Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 483, 2019 г.

**А. С. Михайлов, В. С. Михайлов**

# ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНЕЧНОЙ СТРУНЫ КРЕЙНА–СТИЛТЬЕСА. АППРОКСИМАЦИЯ ПОСТОЯННОЙ ПЛОТНОСТИ ТОЧЕЧНЫМИ МАССАМИ

**Посвящается юбилею профессора М. И. Белишева**

## §1. Введение

Пусть на отрезке $(0,l)$ задана неубывающая ограниченная функция $M(x)$: $0 \leqslant M(0) < M(x) < M(l)$. Под значением функции $M$ в точке $x$ мы понимаем массу отрезка струны $(0,x)$. Если $M-$ дифференцируемая функция, то $\rho(x) = M'(x)-$ плотность струны. Следуя [10,11], мы вводим область, состоящую из *продолженных функций*

$$D_M := \Big\{ \big[u(x), u'_-(0), u'_+(l)\big] \;\Big|\quad u(x) = a + bx - \int\limits_0^x (x-s)g(s)\,dM(s);$$

$$u'_-(0) = b; \quad u'_+(l) = b - \int\limits_0^l g(s)\,dM(s) \Big\},$$

где $u'_-(0), u'_+(l)-$ производные слева и справа, $g-$ $M$-суммируемая функция. Определим *обобщенную дифференциальную операцию Крейна* $l_M[u]$ на $D_M$ по правилу

$$l_M[u] = g(x), \quad M-\text{почти везде}.$$

Обратим внимание, что если функция $M$ является дифференцируемой и $M'(x) > 0$, то $l_m[y] = -\frac{1}{M'()}\frac{d^2y()}{dx^2}$.

---

*Ключевые слова*: обратная задача, струна Крейна–Стилтьеса, метод Граничного управления, точечные массы.

Работа Виктора Михайлова и Александра Михайлова была поддержана грантом РФФИ 18-01-00269 и РФФИ 17-01-00529. Работа подготовлена при поддержке программы Президиума РАН “Новейшие методы математического моделирования в изучении нелинейных динамических систем” (целевая субсидия 08-04).

Зафиксируем $T > 0$ и рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) + l_M[u] = 0, \quad 0 < x < l,\, 0 < t < T, \\ u(x,0) = 0,\, u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u(0,t) = f(t),\, u(x,l) = 0 \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{1}$$

где $f \in L_2(0,T)$– это *граничное управление.*

Заметим что авторы не нашли упоминаний в литературе динамических обратных задач для динамических систем (1), кроме случая, когда $M'(x) = \rho(x) \geqslant \delta > 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$, тогда при $\rho \in C^1$, (1) соответствует начально-краевой задаче для волнового уравнения [8,9]. По мнению авторов, причиной того что подобного рода задачи ещё не были исследованы является факт, что скорость распространения волны в системах с "плохой" плотностью равна бесконечности и обычные методы, такие как метод граничного управления (Boundary Control) [4, 5, 7, 8], не применимы непосредственно, и должны быть изменены.

В настоящей статье мы хотим изложить общую стратегию изучения динамической обратной задачи для системы (1) средствами метода Граничного управления [5–7] на основе частного случая – конечной струны Крейна-Стилтьеса.

Во втором параграфе для произвольного распределения массы мы выводим интегральное уравнение, эквивалентное (1). В третьем параграфе, следуя [15], мы рассмотрим прямые и обратные задачи в важном частном случае: конечная струна Крейна–Стилтьеса. В последнем параграфе мы рассмотрим пример, когда единичная плотность аппроксимируется точечными массами, равномерно распределенными на интервале.

## §2. Прямая задача для струны Крейна

Полезно переписать (1) в интегральной форме. Два раза проинтегрировав уравнение в (1), мы получим, что

$$u(x,t) = -\int_0^t (t-s) l_M[u(\cdot,s)]\, ds.$$

Умножение на $x$ и интегрирование дает

$$\int_0^y u(x,t)x\,dM(x) = -\int_0^y\int_0^t (t-s)xl_M[u(x,s)]\,ds\,dM(x). \tag{2}$$

Используя тождества Лагранжа [10]

$$\int_0^l \left(l[u](x)v(x) - u(x)l[v](x)\right)\,dM(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x)\Big|_{x=0-}^{x=l+}$$

с функцией $v(x) = x$ мы придем к

$$\int_0^l xl_M[u(x,s)]\,dM(x) = u(x,t) - u'(x,t)\Big|_{x=0-}^{x=l_+},$$

и таким образом (2) сводится к

$$\int_0^y u(x,t)x\,dM(x) = -\int_0^t (t-s)(u(x,s) - u'(x,s)x)\Big|_{x=0}^{x=y+} ds$$

$$= -\int_0^t (t-s)\left(u(y,s) - u(0,s) - yu'(y+,s)\right)\,ds.$$

Проинтегрировав последнее тождество по переменной $y$ от 0 до $z$ получим

$$\int_0^z\int_0^y u(x,t)x\,dM(x)\,dy = -\int_0^t (t-s)\int_0^z \left(u(y,s) - u(0,s)\right)\,dy\,ds$$

$$+\int_0^t (t-s)\int_0^z \left(yu'(y+,s)\right)\,ds = -2\int_0^t (t-s)\int_0^z u(y,s)\,dy\,ds$$

$$+ z\int_0^t (t-s)\left[u(0,s) + u(s,z)\right]\,ds$$

Все выкладки приводят к утверждению:

**Лемма 1.** *Начальная краевая задача* (1) *эквивалентна следующему интегральному уравнению:*

$$\int_0^x z(x-z)u(z,t)\,dM(z) = x\int_0^t (t-s)\,[f(s)+u(x,s)]\;ds \\ -2\int_0^t (t-s)\int_0^x u(y,s)\,dy\,ds, \quad u(x,l)=0. \quad (3)$$

Разрешимость (3) для произвольного распределения масс $M$ и анализ *оператора управления*, определенного правилом

$$W^T : f(t) = u(0,t) \mapsto u^f(\cdot,T),$$

являются важным шагом в процедуре решения динамических обратных задач, см. [5–8,12,14]. Теперь мы рассмотрим специальный случай распределения массы, а именно струну Крейна-Стилтьеса.

## §3. Специальный случай: конечная струна Крейна–Стилтьеса. Прямая и обратная задачи.

При исследовании спектральных задач [2,10,11] “плохая” масса аппроксимируется массами, которые имеют форму ступенек, что означает что соответствующие плотности имеют простую структуру точечных масс, распределенных на интервале. Именно поэтому результаты этого раздела, более полно изложенные в [15], могут быть использованы в качестве первого шага к решению динамической обратной задачи для струны общего вида.

Мы предполагаем, что струна является струной Крейна-Стилтьеса, т.е. масса $M$ является кусочно-постоянной функцией. Пусть $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N = l$, $m_i > 0$, $i = 1,\ldots,N-1$, $l_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,\ldots N$, и плотность $dM$ имеет форму $dM(x) = \sum\limits_{i=1}^{N-1} m_i\delta(x-x_i)$. В этом случае мы получим, что

$$l_M[u](x) = \frac{u'(x+0)-u'(x-0)}{m_x},$$

$$m_x := \begin{cases} M(+0)-M(0), & x=0, \\ M(x+0)-M(x-0), & 0<x<l, \\ M(l)-M(l-0), & x=l, \end{cases}$$

и, таким образом, $u'(x) = 0$, $x \in (x_{i-1}, x_i)$ и вводя обозначения $u_i(t) = u(x_i, t)$, видим, что начально-краевая задача (1) эквивалентна начально-краевой задаче для вектор-функции (мы сохраним те же обозначения) $u(t) = (u_1(t), \dots, u_{N-1}(t))$:

$$\begin{cases} Mu_{tt} = -Au + \widetilde{f}, \quad t > 0, \\ u(0) = 0,\, u_t(0) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & b_{N-2} & a_{N-2} \\ 0 & 0 & \dots & a_{N-2} & b_{N-1} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & m_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{f} = \begin{pmatrix} \frac{f}{l_1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

и элементы матрицы $A$ задаются как

$$a_i = \frac{1}{l_{i+1}}, \quad b_i = -\frac{l_i + l_{i+1}}{l_i l_{i+1}}. \tag{5}$$

Заметим что в этом случае $A < 0$.

Решение начально-краевой задачи (1) определяется как непрерывная функция по следующему правилу:

$$u^f(x,t) = \begin{cases} f(t), \quad x = 0, \\ u_i(t), \quad x = x_i, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ 0, \quad x = l, \\ \text{аффинная функция}, \quad x \in (x_{i-1}, x_i). \end{cases} \tag{6}$$

Решение (4) обозначим как $u^f(t)$. В дальнейшем фиксировано $T > 0$.

*Динамическая обратная задача* состоит в восстановлении струны, то есть коэффициентов $l_N$, $m_i$, $l_i$, $i = 1, \dots, N-1$ или, что эквивалентно, элементам матрицы $A$ и $M$, из *оператора отклика* $R^T$, определенного правилом

$$\left(R^T f\right)(t) := u_1^f(t), \quad 0 < t < T. \tag{7}$$

Рассмотрим следующую задачу Коши для разностного уравнения со спектральным параметром $\lambda$:

$$\begin{cases} a_n\phi_{n+1} + a_{n-1}\phi_{n-1} + b_n\phi_n = \lambda m_n\phi_n, \\ \phi_0 = 0, \phi_1 = 1, \end{cases}$$

$n = 1, \dots, N-1$. Последовательно меняя значения индекса $n$ от 1 до $N-1$ мы, в качестве решений, получим множество полиномов (от параметра $\lambda$) $\{0, 1, \phi_2(\lambda), \dots, \phi_N(\lambda)\}$. Обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}$ корни уравнения $\phi_N(\lambda) = 0$. После введения векторов и коэффициентов

$$\varphi(\lambda) = \begin{pmatrix} \phi_1(\lambda) \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{N-1}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \varphi^k = \begin{pmatrix} \phi_1(\lambda_k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{N-1}(\lambda_k) \end{pmatrix}, \quad \omega_k = \left(M\varphi^k, \varphi^k\right),$$

мы обозначим через *спектральные данные* и *спектральную функция* следующие объекты:

$$\{\lambda_i, \omega_i\}_{i=1}^{N-1}, \quad \mu(\lambda) = \sum_{\{k:\lambda_k<\lambda\}} \frac{1}{\omega_k}. \tag{8}$$

*Внешним пространством* системы (1), (4), или пространством элементов управления, обозначим $\mathcal{F}^T := L_2(0,T)$.

**Лемма 2.** *Решение системы (4) допускает спектральное представление*

$$u^f(t) = \frac{1}{l_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^t \frac{\sin\sqrt{|\lambda_k|}(t-\tau)}{\sqrt{|\lambda_k|}} f(\tau)\,d\tau\varphi(\lambda)\,d\mu(\lambda).$$

*Оператор отклика* $R^T : \mathcal{F}^T \mapsto \mathcal{F}^T$ *имеет вид*

$$\left(R^T f\right)(t) = \int\limits_0^t r(t-s)f(s)\,ds,$$

*где*

$$r(t) = \frac{1}{l_1}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\sin\sqrt{|\lambda_k|}t}{\sqrt{|\lambda_k|}\omega_k} \tag{9}$$

*называется* функцией отклика.

*Внутреннее пространство*, то есть пространство состояний системы (4) есть $\mathcal{H}^N := \mathbb{R}^{N-1}$. Для $T > 0$, $u^f(T) \in \mathcal{H}^N$. Метрика в $\mathcal{H}^N$ определяется по формуле

$$(a,b)_{\mathcal{H}^T} = (Ma,b)_{\mathbb{R}^{N-1}}\,, \quad a,b \in \mathcal{H}^N.$$

Задачи граничного управления для некоторых волновых уравнений с негладкими плотностями были изучены в [3]. *Оператор управления* $W^T : \mathcal{F}^T \mapsto \mathcal{H}^N$ определяется правилом:

$$W^T f = u^f(T). \tag{10}$$

Мы введем пространство

$$\mathcal{F}_1^T = \overline{\operatorname{span}\left\{\frac{\sin\sqrt{|\lambda_k|}(T-t)}{\sqrt{|\lambda_k|}}\right\}}.$$

Следующая лемма отвечает на вопрос о граничной управляемости (4):

**Лемма 3.** *Оператор $W^T$ является изоморфизмом между $\mathcal{F}_1^T$ и $\mathcal{H}^N$.*

*Связывающий оператор* $C^T : \mathcal{F}^T \mapsto \mathcal{F}^T$ определяется как $C^T := \left(W^T\right)^* W^T$, поэтому, по определению, для $f,g \in \mathcal{F}^T$

$$\left(C^T f, g\right)_{\mathcal{F}^T} = \left(u^f(T), u^g(T)\right)_{\mathcal{H}^N} = \left(W^T f, W^T g\right)_{\mathcal{H}^N}.$$

В методе граничного управления важно, что оператор $C^T$ можно выразить в терминах обратных данных:

**Теорема 1.** *Связывающий оператор допускает представление в терминах динамических обратных данных:*

$$\left(C^T f\right)(t) = \frac{1}{l_1}\int_0^T \int_{|t-s|}^{2T-s-t} r(\tau)\,d\tau f(s)\,ds.$$

**Замечание 1.** Имеет место соотношение $\mathcal{F}_1^T = C^T \mathcal{F}^T$. Это означает что $\mathcal{F}_1^T$ определяется обратными данными.

В работе [15] авторы предложили три метода восстановления струны из знания оператора отклика $R^T$ для произвольного $T > 0$. Было показано, что достаточно знать функцию $r$ и ее производные только в нуле. Здесь мы приведем только один метод реконструкции, основанный на уравнении Крейна.

Через $f_k^T \in \mathcal{F}_1^T$ мы обозначим элементы управления, приводящие систему (4) в предписанные *специальные состояния*:

$$d_k \in \mathcal{H}^N,\ d_k = \left(0, ., \frac{1}{m_k}, \dots, 0\right),\ k = 1, \dots, N-1.$$

Другими словами, $f_k^T \in \mathcal{F}_1^T$ являются решениями уравнений $W^T f_k^T = d_k$, $k = 1 \dots, N-1$. Согласно лемме 3 мы знаем, что такие управления существуют и единственны в $\mathcal{F}_1^T$. Для нас важно, что их можно найти как решения уравнения Крейна.

**Теорема 2.** *Управление $f_1^T$ может быть найдено как решение следующего уравнения:*

$$\left(C^T f_1^T\right)(t) = r(T-t), \quad 0 < t < T.$$

*Управления $f_k^T$, $k = 1, \dots, N-1$ удовлетворяют системе:*

$$m_k \left(f_k^T\right)'' = a_{k-1} f_{k-1}^T + b_k f_k^T + a_k f_{k+1}^T,$$

*где $a_0 = a_N = 0$. Параметры струны могут быть восстановлены как*

$$l_1 = -\frac{\|f_1^T\|^2_{L_2(0,T)}}{\left(f_1^T\right)'(T)},\ m_k = \frac{1}{\left(C^T f_k^T, f_k^T\right)_{\mathcal{F}^T}},$$
$$b_k = m_k^2 \left(C^T \left(f_k^T\right)'', f_k^T\right)_{\mathcal{F}^T},\ a_k = -b_k - a_{k-1},$$

*где $k = 1, \dots, N-1$.*

**Замечание 2.** В одномерных дискретных и непрерывных динамических системах [5,6,8,13–15] (аналог) оператора управления $W^T$ (10) является изоморфизмом между пространством управлений и пространством состояний, что соответствует точной граничной управляемости соответствующей системы. Однако при выводе Теоремы 2 нами был использован более слабый тип управляемости, а именно *спектральная управляемость.*

На наш взгляд, случай струны Крейна-Стилтьеса с бесконечным числом точечных масс следует рассматривать в рамках подхода, изложенного выше, а не в рамках общего подхода, когда плотность аппроксимируется конечным числом точечных масс, распределенных на интервале.

## §4. Конечная и бесконечная скорость распространения волн. Постоянная плотность.

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда струна на интервале $(0,1)$ с плотностью $\rho(x)=M'(x)=1$ аппроксимируется равномерно распределенными точечными массами. Для этого случая начально-краевая задача (1) имеет вид:

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t)-v_{xx}=0, \quad 0<x<l,\, 0<t<T,\\ v(x,0)=0,\, v_t(x,0)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant l,\\ v(0,t)=f(t),\, u(x,l)=0 \quad 0\leqslant t\leqslant T, \end{cases} \tag{11}$$

Подчеркнем, что в этой исходной системе скорость распространения волн конечна и равна единице. В качестве приближения мы используем одинаковые точечные массы и длины: $l_i=1/N$, $m_i=1/N$, $i=1,\dots,N-1$ и, как следует из леммы 2, скорость распространения волны в приближенной системе бесконечна. Нашей целью является получение эффекта появления конечной скорости распространения волн при $N\to\infty$.

Матрицы $A$, $M$ в (4) имеют вид:

$$A=N\begin{pmatrix} -2 & 1 & \dots & 0\\ 1 & -2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & 1\\ 0 & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad M=\frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Характеристическая функция для матрицы $A_M$ вычисляется по формуле $\chi_{N-1}(x)=\det(A_M-\lambda I)$, где $\lambda$ и $x$ связаны равенством $\lambda=-2N^2(1+x)$ и индекс $N$ соответствует размеру матрицы $A_M\in\mathbb{M}^{N-1}$. Из рекуррентного соотношения $\chi_m(x)=2x\chi_{m-1}(x)-\chi_{m-2}(x)$ для $m=N-1,N-2,\dots$ и того что $\chi_1=2x$, $\chi_2=4x^2-1$ получаем, что $\chi_m(x)=U_m(x)$ где $U_m$ – многочлен Чебышева второго рода. Следовательно, собственные значения $A_M$ равны $\lambda_k=-2N^2(1+x_k)$, где $x_k=\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right)$, $k=1,\dots,N-1$. Положив первую компоненту собственного вектора равной единице, получим что

$$\lambda_k=-4N^2\cos^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right), \quad b_k=\left(1,U_1(-x_k),\dots,U_{N-2}(-x_k)\right),$$

для $k=1,\dots,N-1$ являются собственными значениями и (ненормированными) собственными векторами $A_M$. Вычислим норму этих собственных векторов, используя свойство ортогональности

$$\sum_{k=1}^{N-1} U_i(x_k)U_j(x_k)(1-x_k^2) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \frac{N}{2}, & i = j \end{cases} \tag{13}$$

из которого мы выводим, что $|b_k|^2 = \frac{N}{2\sin^2(\frac{k\pi}{N})}$.

Тогда из Леммы 2 для $f(t) = \delta(t)$ мы получим спектральное представление для $j = 1, \ldots, N-1$:

$$u_j^\delta(t) = (-1)^{j-1} \sum_{k=1}^{2N-1} \sin(2Nx_k t)(1-x_k^2)U_{2j-1}(x_k),$$

где $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{2N}\right)$. Последнее выражение может быть преобразовано к интегральной форме. Чтобы сделать это нужно разложить $\sin(2Nxt)$ в ряд по $U_j(x)$ на отрезке $[-1,1]$, а затем с помощью (13) можно получить следующее выражение для $u^\delta$:

$$u_j^\delta(t) = (-1)^{j-1} N \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \sin(2Nxt)U_{2j-1}(x)\sqrt{1-x^2}dx, \quad j = 1, \ldots, N-1.$$

Последний интеграл может быть вычислен с использованием функции Бесселя: подынтегральное выражение записывается в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\sin(2Nxt)}{\sqrt{1-x^2}}(T_{2j-1}(x) - T_{2j+1}(x)),$$

и используя формулу

$$\int_0^1 T_{2n+1}(x)\sin(ax)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = (-1)^n \frac{\pi}{2} J_{2n+1}(a)$$

из [16] (формула (7.355) на стр. 850) мы приходим к

**Утверждение 1.** *Решение начально-краевой задачи* (1) *для струны Крейна–Стилтьеса с равномерно распределенными одинаковыми точечными массами имеет вид* (6), *где компоненты вектора* $u^\delta(t)$ *определяются как*

$$u_j^\delta(t) = \frac{2j}{t} J_{2j}(2Nt) = N(J_{2j-1}(2Nt) + J_{2j+1}(2Nt)) \tag{14}$$

*для* $j = 1, \ldots, N-1$, *где* $J_n$ *– функции Бесселя.*

Нам интересно посмотреть, что будет при предельном переходе при $N \to \infty$:

**Утверждение 2.** *Функция отклика $r_N(t)$ для динамической системы (4) с матрицами, определенными как (12) (для струны Крейна–Стилтьеса с равномерно распределенными одинаковыми точечными массами) сходится в смысле распределений к*

$$r_N(t) \to \delta(t) \quad \text{при } N \to \infty.$$

**Доказательство.** Доказательство основано на том факте, что для произвольного $a > 0$

$$\int\limits_0^\infty t^{-1} J_2(at)\, dt = \frac{1}{2}.$$

Действительно, согласно (7) и (14), мы имеем что

$$r_N(t) = \frac{2}{t} J_2(2Nt),$$

и согласно предыдущему тождеству

$$\int\limits_0^{+\infty} r_N(t)\, dt = 1, \quad N = 1, 2, \dots.$$

Подставляя пробную функцию $\xi \in C^\infty(0, +\infty)$ в интеграл и делая замену $2Nt = s$, получим

$$\int\limits_0^{+\infty} r_N(t)\xi(t)\, dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2}{t} J_2(2Nt)\xi(t)\, dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2 \cdot 2N}{s} J_2(s)\xi\left(\frac{s}{2N}\right) \frac{ds}{2N}$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{2}{s} J_2(s)\xi\left(\frac{s}{2N}\right) ds \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_0^{+\infty} \frac{2}{s} J_2(s)\xi(0)\, ds = (\delta(t), \xi(t)),$$

что завершает доказательство утверждения. □

Струна Крейна-Стилтьеса с равномерно распределенными одинаковыми точечными массами является дискретным приближением струны с единичной плотностью. Для начально-краевой задачи для струны с единичной плотностью (11) известно, что функция отклика имеет вид $r(t) = -\delta'(t)$. Из Утверждения 2 видно, что функция отклика приближенной системы не сходится к функции отклика исходной. Это связано с определением функции отклика (оператора реакции) в приближенной (дискретной) системе. Действительно, за оператор реакции мы обозначали выражение вида $R^T f(t) = u_1^f(t)$ – значение решение в первом канале (в точке $x_1 = 1/N$). В исходной же системе (11) за оператор реакции обозначено выражение $R^T f(t) = v_x^f(0,t)$ – значение первой производной решения в точке $x = 0$. Если бы мы следили за "правильной" реакцией в дискретной системе, а именно за выражением вида

$$\tilde{r}_N = \frac{u_1^f(t) - u_0^f(t)}{1/N}, \tag{15}$$

то мы бы доказали следующее

**Утверждение 3.** *Подправленная функция отклика $\tilde{r}_N(t)$ 15 для динамической системы* (4) *с матрицами, определенными как* (12) *(для струны Крейна–Стилтьеса с равномерно распределенными одинаковыми точечными массами) сходится в смысле распределений к функции отклика для системы* (11)

$$\tilde{r}_N(t) \to r(t) = -\delta'(t), \qquad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Используя (6) мы построили решение для (1). Теперь мы покажем, что это решение сходится в смысле распределений к $v^\delta(x,t)$ – решению (11).

**Утверждение 4.** *Решение* (6) *начально-краевой задачи* (1) *сходится в смысле распределений*

$$u^\delta(x,t) \to v^\delta(x,t) = \delta(x-t) \qquad \text{при } N \to \infty,$$

*где $v^\delta(x,t)$ – решение задачи (11).*

**Доказательство.** Проинтегрируем произведение функции, определенной в (6) с произвольной пробной функцией $\xi \in C^\infty(0,1)$:

$$(u^\delta(\cdot,t), \xi(\cdot)) = \sum_{j=1}^{N} (J_{2j-1}(2Nt) + J_{2j+1}(2Nt))\xi\left(\frac{j}{N}\right) + \underset{N\to\infty}{o(1)}.$$

Взяв в качестве пробной функции $\xi(x) = \sin(kx)$, мы видим, что правая часть последнего выражения имеет вид

$$2\sum_{j=1}^{N} J_{2j+1}(2Nt)\sin\left(\frac{(2j+1)k}{2N}\right) + \underset{N\to\infty}{o(1)}.$$

Используя формулу связи производящей функции и ряда [17] (формула (9.1.43) на стр. 183):

$$\sin(z\sin\theta) = 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(z)\sin(2k+1)\theta,$$

мы приходим к следующему выражению

$$\left(u^\delta(\cdot,t),\sin(k\cdot)\right) = \sin\left(2Nt\sin\frac{k}{2N}\right) + \underset{N\to\infty}{o(1)} = \sin(kt) + \underset{N\to\infty}{o(1)}.$$

Следовательно,

$$\left(u^\delta(\cdot,t),\sin(k\cdot)\right) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \left(v^\delta(\cdot,t),\sin(k\cdot)\right) \quad \text{для всех} \quad k\in\mathbb{N},$$

а значит сходимость есть и для произвольной пробной функции, что завершает доказательство. □

Утверждения 2–4 гласят, что решение прямой задачи для струны Крейна-Стилтьеса с равномерно распределенными одинаковыми точечными массами, которая является дискретным приближением струны с единичной плотностью, сходится к решению исходной задачи. Аналогичная ситуация происходит и в обратной задаче – подправленные функции отклика для дискретной задачи сходятся в функции отклика в исходной. И в случае прямой и в случае обратной задач сходимость происходит в пространстве распределений.

## Список литературы


1. N. I. Akhiezer, *The classical moment problem and some related questions in analysis.* Edinburgh: Oliver and Boyd, 1965.
2. F. V. Atkinson. *Discrete and continuous boundary problems.* Acad. Press, 1964.
3. S. A. Avdonin, J. Edward, *Exact controllability for string with attached masses.* — SIAM J. Control Optim. **56**, No. 2 (2017), 945–980.
4. S. A. Avdonin, V. S. Mikhaylov, *The boundary control approach to inverse spectral theory.* — Inverse Problems **26**, No. 4 (2010), 19 pp.
5. M. I. Belishev, *Recent progress in the boundary control method.* — Inverse Problems **23**, No. 5 (2007), R1–R67.
6. M. I. Belishev, *Boundary control and inverse problems: a one-dimensional version of the boundary control method.* — J. Math. Sci. **155**, No. 3 (2008), 343–378.
7. M. I. Belishev, *Boundary control and tomography of Riemannian manifolds (the BC-method).* — Russian Mathematical Surveys, **72**, No. 4 (2017), 581–644.
8. M. I. Belishev, V. S. Mikhaylov, *Unified approach to classical equations of inverse problem theory.* — J. Inverse and Ill-Posed Problems **20**, No 4 (2012), 461–488.
9. A. S. Blagoveschenskii, *On a local approach to the solution of the dynamical inverse problem for an inhomogeneous string.* — Trudy MIAN, **115** (1971), 28–38.

10. H. Dym, H. P. McKean, *Gaussian processes, function theory, and the inverse spectral problem.* Academic Press, New York etc. 1976.
11. I. S. Kac, M. G. Krein, *On the spectral functions of the string.* — Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **103** (1974), 19–102, `http://dx.doi.org/10.1090/trans2/103`
12. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *Dynamical inverse problem for the discrete Schrödinger operator.* — Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics., **7**, No. 5 (2016), 842–854.
13. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *Boundary Control method and de Branges spaces. Schrödinger operator, Dirac system, discrete Schrödinger operator.* — J. Math. Anal. Appl. **460**, No. 2 (2018), 927–953.
14. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov. *Dynamic inverse problem for Jacobi matrices.* — Inverse Problems and Imaging, **13**, No. 3 (2019), 431–447.
15. A. S. Mikhaylov, V. S. Mikhaylov, *Inverse dynamic problem for a Krein-Stieltjes string.* — Applied Mathematics Letters **96** (2019), 195–201.
16. I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Y. V. Geronimus, M. Y. Tseytlin, *Table of Integrals, Series, and Products.* Translated by Scripta Technica, Inc. (3 ed.). Academic Press, 1965.
17. M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook Mathematical Functions.* National Bureau of Stabdards Applied Mathematics Series 55, June 1964

Mikhaylov A. S., Mikhaylov V. S. Forward and inverse dynamic problems for finite Krein-Stieltjes string. Approximation of constant density by point masses.

Inverse dynamic problem for dynamical system describing propagation of waves in a Krein string is considered. The forward initial-boundary value problem for this system is reduced to the integral equation. Then the important special case when the density of a string is defined by point masses distributed on a finite interval is studied. Krein type equations are derived, which can be used for recovering of unknown density. The problem of the approximation of constant density by point masses uniformly distributed on the interval and the effect of appearing of a finite speed of wave propagation in the dynamical system is discussed.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский Государственный Университет,
199034 С.-Петербург, Россия
*E-mail*: `mikhaylov@pdmi.ras.ru`
*E-mail*: `ftvsm78@gmail.com`

Поступило 7 ноября 2019 г.