - E(\mathbf{v}_{jk}, \mathbf{v}_{pq}; \Pi \setminus \Omega). \end{aligned}$$

Итак, матрица $-2P$ (со знаком минус) – сумма двух положительно определенных матриц Грама, построенных при помощи билинейной формы (1.5) по тройкам линейно независимых функций \widehat{Z}_{jk} и \mathbf{v}_{jk} .

2) Введем кусочно-гладкую функцию

$$Z_{jk}^\#(x) = \begin{cases} Z_{jk}(x) - \mathbf{v}_{jk}(x), & x \in \Pi, \\ Z_{jk}(x), & x \in \Omega \setminus \overline{\Pi}, \end{cases} \quad (2.42)$$

которая удовлетворяет задаче

$$\Delta^2 Z_{jk}^\#(x) = 0, \quad x \in \Pi \cup (\Omega \setminus \overline{\Pi}),$$

$$N^q(x, \nabla) Z_{jk}^\#(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad q = 2, 3,$$

с условиями скачков на объединении отрезков $\varsigma_\pm = \varpi_\pm \setminus \overline{\partial\Omega}$

$$\begin{aligned} [Z_{jk}^\#]_\pm(x_2) &= \mathbf{v}_{jk}\left(\pm \frac{1}{2}, x_2\right), \\ \pm [\partial_y Z_{jk}^\#]_\pm(x_2) &= \pm \partial_y \mathbf{v}_{jk}\left(\pm \frac{1}{2}, x_2\right), \quad x \in \varsigma_\pm, \\ [N_\pm^q(\nabla) Z_{jk}^\#]_\pm(x_2) &= 0, \quad x \in \varsigma_\pm, \quad q = 2, 3, \end{aligned} \quad (2.43)$$

Здесь $[F]_\pm(x_2) = F\left(\pm \frac{1}{2} \pm 0, x_2\right) - F\left(\pm \frac{1}{2} \mp 0, x_2\right)$. Опять применим разными способами формулу интегрирования по частям. Во-первых, при помощи соотношений (2.38) находим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{\pm} \int_{\varsigma_\pm} \left([Z_{jk}^\#]_\pm(x_2) N^3(x, \nabla) Z_{pq}\left(\pm \frac{1}{2}, x_2\right) \right. \\ & \left. \mp [\partial_y Z_{jk}^\#]_\pm(x_2) N^2(x, \nabla) Z_{pq}\left(\pm \frac{1}{2}, x_2\right) \right) dx_2 \\ &= \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \sum_{\pm} \mp Q_{\pm\ell}(Z_{pq}, Z_{jk}^\#) \\ &= \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \sum_{\pm} \pm Q_{\pm\ell} \left(\pm \sum_{r=1,2} \sum_{s=0,t,r} P_{jk,rs} v_{rs}, \mathbf{v}_{pq} \right) = 2P_{jk,pq}. \end{aligned}$$

Во-вторых, последняя группа однородных условий скачков (2.43) позволяет заключить, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{\pm} \int_{\varsigma_{\pm}} \left([Z_{jk}^{\#}]_{\pm}(x_2) N^3(x, \nabla) Z_{pq} \left(\pm \frac{1}{2}, x_2 \right) \right. \\
& \quad \mp \left. [\partial_y Z_{jk}^{\#}]_{\pm}(x_2) N^2(x, \nabla) Z_{pq} \left(\pm \frac{1}{2}, x_2 \right) \right) dx_2 \\
& = \sum_{\pm} \int_{\varsigma_{\pm}} \left([Z_{jk}^{\#}]_{\pm}(x_2) N^3(x, \nabla) Z_{pq}^{\#} \left(\pm \frac{1}{2}, x_2 \right) \right. \\
& \quad \mp \left. [\partial_y Z_{jk}^{\#}]_{\pm}(x_2) N^2(x, \nabla) Z_{pq}^{\#} \left(\pm \frac{1}{2}, x_2 \right) \right) dx_2 \\
& = E(Z_{jk}^{\#}, Z_{pq}^{\#}; \Omega) + E(Z_{jk}^{\#}, Z_{pq}^{\#}; \Omega \setminus \Pi).
\end{aligned}$$

Подчеркнем, что нормаль n на ς_{\pm} внутренняя для множества $\Omega \setminus \Pi$. Итак, матрица $2P$ представлена как положительно определенная матрица Грама, построенная по линейно независимым функциям (2.42).

Предложение доказано. \square

§3. ВОЛНЫ, МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ И ЕЕ АСИМПТОТИКА

3.1. Собственные числа возмущенного пучка. Обратимся к возмущенному пучку (2.28), порожденному задачей (2.29), (2.30) со спектральным параметром (1.8)

Применим известные процедуры построения асимптотических разложений собственных чисел и векторов абстрактных операторных пучков (см. монографии [20, 21] и др.). Важным обстоятельством для вывода явных формул оказывается простой факт: у каждого из сужений $\mathfrak{A}_{\Lambda}^{\text{ev}}(\mathfrak{z})$ и $\mathfrak{A}_{\Lambda}^{\text{od}}(\mathfrak{z})$ пучка (2.27) на подпространства четных и нечетных функций, т.е. на

$$H_{\text{ev}}^{l+4} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left\{ \Phi \in H^{l+4} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) : \Phi(-y) = \Phi(y) \right\} \quad (3.1)$$

и

$$H_{\text{od}}^{l+4} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left\{ \Phi \in H^{l+4} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) : \Phi(-y) = -\Phi(y) \right\}, \quad (3.2)$$

собственное число $\mathfrak{z} = 0$ становится алгебраически простым, т.е. обладает одиночной жордановой цепочкой (2.24) и (2.26) соответственно.

В результате удается применить теорему¹ 32.3 [21], обслуживающей так называемый “невыврожденный одномерный случай”. Подчеркнем, что при наличии нескольких жордановых цепочек с разными длинами аналогичный результат пока неизвестен.

Для пучка $\mathfrak{A}_\Lambda^{\text{ev}}(\mathfrak{z})$ на подпространстве (3.1) примем стандартные (см. цитированные выше монографии) асимптотические анзацы

$$\mathfrak{z}_\varepsilon = \varepsilon \mathfrak{z}_{\text{ev}} + \tilde{\mathfrak{z}}_\varepsilon, \quad (3.3)$$

$$\Phi_\varepsilon(y) = \Phi^{10} + \varepsilon^2 \mathfrak{z}_\varepsilon^2 \Phi^{12}(y) + \varepsilon^4 \Phi'_{\text{ev}}(y) + \tilde{\Phi}_\varepsilon(y), \quad (3.4)$$

причем для остатков верны оценки

$$|\tilde{\mathfrak{z}}_\varepsilon| \leq c_0 \varepsilon^2, \quad \left\| \tilde{\Phi}_\varepsilon; H^{l+4} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\| \leq c_0 \varepsilon^5, \quad (3.5)$$

которые обеспечены общими результатами [20, 21], т.е. достаточно выполнить формальные вычисления отцепленных членов (3.3) и (3.4).

Подставим указанные формулы в уравнение

$$\mathfrak{A}_{\varepsilon^4}(\mathfrak{z}_\varepsilon) \Phi_\varepsilon = 0 \quad (3.6)$$

и соберем коэффициенты при одинаковых степенях величины \mathfrak{z}_ε . Анализируя коэффициенты при $\mathfrak{z}_\varepsilon^p$, $p = 0, 1, 2, 3$, видим, что полученные таким образом краевые задачи на интервале $(-1/2, 1/2) \ni y$ выполнены в силу определения элементов жордановой цепочки (2.24). Коэффициенты при $\varepsilon^4 = \Lambda$ и $\mathfrak{z}_\varepsilon^4 = \varepsilon^4 \mathfrak{z}_{\text{ev}}^4 + O(\varepsilon^5)$ образуют задачу

$$\begin{aligned} \partial_y^4 \Phi'_{\text{ev}}(y) = F(y) &:= \Phi^{10}(y) - \mathfrak{z}_{\text{ev}}^4 (\Phi^{10}(y) + 2\partial_y^2 \Phi^{12}(y)) \quad y \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \\ \pm \partial_y^3 \Phi'_{\text{ev}} \left(\pm \frac{1}{2} \right) &= G_\pm^3 := \mp (2 - \nu) \mathfrak{z}_{\text{ev}}^4 \partial_y \Phi^{12} \left(\pm \frac{1}{2} \right), \\ \partial_y^2 \Phi'_{\text{ev}} \left(\pm \frac{1}{2} \right) &= G_\pm^2 := -\nu \mathfrak{z}_{\text{ev}}^4 \Phi^{12} \left(\pm \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

¹В цитированной книге рассматриваются линейные несамосопряженные пучки, однако сведение квадратичного пучка к линейному очевидно.

Единственное условие разрешимости задачи (3.7) в классе четных функций переменной y принимает вид

$$0 = \int_{-1/2}^{1/2} \Phi^{10}(y)F(y)dy - \sum_{\pm} \left(G_{\pm}^3 \Phi^{10}\left(\pm \frac{1}{2}\right) \mp G_{\pm}^2 \partial_y \Phi^{10}\left(\pm \frac{1}{2}\right) \right) = 1 - \mathfrak{z}_{\text{ev}}^4(1 - \nu^2). \quad (3.8)$$

Игнорируя среднюю часть соотношения (3.8), решаем полученное алгебраическое уравнение и находим два вещественных и два чисто мнимых корня

$$\mathfrak{z}_{\text{ev}}^{\text{re}\pm} = \mp(1 - \nu^2)^{-1/4} = \pm\alpha_1^{-1/4} \quad \text{и} \quad \mathfrak{z}_{\text{ev}}^{\text{im}\pm} = \pm i(1 - \nu^2)^{-1/4} = \pm i\alpha_1^{-1/4} \quad (3.9)$$

(ср. первую формулу (2.33)).

На подпространстве (3.2) нечетных функций известные асимптотические анзацы и оценки остатков выглядят следующим образом:

$$\mathfrak{z}_{\varepsilon} = \varepsilon^2 \mathfrak{z}_{\text{od}} + \tilde{\mathfrak{z}}_{\varepsilon}, \quad (3.10)$$

$$\Phi_{\varepsilon}(y) = \Phi^{20}(y) + \varepsilon^4 \Phi'_{\text{od}}(y) + \tilde{\Phi}_{\varepsilon}(y) \quad (3.11)$$

и

$$|\tilde{\mathfrak{z}}_{\varepsilon}| \leq c_0 \varepsilon^4, \quad \left\| \tilde{\Phi}_{\varepsilon}; H^{l+4}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\| \leq c_0 \varepsilon^5 \quad (3.12)$$

(см. комментарий к неравенствам (3.5)). Различия в структуре разложений (3.3), (3.4) и (3.10), (3.11) объясняются разными длинами жордановых цепочек (2.24) и (2.25) — подробности построения анзацев для собственных пар операторных пучков можно найти, например, в книге [21, гл. 9], в частности, малые параметры ε в (3.3) и ε^2 в (3.10) равны Λ^{1/κ_1} и Λ^{1/κ_2} соответственно (см. (1.8) и (2.19)).

Подставим формулы (3.10) и (3.11) в уравнение (3.6) и соберем коэффициенты при $\Lambda = \varepsilon^4$ — коэффициенты при $1 = \varepsilon^0$ и ε^2 уничтожаются автоматически. В результате получим аналогичную (3.7) задачу

$$\begin{aligned} \partial_y^4 \Phi'_{\text{od}}(y) &= F(y) := \Phi^{20}(y) - 2\mathfrak{z}_{\text{od}}^2 \partial_y^2 \Phi^{20}(y) \quad y \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ \pm \partial_y^3 \Phi'_{\text{od}}\left(\pm \frac{1}{2}\right) &= G_{\pm}^3 := \mp(2 - \nu)\mathfrak{z}_{\text{od}}^2 \partial_y \Phi^{20}\left(\pm \frac{1}{2}\right), \\ \partial_y^2 \Phi'_{\text{od}}\left(\pm \frac{1}{2}\right) &= G_{\pm}^2 := -\nu \mathfrak{z}_{\text{od}}^2 \Phi^{20}\left(\pm \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Похожее на (3.8) единственное условие разрешимости задачи (3.13) в классе нечетных функций

$$0 = \int_{-1/2}^{1/2} \Phi^{20}(y)F(y)dy - \sum_{\pm} \left(G_{\pm}^3 \Phi^{20} \left(\pm \frac{1}{2} \right) \mp G_{\pm}^2 \partial_y \Phi^{20} \left(\pm \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{12} + 4\mathfrak{z}_{\text{od}}^2(1-\nu)$$

дает квадратное уравнение с двумя чисто мнимыми корнями

$$\mathfrak{z}_{\text{od}}^{\text{im}\pm} = \pm \frac{i}{4\sqrt{3}}(1-\nu)^{-1/2} = \pm \frac{i}{2\sqrt{6}}\alpha_2^{-1/2} \quad (3.14)$$

(ср. вторую формулу (2.35) и равенство $\|\Phi^{20}; L^2(-1/2, 1/2)\|^2 = 1/12$).

Сформулируем результат.

Теорема 3.4. *Существуют такие положительные ε_0 , ρ_0 и c_0 , что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ в ρ_0 -окрестности точки $\mathfrak{z} = 0 \in \mathbb{C}$ располагаются в точности шесть собственных чисел пучка $\mathfrak{z} \mapsto \mathfrak{A}_{\varepsilon^4}(\mathfrak{z})$, четыре чисто мнимых и два вещественных. Для этих чисел и соответствующих собственных векторов верны асимптотические формулы (3.3)–(3.5) и (3.10)–(3.12) с ингредиентами (3.9) и (3.14) соответственно.*

3.2. Волны. В силу представленной информации о собственных числах пучка (2.28) у задачи (2.29), (2.30) в полосе Π возникают следующие волны: осциллирующие, не имеющие пределов при $z \rightarrow \pm\infty$

$$\mathfrak{w}_{\text{ev}\varepsilon}^{\text{im}\pm}(x) = e^{\mathfrak{z}_{\text{ev}\varepsilon}^{\text{im}\pm} z} \Phi_{\text{ev}}^{\text{im}\pm}(y), \quad (3.15)$$

$$\mathfrak{w}_{\text{od}\varepsilon}^{\text{im}\pm}(x) = e^{\mathfrak{z}_{\text{od}\varepsilon}^{\text{im}\pm} z} \Phi_{\text{od}}^{\text{im}\pm}(y) \quad (3.16)$$

и экспоненциальные, исчезающие при $z \rightarrow \pm\infty$

$$\mathfrak{w}_{\text{ev}\varepsilon}^{\text{re}\pm}(x) = e^{\mathfrak{z}_{\text{ev}\varepsilon}^{\text{re}\pm} z} \Phi_{\text{ev}}^{\text{re}\pm}(y), \quad (3.17)$$

Громоздкие обозначения (3.15)–(3.17), согласованные с формулами (3.9), (3.14) и проясняющие строение волн, заменим компактными:

$$w_1^{\varepsilon\pm}(x) = a_1^{\varepsilon} e^{\pm i\varepsilon\gamma_1^{\varepsilon} z} W_1^{\varepsilon\pm}(y), \quad (3.18)$$

$$w_2^{\varepsilon\pm}(x) = a_2^{\varepsilon} e^{\pm i\varepsilon^2\gamma_2^{\varepsilon} z} W_2^{\varepsilon\pm}(y) \quad (3.19)$$

и соответственно

$$w_0^{\varepsilon\pm}(x) = a_1^{\varepsilon} e^{\mp\varepsilon\gamma_1^{\varepsilon} z} W_0^{\varepsilon\pm}(y). \quad (3.20)$$

Здесь a_p^ε — нормирующие множители, подлежащие вычислению, γ_p^ε — положительные величины, допускающие представления

$$\begin{aligned}\gamma_1^\varepsilon &= \gamma_1^0 + O(\varepsilon), & \gamma_1^0 &= (1 - \nu^2)^{-1/4}, \\ \gamma_2^\varepsilon &= \gamma_2^0 + O(\varepsilon), & \gamma_2^0 &= \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 - \nu)^{-1/2}\end{aligned}\quad (3.21)$$

(см. формулы (2.35) и (3.9), (3.14)), а для амплитудных частей верны вытекающие из (3.3)–(3.5) и (3.10)–(3.12) соотношения

$$\begin{aligned}W_1^{\varepsilon\pm}(y) &= \Phi^{10} - (\varepsilon\gamma_1^\varepsilon)^2\Phi^{12}(y) + O(\varepsilon^4), \\ W_2^{\varepsilon\pm}(y) &= \Phi^{20}(y) + O(\varepsilon^4), \\ W_0^{\varepsilon\pm}(y) &= \Phi^{10} + (\varepsilon\gamma_1^\varepsilon)^2\Phi^{12}(y) + O(\varepsilon^4).\end{aligned}$$

Таким образом, при учете определений (2.12), (2.13) и (2.36), (2.37) обнаруживаем, что на конечном участке волновода Ω вне резонатора Θ (т.е. в начале рукавов Π_R^\pm) для волн (3.18)–(3.20) выполнены представления

$$\begin{aligned}w_1^{\varepsilon\pm}(y, z) &= a_1^\varepsilon(v_{10} \pm i\varepsilon\gamma_1^\varepsilon v_{11}(z) - \alpha_1(\varepsilon\gamma_1^\varepsilon)^2\mathbf{v}_{11}(y, z) \\ &\quad \pm i\alpha_1(\varepsilon\gamma_1^\varepsilon)^3\mathbf{v}_{10}(y, z) + O(\varepsilon^4)),\end{aligned}\quad (3.22)$$

$$w_2^{\varepsilon\pm}(y, z) = a_2^\varepsilon(v_{20}(y) \mp i\alpha_2\varepsilon^2\gamma_2^\varepsilon\mathbf{v}_{20}(y, z) + O(\varepsilon^4)),\quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}w_0^{\varepsilon\pm}(y, z) &= a_1^\varepsilon(v_{10} \mp \varepsilon\gamma_1^\varepsilon v_{11}(z) \\ &\quad + \alpha_1(\varepsilon\gamma_1^\varepsilon)^2\mathbf{v}_{11}(y, z) \pm \alpha_1(\varepsilon\gamma_1^\varepsilon)^3\mathbf{v}_{10}(y, z) + O(\varepsilon^4)).\end{aligned}\quad (3.24)$$

Итак, вычислив форму (2.32) при $u, v = w_p^{\varepsilon\pm}$ и $\ell = R + 1$ видим, что традиционные (см., например, книгу [5, гл. 5] и статьи [11, 12, 18, 19]) условия ортогональности и нормировки осциллирующих волн (3.18), (3.19)

$$Q_\ell(w_p^{\varepsilon\pm}, w_q^{\varepsilon\pm}) = \pm i\delta_{p,q}\delta_{\pm,\vartheta}, \quad p, q = 1, 2, \vartheta = \pm, \quad (3.25)$$

справедливы при таких нормирующих множителях:

$$a_1^\varepsilon = (4\alpha_1)^{-1/2}(\gamma_1^0)^{-3/2}\varepsilon^{-3/2}(1 + O(\varepsilon)), \quad (3.26)$$

$$a_2^\varepsilon = (2\alpha_2\gamma_2^0)^{-1/2}\varepsilon^{-1}(1 + O(\varepsilon)).$$

Для экспоненциальных волн (3.20) верны равенства

$$Q_\ell(w_0^{\varepsilon\pm}, w_0^{\varepsilon\pm}) = 0, \quad Q_\ell(w_0^{\varepsilon-}, w_0^{\varepsilon+}) = 1. \quad (3.27)$$

Первое выполнено потому, что волны $w_0^{\varepsilon\pm}$ вещественные, а второе – благодаря нормировке волн (3.18); при этом равенства $Q_\ell(w_p^{\varepsilon+}, w_p^{\varepsilon-}) = 0$ обеспечено связью

$$w_p^{\varepsilon-} = \overline{w_p^{\varepsilon+}} \quad (3.28)$$

волн (3.18) и (3.19). Подчеркнем, что пучки (2.23) и (2.28) зависят от квадрата переменной \mathfrak{z} , и поэтому нормировки волн $w_1^{\varepsilon+}$ и $w_2^{\varepsilon+}$ влекут за собой формулы (3.25) и (3.27).

Подведем итог. Согласно принципу излучения Умова–Мандельштама [22, 23] (см. также монографии [24, гл. 1], [5, гл. 5] и статьи [18, 19], относящиеся к задачам теории упругости) волны (3.18) и (3.19) являются уходящими в рукавах Π_R^\pm и допускаются в разложение решений вместе с экспоненциально затухающими волнами (3.20). Подчеркнем, что в рассматриваемом случае такая же классификация волн (3.15) и (3.16) получается на основе принципа излучения Зоммерфельда и принципа предельного поглощения, которые вступают в противоречие с универсальным энергетическим принципом Умова–Мандельштама в несколько иных ситуациях (см. цитированную выше литературу).

3.3. Матрица рассеяния и формулировка теоремы об асимптотике. Как показано в [5, гл. 5], вне зависимости от того, имеет или нет задача (1.1), (1.2) со спектральным параметром (1.8) захваченную волну, существуют решения

$$Z_j^{\varepsilon\pm}(x) = \chi_\mp(z) w_j^{\varepsilon\pm}(x) + \sum_{\vartheta=\pm} \chi_\vartheta(z) \sum_{k=1,2} S_{kj}^{\varepsilon\vartheta\pm} w_k^{\varepsilon\vartheta}(x) + \tilde{Z}_j^{\varepsilon\pm}(x) \quad (3.29)$$

с исчезающим на бесконечности остатком $\tilde{Z}_j^{\varepsilon\pm}$ и коэффициентами $S_{kj}^{\varepsilon\vartheta\pm}$, образующую (4×4) -матрицу

$$S^\varepsilon = \begin{pmatrix} S_{11}^{\varepsilon++} & S_{11}^{\varepsilon+-} & S_{12}^{\varepsilon++} & S_{12}^{\varepsilon+-} \\ S_{11}^{\varepsilon-+} & S_{11}^{\varepsilon--} & S_{12}^{\varepsilon-+} & S_{12}^{\varepsilon--} \\ S_{21}^{\varepsilon++} & S_{21}^{\varepsilon+-} & S_{22}^{\varepsilon++} & S_{22}^{\varepsilon+-} \\ S_{21}^{\varepsilon-+} & S_{21}^{\varepsilon--} & S_{22}^{\varepsilon-+} & S_{22}^{\varepsilon--} \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

называемую матрицей рассеяния и являющуюся² унитарной (в силу соотношений (3.25)) и симметричной (в силу связей (3.28)). В следующем пункте будет построена формальная асимптотика левых верхнего и нижнего (2×2) -блоков $S_{(11)}^{\varepsilon+}$ и $S_{(21)}^{\varepsilon+}$ матрицы (3.30), а в п. 4 § 4 асимптотические формулы будут обоснованы. Ввиду равнозначности левого

²Простой способ проверки этих свойств можно найти, например, в статье [11].

и правого рукавов Π_R^\pm волновода Ω правые блоки $S_{(12)}^{\varepsilon-}$ и $S_{(22)}^{\varepsilon-}$ матрицы S^ε приобретают аналогичное строение. В итоге будет установлено следующее утверждение.

Теорема 3.5. *Существуют такие положительные ε_0 и c_0 , что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ справедливо неравенство*

$$|S^\varepsilon - \mathbb{I}_4| \leq c_0 \varepsilon, \quad (3.31)$$

где \mathbb{I}_m – единичная матрица размером $m \times m$.

Асимптотическая формула (3.31) указывает на почти полное прохождение волн $w_k^{\varepsilon+}$ из левого Π_R^- в правый рукав Π_R^+ , так как коэффициент прохождения равен $1 + O(\varepsilon)$, а остальные коэффициенты рассеяния суть $O(\varepsilon)$. Иными словами, наблюдается инвертированная аномалия Вайнштейна.

3.4. Формальная асимптотика решения дифракционной задачи. Асимптотику решения (3.29) при $j = 1$ ищем в виде

$$\begin{aligned} Z_1^{\varepsilon+}(x) &= \chi_\mp(z) w_1^{\varepsilon+}(x) \\ &+ \sum_{\pm} \chi_{\pm}(z) \left((S_{11}^{0\pm+} + \varepsilon S_{11}^{1\pm+} + \varepsilon^2 S_{11}^{2\pm+} + \varepsilon^3 S_{11}^{3\pm+} + \dots) w_1^{\varepsilon\pm}(x) \right. \\ &+ \left. (S_{21}^{0\pm+} + \varepsilon^2 S_{21}^{1\pm+} + \dots) w_2^{\varepsilon\pm}(x) \right) \\ &+ \sum_{\pm} \chi_{\vartheta}(z) (T_1^{0\pm+} + \varepsilon T_1^{1\pm+} + \varepsilon^2 T_1^{2\pm+} + \varepsilon^3 T_1^{3\pm+} + \dots) w_0^{\varepsilon\pm}(x) \\ &+ a_1^\varepsilon \sum_{r=0}^3 (\varepsilon \gamma_1^\varepsilon)^r Y_1^r(x) + a_2^\varepsilon \sum_{s=0}^1 (\varepsilon^2 \gamma_2^\varepsilon)^s Y_2^s(x) + \dots \end{aligned} \quad (3.32)$$

Здесь и далее многоточие заменяет младшие асимптотические члены, не существенные для предпринимаемого формального анализа. По сравнению с (3.29) в представлении (3.32) отделены волны $T_1^{\varepsilon\pm+} w_0^{\varepsilon\pm}(y, z)$, затухающие при $z \rightarrow \pm\infty$ с медленной скоростью (см. определения (3.20) и (3.21)). Вместе с тем решения $Y_k^r \in W_\beta^{l+4}(\Omega)$ задач

$$\Delta^2 Y_k^r(x) = f_k^r(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.33)$$

$$N^q(x, \nabla) Y_k^r(x) = g_k^{rq}(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad q = 2, 3, \quad (3.34)$$

предназначенные для компенсации невязок, которые появляются в равенствах (1.1), (1.2) вследствие умножения волн $S_{11}^{\varepsilon\pm+} w_k^{\varepsilon\pm}(y, z)$,

$T_1^{\varepsilon\pm\pm} w_0^{\varepsilon\pm}(y, z)$ и $S_{21}^{\varepsilon\pm\pm} w_k^{\varepsilon\pm}(y, z)$ на срезающие функции (2.8), затухают с фиксированной (не зависящей от ε) скоростью.

С целью вычислить упомянутые невязки воспользуемся разложениями (3.22)–(3.24), справедливыми на носителе $\{x \in \overline{\Pi} : \pm z \in [R, 2R]\}$ коэффициентов коммутаторов

$$[L, \chi_{\pm}] = \{[\Delta^2, \chi_{\pm}]; [N^2, \chi_{\pm}]; [N^2, \chi_{\pm}]\}. \quad (3.35)$$

Применяя векторную запись (3.35) правых частей $F^r = \{f^r; g^{r2}; g^{r3}\}$ задач (3.33), (3.34) и собирая коэффициенты при выражениях $a_k^{\varepsilon} \varepsilon^r$ с $r = 0, 1$, находим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1^0 &= -[L, \chi_-](1 + S_{11}^{0-+} + T_1^{0-+})v_{10} - [L, \chi_+](S_{11}^{0++} + T_1^{0++})v_{10}, \\ \mathcal{F}_2^0 &= -[L, \chi_-]S_{21}^{0-+}v_{20} - [L, \chi_+]S_{21}^{0++}v_{20} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1^1 &= -[L, \chi_-](i - iS_{11}^{0-+} + T_1^{0-+})v_{11} - [L, \chi_+](iS_{11}^{0++} - T_1^{0++})v_{11} \\ &\quad - [L, \chi_-](S_{11}^{1-+} + T_1^{0-+})v_{10} - [L, \chi_+](S_{11}^{1++} + T_1^{1++})v_{10}. \end{aligned}$$

Можно было бы посредством анализа шести условий разрешимости задач (3.33), (3.34) при $r = 0, 1$ обнаружить связи между свободными коэффициентами $S_{11}^{0\pm\pm}$, $T_1^{0\pm\pm}$ и $S_{21}^{0\pm\pm}$, однако проще угадать эти связи, так как процедура обоснования построенных асимптотик подтвердит правильность догадки. Именно, простые выкладки показывают, что функции

$$Y_1^0 = (1 - \chi_+ - \chi_-)(S_{11}^{0++} + T_1^{0++})v_{10}, \quad (3.36)$$

$$Y_2^0 = (1 - \chi_+ - \chi_-)S_{21}^{0++}v_{20}, \quad (3.37)$$

имеющие компактные носители, удовлетворяют равенствам (3.33), (3.34) с индексами $r = 0$ и $k = 1, 2$ при выполнении двух соотношений

$$1 + S_{11}^{0-+} + T_1^{0-+} = S_{11}^{0++} + T_1^{0++}, \quad (3.38)$$

$$S_{21}^{0-+} = S_{21}^{0++}. \quad (3.39)$$

Точно так же для финитной функции

$$Y_1^1 = (1 - \chi_+ - \chi_-)((iS_{11}^{0++} - T_1^{0++})v_{11} + (S_{11}^{1++} + T_1^{1++})v_{10}), \quad (3.40)$$

верны равенства (3.33), (3.34) с $r = 1$ и $k = 1$ при таких требованиях:

$$i - iS_{11}^{0-+} + T_1^{0-+} = iS_{11}^{0++} - T_1^{0++}, \quad (3.41)$$

$$S_{11}^{1-+} + T_1^{1-+} = S_{11}^{1++} + T_1^{1++}. \quad (3.42)$$

Начатую простую процедуру можно продолжить, однако соответствующие выражения оказываются излишне громоздкими. Вместе с тем, как станет понятно в § 4 (см. замечание 4.5), вычислить младшие члены асимптотики коэффициентов $S_{k1}^{\varepsilon\pm\pm}$ и $T_1^{\varepsilon\pm\pm}$ при помощи уже введенных специальных решений не удастся. При этом возможность отыскания затухающих решений $Y_k^r \in W_\beta^{l+4}(\Omega)$ задач (3.33), (3.34) не требует знания точных значений младших членов, но только соблюдения некоторых соотношений между ними (см., например, связь (3.42) основных поправочных членов), что получится сделать благодаря “излишнему” количеству свободных постоянных (см. замечание 3.1). Поэтому в § 4 все-таки удастся построить подходящее асимптотическое приближение к решениям (3.29) и без полной реализации намеченной и достаточно простой процедуры.

Примем упрощающие обозначения, а именно, заменим многоточие слагаемые, включающие названные младшие асимптотические члены, и оставим только те, в которых фигурируют $S_{k1}^{0\pm\pm}$ и $T_1^{0\pm\pm}$. В результате правые части задач для Y_1^2 и Y_2^2 запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} F_1^2 &= -[L, \chi_-] \alpha_1 (-1 - S_{11}^{0-+} + T_1^{0-+}) \mathbf{v}_{10} \\ &\quad - [L, \chi_+] (-S_{11}^{0++} + T_1^{0++}) \mathbf{v}_{10} + \dots, \\ F_2^2 &= -i[L, \chi_-] S_{21}^{0-+} \mathbf{v}_{20} + i[L, \chi_+] S_{21}^{0++} \mathbf{v}_{20} + \dots \end{aligned} \quad (3.43)$$

Отцепленные в (3.43) фрагменты можно компенсировать при помощи найденных в теореме 2.3 решений однородной задачи (2.1), (2.2), в разложениях которых фигурируют полиномы (2.36), (2.37). В самом деле, введем ограничения

$$-1 - S_{11}^{0-+} + T_1^{0-+} = -S_{11}^{0++} + T_1^{0++}, \quad (3.44)$$

$$iS_{21}^{1-+} = -iS_{21}^{1++} \quad (3.45)$$

и положим

$$Y_1^2 = \alpha_1 (-S_{11}^{0++} + T_1^{0++}) (\tilde{Z}_{11} + (1 - \chi_+ - \chi_-) \mathbf{v}_{11}) + \dots, \quad (3.46)$$

$$Y_2^2 = -i\alpha_2 S_{21}^{0++} (\tilde{Z}_{20} + (1 - \chi_+ - \chi_-) \mathbf{v}_{20}) + \dots$$

При этом $\tilde{Z}_{11} \in W_\beta^{l+4}(\Omega)$ и $\tilde{Z}_{20} \in W_\beta^{l+4}(\Omega)$ – остатки в разложениях (2.39), а под многоточием подразумеваются линейные комбинации функций (3.36), (3.40) и (3.37), которые включают полиномы v_{10} , v_{11} и v_{20} , умноженные на срезку $1 - \chi_+ - \chi_-$ с компактным носителем, и зависят от элементов матрицы поляризации. Как уже упоминалось,

надлежащих выбор коэффициентов линейных комбинаций приводит к нужным решениям из класса $W_\beta^{l+4}(\Omega)$.

Важное наблюдение состоит в том, что условия (3.39) и (3.45) влекут за собой равенства

$$S_{21}^{1\pm+} = 0. \tag{3.47}$$

Замечание 3.1. Трех полученных соотношений (3.38), (3.41) и (3.44) недостаточно для отыскания четырех неизвестных $S_{11}^{0\pm+}$ и $T_1^{0\pm+}$. Точно так же младшие асимптотические члены $S_{11}^{r\pm+}$, $T_1^{r\pm+}$ и $S_{21}^{r\pm+}$ при $r \geq 1$ обнаруживаются в достаточном количестве для соблюдения всех наложенных связей. \boxtimes

Недостающая – четвертая – связь коэффициентов $S_{11}^{0\pm+}$ и $T_1^{0\pm+}$ получается в результате анализа решения Y_1^3 задачи (3.33), (3.34), правые части которой включают полином \mathbf{v}_{10} , а само решение конструируется при помощи аналогичной (3.46) формулы по решению Z_{10} из теоремы 2.3. Повторив с некоторыми усложнениями прежние рассуждения, получаем, что

$$i - iS_{11}^{0-+} - T_1^{0-+} = iS_{11}^{0++} + T_1^{0++}. \tag{3.48}$$

Нетрудно угадать решение

$$S_{11}^{0++} = 1, \quad T_1^{0++} = S_{11}^{0-+} = T_1^{0-+} = 0 \tag{3.49}$$

полученной системы линейных алгебраических уравнений (3.38), (3.41), (3.44), (3.48). Ее матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ i & -1 & i & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ i & 1 & i & 1 \end{pmatrix}$$

невырожденная, а значит, решение (3.49) единственное, причем оно согласовано с асимптотической формулой, анонсированной в теореме 3.5.

Итак, главные члены асимптотики решения (3.32) задачи (1.1), (1.2) с малым параметром (1.8) построены, причем намеченная процедура легко приспособливается к поиску младших членов, формулы для которых, к сожалению, не дают сколь-нибудь полезной информации.

Отметим, что равенство (3.47) позволяет улучшить мажоранту $c_0\varepsilon$ в оценке (3.31) для элементов блока $S_{(21)}^{\varepsilon+}$, это обстоятельство не затрагивает существо результата, но загромождает его формулировку.

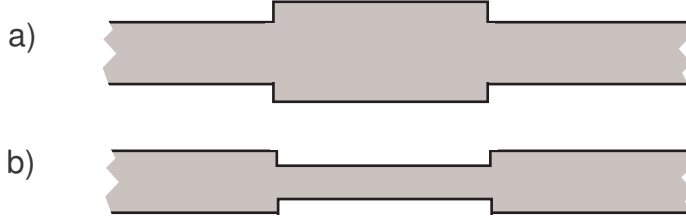


Рис. 2. Многоугольные пластины с расширением (а) и сужением (б).

Замечание 3.2. Требование гладкости границы $\partial\Omega$ не использовалось по существу, а только для упрощения изложения. Теорема 3.5 и предложение 2.1 сохраняют силу и при наличии угловых точек (см. рис. 2), однако в рассуждениях приходится иметь дело с обобщенными постановками задач.

§4. ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

4.1. Еще раз о статической задаче. Полиномиальное свойство (1.7) квадратичной формы (1.5) позволяет (см., например, обзор [10, п. 4 § 3]) вычислить при $\Lambda = 0$ размерность коядра оператора

$$A_{\beta}^l(\Lambda) : W_{\beta}^{l+4}(\Omega) \rightarrow \mathcal{R}W_{\beta}^l(\Omega; \partial\Omega) := W_{\beta}^l(\Omega) \times W_{\beta}^{l+3/2}(\partial\Omega) \times W_{\beta}^{l+1/2}(\partial\Omega), \quad \beta \in (0, \beta_0), \quad (4.1)$$

(статической) задачи Неймана для бигармонического уравнения (2.1), (2.2) по формуле

$$\dim \text{coker } A_{\beta}^l(0) = d \times m,$$

где $d = 3$ – размерность пространства полиномов, аннулирующих квадратичную форму (1.5), а $m = 2$ – количество выходов на бесконечность. Дефектные функционалы, образующие подпространство сокер $A_{\beta}^l(0)$, приобретают вид

$$F(v) = (f, v)_{\Omega} - (g^3, v)_{\partial\Omega} + (g^2, \partial_n v)_{\partial\Omega}, \quad (4.2)$$

где v – элементы ядра оператора $A_{-\beta}^l(0)$ (в формуле (4.1) положительный весовой показатель β заменяется отрицательным $-\beta \in (-\beta_0, 0)$). Базис в подпространстве $\ker A_{-\beta}^l(0)$ можно взять таким:

$$\{v_{jk}, Z_{jk} \mid j = 1, 2, k = 0, t_j\}.$$

В самом деле в п. 2 и п. 6 §2 были указаны $3 + 3 = 6$ решений (2.12), (2.13) и (2.39) однородной задачи (2.1), (2.2) с полиномиальным ростом на бесконечности, которые попадают в пространство $W_{-\beta}^{l+4}(\Omega)$ и являются линейно независимыми, а значит, они образуют базис в шестимерном ядре оператора $A_{-\beta}^l(0)$.

Теорема 4.6. Пусть правые части (2.21) задачи (2.1), (2.2), сумма норм которых обозначена \mathcal{N}_{β}^l , подчинены условиям ортогональности

$$F(v_{jk}) = 0, \quad j = 1, 2, k = 0, t_j, \quad (4.3)$$

$$F(Z_{jk}) = 0, \quad j = 1, 2, k = 0, t_j. \quad (4.4)$$

Тогда задача имеет единственное решение $u^0 \in W_{\beta}^{l+4}(\Omega)$ и для него верна оценка

$$\|u^0; W_{\beta}^{l+4}(\Omega)\| \leq c_0 \mathcal{N}_{\beta}^l. \quad (4.5)$$

Замечание 4.3. Оператор (4.1) – мономорфизм, но существует множество способов расширить область определения так, чтобы он стал изоморфизмом.

4.2. Весовое пространство с отделенной асимптотикой. При спектральном параметре (1.8) рассмотрим краевую задачу

$$\Delta^2 u^{\varepsilon}(x) - \varepsilon^4 u^{\varepsilon}(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.6)$$

$$N^q(x, \nabla) u^{\varepsilon}(x) = g^q(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad q = 2, 3, \quad (4.7)$$

как возмущение задачи (2.1), (2.2). При достаточно малом $\varepsilon > 0$ оператор (4.1) задачи (4.6), (4.7) остается фредгольмовым мономорфизмом, а оператор $A_{-\beta}^l(\varepsilon^4)$ – фредгольмовым эпиморфизмом с прежними размерностями подпространств $\text{соker } A_{-\beta}^l(\varepsilon^4)$ и $\ker A_{-\beta}^l(\varepsilon^4)$.

Снабдим задачу (4.6), (4.7) условиями излучения Умова–Мандельштама (см. п. 2 §3) и определим ее оператор $\mathcal{A}_{\beta}^l(\varepsilon^4)$ на весовом пространстве $\mathcal{W}_{\beta, \varepsilon}^{l+4}(\Omega)$ с отделенной асимптотикой, составленном из функций

$$u^{\varepsilon}(x) = \tilde{u}^{\varepsilon}(x) + \sum_{\pm} \chi_{\pm}(z) \sum_{r=0,1,2} b_r^{\varepsilon \pm} w_r^{\varepsilon \pm}(x) \quad (4.8)$$

с ингредиентами

$$\tilde{u}^\varepsilon \in W_\beta^{l+4}(\Omega), \quad b^\varepsilon = (b_0^{\varepsilon+}, b_0^{\varepsilon-}, b_1^{\varepsilon+}, b_1^{\varepsilon-}, b_2^{\varepsilon+}, b_2^{\varepsilon-}) \in \mathbb{C}^6 \quad (4.9)$$

и снабженном нормой

$$\|u^\varepsilon; \mathcal{W}_{\beta,\varepsilon}^{l+4}(\Omega)\| = \left(\varepsilon^3 \|\tilde{u}^\varepsilon; W_\beta^{l+4}(\Omega)\|^2 + |b^\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \quad (4.10)$$

Поскольку в правой части (4.8) фигурируют уходящие $w_1^{\varepsilon\pm}$, $w_2^{\varepsilon\pm}$ и затухающая $w_0^{\varepsilon\pm}$ волны (3.22), (3.23) и (3.24) в рукавах Π_R^\pm , функция u^ε действительно подчинена упомянутым условиям излучения. Норма (4.10) является гильбертовой, однако гильбертова структура пространства $\mathcal{W}_{\beta,\varepsilon}^{l+4}(\Omega)$ в данной работе востребована не будет.

Волны $w_r^{\varepsilon\pm}$ удовлетворяют задаче (2.29), (2.30) в полосе Π , и следовательно, отображение

$$\mathcal{A}_\beta^l(\varepsilon^4) : \mathcal{W}_{\beta,\varepsilon}^{l+4}(\Omega) \rightarrow \mathcal{R}W_\beta^l(\Omega; \partial\Omega) := W_\beta^l(\Omega) \times W_\beta^{l+3/2}(\partial\Omega) \times W_\beta^{l+1/2}(\partial\Omega) \quad (4.11)$$

непрерывно, а остаток $\tilde{u}^\varepsilon \in W_\beta^{l+4}(\Omega)$ в представлении (4.8) становится решением задачи (4.6), (4.7) с правыми частями

$$\begin{aligned} \tilde{f}^\varepsilon &= f - \sum_{\pm} [\Delta^2, \chi_{\pm}] \sum_{r=0,1,2} b_r^{\varepsilon\pm} w_r^{\varepsilon\pm} \in W_\beta^l(\Omega), \\ \tilde{g}^{q\varepsilon} &= g^q - \sum_{\pm} [N^q, \chi_{\pm}] \sum_{r=0,1,2} b_r^{\varepsilon\pm} w_r^{\varepsilon\pm} \in W_\beta^{l-q+7/2}(\partial\Omega), \quad q = 2, 3. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Из-за больших множителей (3.26), присутствующих в волнах (3.22)–(3.24), $\mathcal{R}W_\beta^l(\Omega; \partial\Omega)$ -нормы вычитаемых в правых частях (4.12) мажорируются величиной

$$c(\|(f, g^2, g^3); \mathcal{R}W_\beta^l(\Omega; \partial\Omega)\| + \varepsilon^{-3/2}|b^\varepsilon|),$$

а значит, множитель $\varepsilon^{3/2}$ при $\|\tilde{u}^\varepsilon; W_\beta^{l+4}(\Omega)\|$ в формуле (4.10) уравнивает вклады величин (4.9) в составную норму. Кроме того, следует ожидать, что норма оператора (4.11) окажется равной $O(\varepsilon^{-3/2})$.

Ближайшая цель – убедиться в том, что $\mathcal{A}_\beta^l(\varepsilon^4)$ – изоморфизм, и оценить норму обратного. Такой результат позволит без труда обосновать асимптотику матрицы рассеяния, построенную формально в § 3, так как в норме (4.10) фигурируют модули коэффициентов рассеяния.

Замечание 4.4. В отличие от спектральной задачи Неймана для оператора Лапласа, описывающей акустические волноводы, задача Неймана (1.1), (1.2) для бигармонического оператора может на сколь угодно малой частоте приобрести захваченную волну, т.е. исчезающую на бесконечности собственную функцию из класса H^4 . Причина такого расхождения для акустических и упругих волноводов – наличие у задачи (2.29), (2.30) экспоненциальных волн (3.24) с малым показателем $O(\varepsilon)$ скорости затухания при $z \rightarrow \pm\infty$, которые заведомо отсутствуют у оператора Гельмгольца $\Delta + \varepsilon^4$. В сообщении [25] построен соответствующий пример, однако для пластины Кирхгофа на компактном винклеровском основании [26, 27] с малым коэффициентом податливости. Последнее обстоятельство устраняет линейные функции φ из ядра оператора соответствующей статической задачи, т.е. противоречия с теоремой 4.7 нет.

4.3. Почти обратный оператор. Построим “почти обратный” оператор

$$\mathcal{T}_\beta^l(\varepsilon) : \mathcal{R}W_\beta^l(\Omega; \partial\Omega) \rightarrow W_{\beta,\varepsilon}^{l+4}(\Omega), \quad (4.13)$$

для которого

$$\|\mathcal{A}_\beta^l(\varepsilon)\mathcal{T}_\beta^l(\varepsilon) - \text{Id} : \mathcal{R}W_\beta^l(\Omega; \partial\Omega) \rightarrow \mathcal{R}W_\beta^l(\Omega; \partial\Omega)\| \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow +0; \quad (4.14)$$

здесь Id – тождественное отображение. В итоге оператор $\mathcal{A}_\beta^l(\varepsilon)\mathcal{T}_\beta^l(\varepsilon)$ обратим при малом ε , а значит, обратный оператор для (4.11) выглядит следующим образом:

$$(\mathcal{A}_\beta^l(\varepsilon))^{-1} = \mathcal{T}_\beta^l(\varepsilon)(\mathcal{A}_\beta^l(\varepsilon)\mathcal{T}_\beta^l(\varepsilon))^{-1}. \quad (4.15)$$

Приближенное решение $u^\varepsilon = \mathcal{T}_\beta^l(\varepsilon)F$ абстрактного уравнения

$$\mathcal{A}_\beta^l(\varepsilon)u^\varepsilon = (f, g^2, g^3) = F \in \mathcal{R}W_\beta^l(\Omega; \partial\Omega) \quad (4.16)$$

ищем в виде (4.8), где столбец коэффициентов $b^\varepsilon \in \mathbb{C}^6$ подлежит вычислению, а $\tilde{u}^\varepsilon \in W_\beta^{l+4}(\Omega)$ – решение задачи (4.6), (4.7) с правыми частями (4.12). Существование такого затухающего решения обеспечено шестью условиями ортогональности (4.3), (4.4). Употребим произвол в выборе коэффициентов $b_r^{\varepsilon\pm}$ для выполнения этих условий.

Сначала займемся равенствами (4.3), которые перепишем следующим образом:

$$0 = \tilde{F}^\varepsilon(v_{jk}) = F(v_{jk}) - \sum_{\pm} \sum_{r=0,1,2} F_{jkr}^{\varepsilon\pm} b_r^{\varepsilon\pm}. \quad (4.17)$$

Здесь F – функционал (4.2) и

$$F_{jkr}^{\varepsilon\pm} = ([\Delta^2, \chi_{\pm}]w_r^{\varepsilon\pm}, v_{jk})_{\Omega} - ([N^3, \chi_{\pm}]w_r^{\varepsilon\pm}, v_{jk})_{\partial\Omega} \\ + ([N^2, \chi_{\pm}]w_r^{\varepsilon\pm}, \partial_n v_{jk})_{\partial\Omega}.$$

Применив формулу Грина (2.31), получим при учете разложений (3.22)–(3.24) и соотношений (2.38), что

$$F_{100}^{\varepsilon\pm} = \pm Q_{\pm\ell}(w_0^{\varepsilon\pm}, v_{10}) = a_1^{\varepsilon}\alpha_1(\varepsilon\gamma_1^{\varepsilon})^3 Q_{\ell}(\mathbf{v}_{10}, v_{10}) = -a_1^{\varepsilon}\alpha_1(\varepsilon\gamma_1^{\varepsilon})^3,$$

$$F_{110}^{\varepsilon\pm} = \pm a_1^{\varepsilon}\alpha_1(\varepsilon\gamma_1^{\varepsilon})^2 Q_{\ell}(\mathbf{v}_{11}, v_{11}) = \mp a_1^{\varepsilon}\alpha_1(\varepsilon\gamma_1^{\varepsilon})^2,$$

$$F_{200}^{\varepsilon\pm} = 0;$$

$$F_{101}^{\varepsilon\pm} = \pm Q_{\pm\ell}(w_1^{\varepsilon\pm}, v_{10}) = ia_1^{\varepsilon}\alpha_1(\varepsilon\gamma_1^{\varepsilon})^3 Q_{\ell}(\mathbf{v}_{10}, v_{10}) = -ia_1^{\varepsilon}\alpha_1(\varepsilon\gamma_1^{\varepsilon})^3,$$

$$F_{111}^{\varepsilon\pm} = \mp a_1^{\varepsilon}\alpha_1(\varepsilon\gamma_1^{\varepsilon})^2 Q_{\ell}(\mathbf{v}_{11}, v_{11}) = \pm a_1^{\varepsilon}\alpha_1(\varepsilon\gamma_1^{\varepsilon})^2,$$

$$F_{201}^{\varepsilon\pm} = 0;$$

$$F_{102}^{\varepsilon\pm} = 0,$$

$$F_{112}^{\varepsilon\pm} = 0,$$

$$F_{202}^{\varepsilon\pm} = \pm Q_{\pm\ell}(w_2^{\varepsilon\pm}, v_{20}) = -ia_2^{\varepsilon}\alpha_2\varepsilon^2\gamma_2^{\varepsilon} Q_{\ell}(\mathbf{v}_{20}, v_{20}) = ia_2^{\varepsilon}\alpha_2\varepsilon^2\gamma_2^{\varepsilon}. \quad (4.18)$$

Следовательно, уравнения (4.17) принимают вид

$$-b_0^{\varepsilon+} - b_0^{\varepsilon-} - ib_1^{\varepsilon+} - ib_1^{\varepsilon-} = (\alpha_1 a_1^{\varepsilon})^{-1}(\varepsilon\gamma_1^{\varepsilon})^{-3} F(v_{10}), \\ -b_0^{\varepsilon+} + b_0^{\varepsilon-} + b_1^{\varepsilon+} - b_1^{\varepsilon-} = (\alpha_1 a_1^{\varepsilon})^{-1}(\varepsilon\gamma_1^{\varepsilon})^{-2} F(v_{11}), \quad (4.19) \\ +ib_2^{\varepsilon+} + ib_2^{\varepsilon-} - = (\alpha_2 a_2^{\varepsilon})^{-1}(\varepsilon^2\gamma_2^{\varepsilon})^{-1} F(v_{20}).$$

Итак, обнаружены три линейные связи (4.19) для коэффициентов из столбца b^{ε} . Еще три связи возникают после обработки равенств

$$0 = \tilde{F}^{\varepsilon}(Z_{jk}) = F(Z_{jk}) - \sum_{\pm} \sum_{r=0,1,2} G_{jkr}^{\varepsilon\pm} b_r^{\varepsilon\pm}, \quad (4.20)$$

проистекающих от условий разрешимости (4.4). Подобные (4.18) равенства, полученные при помощи соотношений (2.38) и (2.39), усложняются из-за присутствия в последних элементов матрицы поляризации P . В результате несложных, но долгих подсчетов получаем, что

$$\begin{aligned}
G_{100}^{\varepsilon\pm} &= \pm Q_{\pm\ell}(w_0^{\varepsilon\pm}, Z_{10}) = \pm Q_{\pm\ell}(w_0^{\varepsilon\pm}, \mathbf{v}_{10} \pm P_{10,10}v_{10} \pm P_{10,11}v_{11} \\
&\quad \pm P_{10,20}v_{20}) = a_1^\varepsilon(\pm 1 \mp \alpha_1(\varepsilon\gamma_1^\varepsilon)^3 P_{10,10} - \alpha_1(\varepsilon\gamma_1^\varepsilon)^2 P_{10,11}), \\
G_{101}^{\varepsilon\pm} &= a_1^\varepsilon(\pm 1 \mp i\alpha_1(\varepsilon\gamma_1^\varepsilon)^3 P_{10,10} + \alpha_1(\varepsilon\gamma_1^\varepsilon)^2 P_{10,11}), \\
G_{102}^{\varepsilon\pm} &= \pm a_2^\varepsilon i\alpha_2 \varepsilon^2 \gamma_2^\varepsilon P_{10,20}; \\
G_{110}^{\varepsilon\pm} &= \pm Q_{\pm\ell}(w_0^{\varepsilon\pm}, Z_{11}) = \pm Q_{\pm\ell}(w_0^{\varepsilon\pm}, \mathbf{v}_{11} \\
&\quad \pm P_{11,10}v_{10} \pm P_{11,11}v_{11} \pm P_{11,20}v_{20}) \\
&= a_1^\varepsilon(-\varepsilon\gamma_1^\varepsilon \mp \alpha_1(\varepsilon\gamma_1^\varepsilon)^3 P_{11,10} - \alpha_1(\varepsilon\gamma_1^\varepsilon)^2 P_{11,11}), \\
G_{111}^{\varepsilon\pm} &= a_1^\varepsilon(+i\varepsilon\gamma_1^\varepsilon \mp i\alpha_1(\varepsilon\gamma_1^\varepsilon)^3 P_{11,10} + \alpha_1(\varepsilon\gamma_1^\varepsilon)^2 P_{11,11}), \\
G_{112}^{\varepsilon\pm} &= \pm i a_2^\varepsilon i\alpha_2 \varepsilon^2 \gamma_2^\varepsilon P_{10,20}; \\
G_{200}^{\varepsilon\pm} &= \pm Q_{\pm\ell}(w_0^{\varepsilon\pm}, Z_{20}) = \pm Q_{\pm\ell}(w_0^{\varepsilon\pm}, \mathbf{v}_{20} \pm P_{20,10}v_{10} \\
&\quad \pm P_{20,11}v_{11} \pm P_{20,20}v_{20}) = a_1^\varepsilon(\mp \alpha_1(\varepsilon\gamma_1^\varepsilon)^3 P_{20,10} - \alpha_1(\varepsilon\gamma_1^\varepsilon)^2 P_{20,11}), \\
G_{201}^{\varepsilon\pm} &= a_1^\varepsilon(\mp i\alpha_1(\varepsilon\gamma_1^\varepsilon)^3 P_{20,10} + \alpha_1(\varepsilon\gamma_1^\varepsilon)^2 P_{20,11}), \\
G_{202}^{\varepsilon\pm} &= a_2^\varepsilon(\pm 1 + i\alpha_2 \varepsilon^2 \gamma_2^\varepsilon P_{20,20}).
\end{aligned}$$

Теперь, исходя из соотношений (4.20), образуем систему трех линейных уравнений для коэффициентов $b_r^{\varepsilon\pm}$. При этом умножим соотношения с индексами $(jk) = (10), (11), (20)$ на $(a_1^\varepsilon)^{-1}$, $(\varepsilon\gamma_1^\varepsilon a_1^\varepsilon)^{-1}$ и $(a_2^\varepsilon)^{-1}$ соответственно, а слагаемые, содержащие элементы матрицы поляризации и имеющие сомножители ε^3 , ε^2 и ε , переправим в правые части:

$$\begin{aligned}
b_0^{\varepsilon+} - b_0^{\varepsilon-} + b_1^{\varepsilon+} - b_1^{\varepsilon-} &= (a_1^\varepsilon)^{-1} F(Z_{10}) + \varepsilon \sum_{\pm} \sum_{r=0,1,2} R_{0r}^{\varepsilon\pm} b_r^{\varepsilon\pm}, \\
-b_0^{\varepsilon+} - b_0^{\varepsilon-} + i b_1^{\varepsilon+} + i b_1^{\varepsilon-} &= (\varepsilon\gamma_1^\varepsilon a_1^\varepsilon)^{-1} F(Z_{11}) + \varepsilon \sum_{\pm} \sum_{r=0,1,2} R_{1r}^{\varepsilon\pm} b_r^{\varepsilon\pm}, \\
-b_2^{\varepsilon+} + b_2^{\varepsilon-} &= (a_2^\varepsilon)^{-1} F(v_{20}) + \varepsilon \sum_{\pm} \sum_{r=0,1,2} R_{2r}^{\varepsilon\pm} b_r^{\varepsilon\pm}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Подведем итог. Получена система (4.19), (4.21) шести линейных алгебраических уравнений, матрица которой с точностью до исчезающих при $\varepsilon \rightarrow +0$ слагаемых $\varepsilon R_{rs}^{\varepsilon \pm}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -i & -i & 0 & 0 \\ -1 & 1 & i & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

и является неособенной. Таким образом, при малом ε из названной системы единственным образом находится вектор коэффициентов b^ε , а из задачи (4.6), (4.7) с правыми частями (4.12), подчиненными условиям разрешимости (4.3), (4.4), – слагаемое $\tilde{u}^\varepsilon \in W_\beta^{l+4}(\Omega)$ в представлении (4.8). На этом заканчиваем построение почти обратного оператора (4.13) и приступаем к проверке основного утверждения данного раздела.

Теорема 4.7. *Существуют такие положительные ε_0 и c_0 , что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ оператор (4.11) является изоморфизмом, а его норма и норма обратного $(\mathcal{A}_\beta^l(\varepsilon^4))^{-1}$ не превосходят $c_0 \varepsilon^{-3/2}$.*

Доказательство. Решим систему (4.19), (4.21) и найдем столбец b^ε , для которого

$$|b^\varepsilon| \leq c \varepsilon^{-3/2} \|(f, g^3, g^2); \mathcal{R}_\beta^l(\Omega; \partial\Omega)\|. \quad (4.22)$$

Затем решим задачу (4.6), (4.7) для $\tilde{u}^\varepsilon \in W_\beta^{l+4}(\Omega)$ с правыми частями (4.12), для которых по построению выполнены условия разрешимости (4.3) и (4.4). Поскольку

$$\begin{aligned} \|(\tilde{f}^\varepsilon, \tilde{g}^{3\varepsilon}, \tilde{g}^{2\varepsilon}); \mathcal{R}_\beta^l(\Omega; \partial\Omega)\| &\leq c(\|(f, g^3, g^2); \mathcal{R}_\beta^l(\Omega; \partial\Omega)\| + \varepsilon^{-3/2}|b^\varepsilon|) \leq \\ &\leq c(1 + \varepsilon^{-3/2})\|(f, g^3, g^2); \mathcal{R}_\beta^l(\Omega; \partial\Omega)\|, \end{aligned}$$

при помощи оценки (4.5) выводим соотношение

$$\|\tilde{u}^\varepsilon; W_\beta^{l+4}(\Omega)\| \leq c \varepsilon^{-3} \|(f, g^3, g^2); \mathcal{R}_\beta^l(\Omega; \partial\Omega)\|. \quad (4.23)$$

Заметим, что, во-первых, в силу формул (4.22) и (4.23) норма (4.10) допускает оценку

$$\|u^\varepsilon; \mathcal{W}_{\beta, \varepsilon}^{l+4}(\Omega)\| \leq c \varepsilon^{-3/2} (\|(f, g^3, g^2); \mathcal{R}_\beta^l(\Omega; \partial\Omega)\|$$

и, во-вторых,

$$\mathcal{G}^\varepsilon := \mathcal{A}_\beta^l(\varepsilon)\mathcal{T}_\beta^l(\varepsilon)(f, g^3, g^2) - (f, g^3, g^2) = -\Lambda(\tilde{u}^\varepsilon, 0, 0),$$

а значит,

$$\|\mathcal{G}^\varepsilon; \mathcal{R}_\beta^l(\Omega; \partial\Omega)\| \leq c\Lambda\|\tilde{u}^\varepsilon; W_\beta^l(\Omega)\| \leq c\varepsilon^4\varepsilon^{-3}(\|(f, g^3, g^2); \mathcal{R}_\beta^l(\Omega; \partial\Omega)\|) \quad (4.24)$$

и операторная норма из требования (4.14) равна $O(\varepsilon)$. Теперь формула (4.14) для обратного оператора $(\mathcal{A}_\beta^l(\varepsilon^4))^{-1}$ вместе с соотношениями (4.23)–(4.24) доказывают утверждения теоремы. \square

4.4. Обоснование асимптотики матрицы рассеяния. Как уже упоминалось (см., в частности, замечание 3.1), коэффициенты $S_{11}^{r\pm}$, $T_1^{r\pm}$, $r = 0, 1, 2, 3$, и $S_{21}^{s\pm}$, $s = 0, 1$, можно подобрать так, чтобы задачи (3.33), (3.34) имели решения Y_1^r и Y_2^s в классе $W_\beta^{l+4}(\Omega)$. Уберем из правой части (3.32) все многочотия и обозначим полученную, вполне определенную, функцию $Z_{1as}^{\varepsilon+}$. Эта функция удовлетворяет задаче (4.6), (4.7) с правыми частями

$$\begin{aligned} (f_{as}^\varepsilon, g_{as}^{\varepsilon 3}, g_{as}^{\varepsilon 2}) &= (f_{com}^\varepsilon, g_{com}^{\varepsilon 3}, g_{com}^{\varepsilon 2}) \\ &+ \Lambda \left(a_1^\varepsilon \sum_{r=0}^3 (\varepsilon\gamma_1^\varepsilon)^r Y_1^r + a_2^\varepsilon \sum_{s=0}^1 (\varepsilon^2\gamma_2^\varepsilon)^s Y_2^s, 0, 0 \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Здесь слагаемые $(f_{com}^\varepsilon, g_{com}^{\varepsilon 3}, g_{com}^{\varepsilon 2})$ образованы остатками невязок, которые порождены коммутаторами (3.35), примененными к волнам (3.18)–(3.20). Эти слагаемые обладают компактными носителями и допускают оценку

$$\|(f_{com}^\varepsilon, g_{com}^{\varepsilon 3}, g_{com}^{\varepsilon 2}); \mathcal{R}_\beta^l(\Omega; \partial\Omega)\| \leq c\varepsilon^{-3/2}\varepsilon^4. \quad (4.26)$$

При этом учтены порядки $\varepsilon^{-3/2}$ и ε^{-1} множителей (3.26), а также тот факт, что при решении задач (3.33), (3.34) были компенсированы фрагменты упомянутых невязок с множителями $a_1^\varepsilon\varepsilon^r$, $r = 0, 1, 2, 3$, и $a_2^\varepsilon\varepsilon^{2s}$, $s = 0, 1$.

Согласно формулам (1.8) и (3.21), (3.26) для последнего слагаемого $(f_\Lambda^\varepsilon, 0, 0)$ в правой части (4.25) справедливо неравенство

$$\|f_\Lambda^\varepsilon; W_\beta^l(\Omega)\| \leq c\varepsilon^4 \left(\varepsilon^{-3/2} \sum_{r=0}^3 \varepsilon^r \|Y_1^r; W_\beta^{l+4}(\Omega)\| \right)$$

$$+ \varepsilon^{-1} \sum_{s=0}^1 \varepsilon^{2s} \|Y_2^r; W_\beta^{l+4}(\Omega)\| \leq c\varepsilon^{5/2}. \quad (4.27)$$

В разности $Z_1^{\varepsilon+} - Z_{1as}^{\varepsilon+}$ отсутствует приходящая в рукаве Π_R^- волна $w_1^{\varepsilon+}$, а значит, эта разность подчиняется условиям излучения Умова–Мандельштама, принадлежит пространству $\mathcal{W}_{\beta,\varepsilon}^{l+4}(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению (4.16) с правой частью (4.25), для которой верны оценки (4.26) и (4.27). Вспомнив приведенную в теореме 4.7 информацию об операторе (4.15), обратном для $\mathcal{A}_\beta^l(\varepsilon)$, приходим к соотношению

$$\|Z_1^{\varepsilon+} - Z_{1as}^{\varepsilon+}; \mathcal{W}_\beta^{l+4}(\Omega)\| \leq c\varepsilon^{-3/2}\varepsilon^{5/2} = c\varepsilon.$$

Поскольку норма (4.10) в пространстве $\mathcal{W}_\beta^{l+4}(\Omega)$ с отделенной асимптотикой содержит модули коэффициентов рассеяния (см. формулы (4.8) и (4.9)), из оценки (4.27) вытекает искомое неравенство (3.31) для матрицы рассеяния (3.30). Осталось отметить, что “лишние” слагаемые $S_{11}^{r\pm}$ и $S_{21}^{s\pm}$ с индексами $r, s \geq 1$ следует присоединить к остатку в асимптотике $S^\varepsilon = S^0 + \tilde{S}^\varepsilon$.

Теорема 3.5 доказана.

Замечание 4.5. Тот факт, что норма обратного оператора $(\mathcal{A}_\beta^l(\varepsilon))^{-1}$ — бесконечно большая $O(\varepsilon^{-3/2})$ и в волнах (3.19) присутствует множитель такого же порядка, означает, что для обоснования главного члена $S_{(k1)}^{0+}$ асимптотики блока $S_{(k1)}^{\varepsilon+}$ матрицы рассеяния нужно было включить в приближенное решение $Z_{1as}^{\varepsilon+}$ по крайней мере члены $\varepsilon S_{(k1)}^{1+}$, $\varepsilon^2 S_{(k1)}^{2+}$ и $\varepsilon^3 S_{(k1)}^{3+}$, вычисленные, может быть, неправильно, но порождающие достаточно малую невязку в задаче (1.1), (1.2). Таким образом, для оправдания первой асимптотической поправки по крайней мере нужен подходящий член $\varepsilon^4 S_{(k1)}^{4+}$, определение которого требует решения новой задачи (2.1), (2.2) и удлинения анзацев (3.3) и (3.10) для собственных чисел пучка (2.28).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. Ш. Бирман, *О вариационном методе Трэффца для уравнения $\Delta^2 u = f$* . — Докл. АН СССР **101**, No. 2 (1955), 201–204.
2. С. Г. Михлин, *Вариационные методы в математической физике*. Наука, М., 1970.
3. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*. Л.: изд-во Ленингр.ун-та, 1980.
4. М. С. Агранович, М. И. Вишик, *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида*. — Успехи матем. наук. **19**, No. 3 (1999), 53–160.
5. S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*. Berlin, New York: Walter de Gruyter. 1994.
6. Л. А. Вайнштейн, *Теория дифракции и метод факторизации*. Советское радио, М., 1966.
7. С. А. Назаров, *Аномалии рассеяния в резонаторе выше порогов непрерывного спектра*. — Мат. сб. **206**, No. 6 (2015), 15–48.
8. A. I. Korolkov, S. A. Nazarov, A. V. Shanin, *Stabilizing solutions at thresholds of the continuous spectrum and anomalous transmission of waves*. — ZAMM. **96**, No. 10 (2016), 1245–1260.
9. С. А. Назаров, *Почти стоячие волны в периодическом волноводе с резонатором и околоторговые собственные числа*. — Алгебра и анализ **28**, No. 3 (2016), 111–160.
10. С. А. Назаров, *Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов*. — Успехи матем. наук. **54**, No. 5 (1999), 77–142.
11. С. А. Назаров, *Асимптотика собственных чисел на непрерывном спектре регулярно возмущенного квантового волновода*. — Теор. и мат. физика **167**, No. 2 (2011), 239–262.
12. С. А. Назаров, *Принудительная устойчивость простого собственного числа на непрерывном спектре волновода*. — Функц. анализ и его прил. **47**, No. 3 (2013), 37–53.
13. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*. Наука, М., 1973.
14. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками*. — Тр. Московск. матем. общества. **16** (1963), 219–292.
15. С. А. Назаров, *Самосопряженные эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы*. Проблемы матем. анализа. Вып. 16. СПб: изд-во СПбГУ. (1997), 167–192.

16. С. А. Назаров, *Несамосопряженные эллиптические задачи с полиномиальным свойством в областях, имеющих цилиндрические выходы на бесконечность*. — Зап. научн. семин. петербург. отделения матем. института РАН **249** (1997), 212–230.
17. С. А. Назаров, *Асимптотика собственных колебаний длинной двумерной пластины Кирхгофа с переменным сечением*. — Матем. сборник. **209**, No. 9 (2018), 35–86.
18. С. А. Назаров, *Энергетические условия излучения Мандельштама и вектор Умова–Пойнтинга в упругих волноводах*. — Пробл. матем. анализ. Вып. 72. Новосибирск, 2013, 101–146.
19. С. А. Назаров, *Условия излучения Умова–Мандельштама в упругих периодических волноводах*. — Матем. сб. **205**, No. 7 (2014), 43–72.
20. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*. Мир, М., 1972.
21. М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*. Наука, М., 1969.
22. Н. А. Умов, *Уравнения движения энергии в телах*. Одесса: Типогр. Ульриха и Шульце, 1874.
23. Л. И. Мандельштам, *Лекции по оптике теории относительности и квантовой механике*. Сб. трудов. **2**. Изд-во АН СССР, М., 1947.
24. И. И. Ворович, В. А. Бабешко, *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*. Наука, М., 1979.
25. С. А. Назаров, *Бесконечная пластина Кирхгофа на компактном упругом основании может иметь сколь угодно малое собственное число*. — Докл. РАН. **488**, No. 4 (2019), 360–364.
26. А. Н. Крылов, *О расчете балок, лежащих на упругом основании*. Ленинград: изд-во АН СССР, 1931.
27. M. Hetenyi, *Beams on elastic foundation*. Michigan: University Press, 1946.
28. M. Van-Dyke, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. N.Y.; L.: Acad. Press. 1964. М. Д. Ван Дайк, *Методы возмущений в механике жидкостей*, Мир, М., 1967.
29. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*. Наука, М., 1989.

Nazarov S. A. Scattering of low-frequency waves in infinite Kirchhoff plate.

For a small frequency, scattering of waves propagating along a Kirchhoff plate in the shape of locally perturbed strip with traction-free edges is studied. An asymptotic analysis shows that both, bending and twisting, waves do not detect in main distortion of the straight edges, that is the transmission coefficient differs a little from one while other scattering coefficients become small. In other words, an effect similar to the Weinstein anomaly in an acoustic waveguide is observed. Asymptotic procedures are based on a detailed investigation of the spectrum of an auxiliary operator pencil and the corresponding stationary problem. Justification

of the asymptotics is performed by means of the technique of weighted spaces with detached asymptotics.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб. 7/9
С.Петербург 199034, Россия
E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступило 3 октября 2019 г.